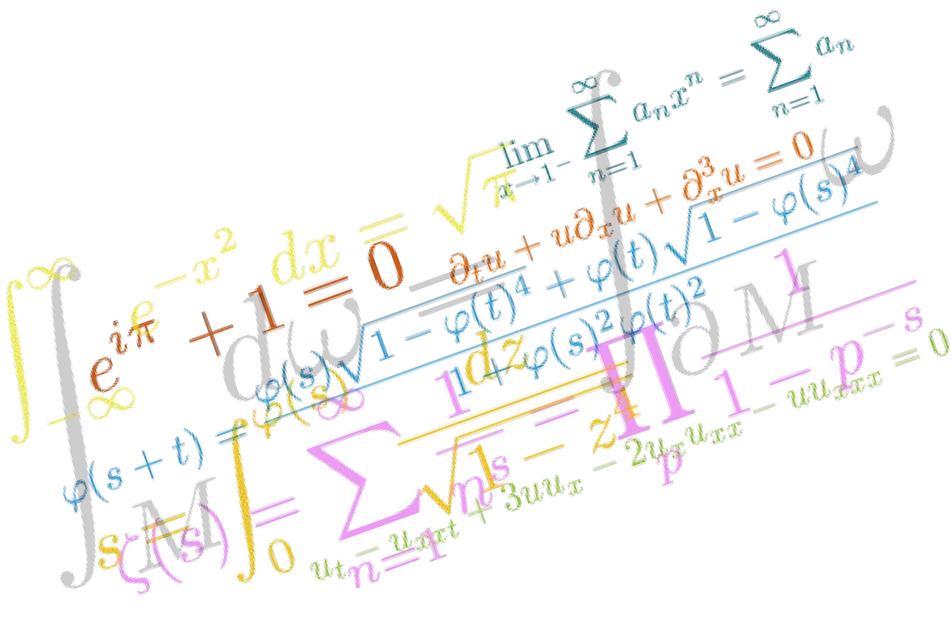
Τεχνικές Ολοκλήρωσης

Ολοκλήρωση δυνάμεων εφαπτομένων, τεμνουσών και των γινομένων αυτών



Ολοκλήρωση δυνάμεων εφαπτομένων, τεμνουσών και των γινομένων αυτών

Θα υπολογίσουμε ολοκληρώματα συναρτήσεων που περιέχουν δυνάμεις εφαπτομένων, τεμνουσών και των γινομένων αυτών, δηλ. ολοκληρώματα της μορφής

$$J_{m,n} = \int \tan^m x \cdot \sec^n x \, dx,$$

για τις διάφορες τιμές των $m.n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, με $(m,n) \neq (0,0)$.

Υπενθύμιση:

$$\boxed{\sec x = \text{τεμ}x := \frac{1}{\cos x}}, \qquad \boxed{\csc x = \text{στεμ}x := \frac{1}{\sin x}}.$$

Θα χρειαστούμε τους ακόλουθους τριγωνομετρικούς τύπους αλλά και παραγώγους των εν λόγω συναρτήσεων:

(i) $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

(ii) $(\tan x)' = \sec^2 x$

(iii) $(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$

(iv) $(\cot x)' = -\csc^2 x$

(v) $(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$

(vi) $(\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x$

► Για $m = 1, \; n = 0$ και $m = 0, \; n = 1$ έχουμε τα (πολύ βασικά) ολοκληρώματα

$$\begin{aligned} J_{1,0} &= \int \tan x \, dx \;=\; \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx \\ &= \int \frac{(-\cos x)'}{\cos x} \, dx \;=\; -\ln|\cos x| + c \\ &= \ln|\sec x| + c \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} J_{0,1} &= \int \sec x \, dx \;=\; \int \sec x \cdot \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx \\ &= \int \frac{\sec^2 x + \tan x \cdot \sec x}{\sec x + \tan x} \, dx \\ &= \int \frac{(\sec x + \tan x)'}{\sec x + \tan x} \, dx \\ &= \ln|\sec x + \tan x| + c \end{aligned}$$

Αν σας φαίνεται ουρανοκατέβατη η ιδέα υπολογισμού του $J_{0,1}$, μην ανησυχείτε. Κάποιος μπήκε στον κόπο (πιθανότατα πειραματίζοντας με τις ιδιότητες των τριγωνομετρικών αριθμών τέμνουσας και εφαπτομένης) και το υπολόγισε ήδη για μας! Η ίδια ιδέα μας επιτρέπει να υπολογίσουμε και το $\int \csc x \, dx$:

$$\begin{aligned} \int \csc x \, dx &= \int \csc x \cdot \frac{\csc x - \cot x}{\csc x - \cot x} \, dx \\ &= \int \frac{\csc^2 x - \cot x \cdot \csc x}{\csc x - \cot x} \, dx \\ &= \int \frac{(\csc x - \cot x)'}{\csc x - \cot x} \, dx \\ &= \ln|\csc x - \cot x| + c \end{aligned}$$

