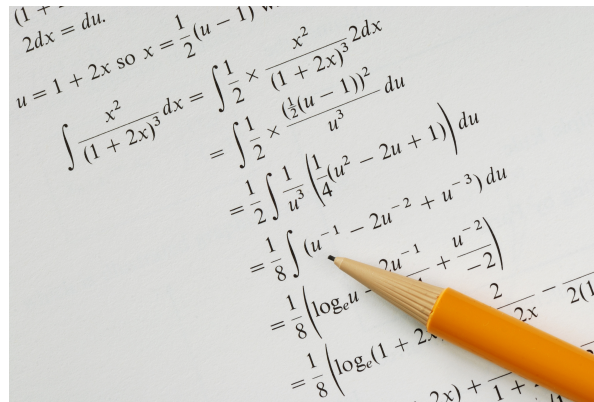


ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

Σημειώσεις



The image shows a handwritten mathematical derivation on a piece of paper, with a yellow pencil resting on it. The derivation is as follows:

$$\begin{aligned} (1+2x)^3 &= du, \\ u &= 1+2x \text{ so } x = \frac{1}{2}(u-1) \text{ and } 2dx = du, \\ \int \frac{x^2}{(1+2x)^3} dx &= \int \frac{1}{2} \times \frac{x^2}{(1+2x)^3} 2dx \\ &= \int \frac{1}{2} \times \frac{(\frac{1}{2}(u-1))^2}{u^3} du \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^3} \left(\frac{1}{4}(u^2 - 2u + 1) \right) du \\ &= \frac{1}{8} \int (u^{-1} - 2u^{-2} + u^{-3}) du \\ &= \frac{1}{8} \left(\log_e u - \frac{2u^{-1}}{-1} + \frac{u^{-2}}{-2} \right) \\ &= \frac{1}{8} \left(\log_e(1+2x) + \frac{2}{1+2x} - \frac{1}{2(1+2x)^2} \right) \end{aligned}$$

Ολοκλήρωση δυνάμεων ημιτόνων, συνημιτόνων και των γινομένων αυτών

Θα υπολογίσουμε ολοκληρώματα συναρτήσεων που περιέχουν δυνάμεις ημιτόνων, συνημιτόνων και των γινομένων αυτών, δηλ. ολοκληρώματα της μορφής

$$I_{m,n} = \int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx,$$

για τις διάφορες τιμές των $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, με $(m, n) \neq (0, 0)$.

Θα χρειαστούμε τους ακόλουθους τριγωνομετρικούς τύπους:

$$(i) \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$(iv) \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$(ii) \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$(v) \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$(iii) \sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

Για $m = 1$, $n = 0$ και $m = 0$, $n = 1$ έχουμε τα ήδη γνωστά ολοκληρώματα

$$I_{1,0} = \int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$I_{0,1} = \int \cos x \, dx = \sin x + c$$

Τώρα,

$$\begin{aligned} I_{2,0