▶ Για $m=0,\ n=2$, το ολοκλήρωμα υπολογίζεται εύκολα:

$$J_{0,2} = \int \sec^2 x\,dx = \int (\tan x)'\,dx = \tan x + c$$

όπως επίσης και για $m=2,\ n=0$, με χρήση της τριγωνομετρικής ταυτότητας (i):

$$\begin{aligned} J_{2,0} &= \int \tan^2 x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)\,dx = \int \sec^2 x\,dx - \int dx \\ &= \tan x - x + c \end{aligned}$$

▶ Για $m=0,\ n\geq 3$, με ολοκλήρωση κατά παράγοντες παίρνουμε **αναδρομικό** τύπο για το αντίστοιχο ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned} J_{0,n} &= \int \sec^n x\,dx = \int \sec^{n-2} x\cdot \sec^2 x\,dx \\ &= \int \sec^{n-2} x\cdot (\tan x)'\,dx \\ &= \sec^{n-2} x\cdot \tan x - (n-2)\int \sec^{n-3} x\cdot (\sec x\cdot \tan x)\cdot \tan x\,dx \\ &= \sec^{n-2} x\cdot \tan x - (n-2)\underbrace{\int \sec^{n-2} x\cdot \tan^2 x\,dx}_{J_{2,n-2}} \\ &\overset{\text{(i)}}{=} \sec^{n-2} x\cdot \tan x - (n-2)\int \sec^{n-2} x\cdot (\sec^2 x - 1)\,dx \\ &= \sec^{n-2} x\cdot \tan x - (n-2)\int \sec^{n} x\,dx + (n-2)\int \sec^{n-2} x\,dx \\ &= \sec^{n-2} x\cdot \tan x - (n-2)J_{0,n} + (n-2)J_{0,n-2} \end{aligned}$$

και λύνοντας ως προς $J_{0,n}$, παίρνουμε

$$\boxed{J_{0,n} = \int \sec^n x\,dx = \frac{1}{n-1}\left(\sec^{n-2} x\cdot \tan x + (n-2)J_{0,n-2}\right)}\ . \tag{1.3}$$

▶ Εργαζόμαστε όπως πιο πάνω και παίρνουμε για $m\geq 3$:

$$\boxed{J_{m,0} = \int \tan^m x\,dx = \frac{1}{m-1}\tan^{m-1} x - J_{m-2,0}}\ . \tag{1.4}$$

▶**Παράδειγμα 1.7.1.** *Θα υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα*

$$J_{3,0} = \int \tan^3 x\,dx \quad \textit{και} \quad J_{0,3} = \int \sec^3 x\,dx.$$

Απάντηση

$$\begin{aligned} J_{3,0} &= \int \tan^3 x\,dx = \int \tan x\cdot \tan^2 x\,dx \\ &= \int \tan x\cdot (\sec^2 x - 1)\,dx \\ &= \int \tan x\cdot \sec^2 x\,dx - \int \tan x\,dx \\ &= \int \tan x\cdot (\tan x)'\,dx - J_{1,0} \\ &= \frac{1}{2}\tan^2 x - \ln|\sec x| + c \end{aligned}$$

το οποίο έρχεται σε συμφωνία με τον τύπο (1.4).

$$\begin{aligned} J_{0,3} &= \int \sec^3 x\,dx = \int \sec x \cdot \sec^2 x\,dx \\ &= \int \sec x \cdot (\tan x)'\,dx \\ &= \sec x \cdot \tan x - \int (\sec x)' \cdot \tan x\,dx \\ &= \sec x \cdot \tan x - \int \tan^2 x \cdot \sec x\,dx \\ &= \sec x \cdot \tan x - J_{2,1}. \end{aligned}$$

Είναι

$$\begin{aligned} J_{2,1} &= \int \tan^2 x \cdot \sec x\,dx = \int (\sec^2 x - 1) \cdot \sec x\,dx \\ &= \int \sec^3 x\,dx - \int \sec x\,dx \\ &= J_{0,3} - J_{0,1}. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} J_{0,3} &= \sec x \cdot \tan x - J_{0,3} + J_{0,1} \\ \Rightarrow 2J_{0,3} &= secx \cdot \tan x + J_{0,1} \\ &= secx \cdot \tan x + \ln|\sec x + \tan x| \\ \Rightarrow J_{0,3} &= \frac{1}{2}(\sec x \cdot \tan x + \ln|\sec x + \tan x|) + c \end{aligned}$$

το οποίο έρχεται σε συμφωνία με τον τύπο (1.3).

► Τέλος, υπολογίζουμε τα αντίστοιχα ολοκληρώματα σε ειδικές περιπτώσεις, ανάλογα με τη μορφή των m και n:

$$\begin{aligned} I_{m,2(k+1)} &= \int \tan^m x \cdot \sec^{2(k+1)} x\,dx = \int \tan^m x \cdot (\sec^2 x)^m x \cdot \sec^2 x\,dx \\ &= \int \tan^m x \cdot (1 + \tan^2 x)^m \cdot (\tan x)'\,dx \end{aligned}$$

(θεωρούμε την αντικατάσταση $u = \tan x$).

$$\begin{aligned} I_{2k+1,n} &= \int \tan^{2k+1} x \cdot \sec^n x\,dx = \int \tan^{2k} x \cdot \sec^{n-1} x \cdot \tan x \cdot \sec x\,dx \\ &= \int (\tan^2 x)^k \cdot \sec^{n-1} x \cdot \tan x \cdot \sec x\,dx \\ &= \int (\sec^2 x - 1)^k \cdot \sec^{n-1} x \cdot (\sec x)'\,dx \end{aligned}$$

(θεωρούμε την αντικατάσταση $u = \sec x$).

$$\begin{aligned} I_{2k,n} &= \int \tan^{2k} x \cdot \sec^n x\,dx = \int (\tan^2 x)^k \cdot \sec^n x\,dx \\ &= \int (\sec^2 x - 1)^k \cdot \sec^n x\,dx \end{aligned}$$

το οποίο υπολογίζεται αναλόγως ποιές είναι οι δυνάμεις n και k.

▶**Παράδειγμα 1.7.2.** *Θα υπολογίσουμε τα*

$$J_{1,3} = \int \tan x \cdot \sec^3 x \, dxx \qquad \textit{και} \qquad J_{2,4} = \int \tan^2 x \cdot \sec^4 x \, dx$$

Απάντηση

$$\begin{aligned} J_{1,3} &= \int \tan x \cdot \sec^3 x \, dx = \int \sec^2 x \cdot \sec x \cdot \tan x \, dx \\ &= \int \sec^2 x \cdot (\sec x)' \, dx = \int \sec^2 x \, d(\sec x) \\ &= \frac{1}{3} \sec^3 x + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{2,4} &= \int \tan^2 x \cdot \sec^4 x \, dx = \int \tan^2 x \cdot \sec^2 x \cdot \sec^2 x \, dx \\ &= \int \tan^2 x \cdot (1 + \tan^2 x) \cdot \sec^2 x \, dx = \int (\tan^2 x + \tan^4 x) \, d(\tan x) \\ &= \frac{1}{3} \tan^3 x + \frac{1}{5} \tan^5 x + c. \end{aligned}$$

Άσκηση 1.7.1. *Με χρήση της αντικατάστασης $x(\theta) = \tan^2 \theta$, να βρείτε αναδρομικό τύπο υπολογισμού του ολοκληρώματος*

$$I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{x+1}} \, dx \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Απάντηση

$x(\theta) = \tan^2 \theta \Rightarrow dx = 2 \sec^2 \theta \cdot \tan \theta \, d\theta$ και $\sqrt{x+1} = \sqrt{\tan^2 \theta} = \sec \theta$. Τότε,

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{\tan^{2n} \theta}{\sec \theta} \cdot 2 \sec^2 \theta \cdot \tan \theta \, d\theta = \underbrace{2 \int \tan^{2n} \theta \cdot (\sec \theta \cdot \tan \theta) \, d\theta}_{I_n(\theta)} \\ &= 2 \int \tan^{2n} \theta \cdot (\sec \theta)' \, d\theta \\ &\overset{\text{κατά παράγοντες}}{=} 2 \tan^{2n} \theta \cdot \sec \theta - 2n \int \tan^{2n-1} \theta \sec^3 \theta \, d\theta \\ &= 2 \tan^{2n} \theta \cdot \sec \theta - 4n \int \tan^{2n-1} \theta \sec^2 \theta \cdot \sec \theta \, d\theta \\ &= 2 \tan^{2n} \theta \cdot \sec \theta - 4n \int \tan^{2n-1} \theta (1 + \sec^2 \theta) \cdot \sec \theta \, d\theta \\ &= 2 \tan^{2n} \theta \cdot \sec \theta - 4n \left(\int \tan^{2n+1} \theta \cdot \sec \theta \, d\theta + \int \tan^{2n-1} \theta \cdot \sec \theta \, d\theta \right) \\ &= 2 \tan^{2n} \theta \cdot \sec \theta - 2n I_n(\theta) - 2n I_{n-1}(\theta) \\ &= 2x^n \cdot \sqrt{x+1} - 2n I_n - 2n I_{n-1} \end{aligned}$$

και λύνοντας ως προς I_n,

$$\boxed{I_n = \frac{2}{2n+1} \left(x^n \cdot \sqrt{x+1} - n I_{n-1} \right)}.$$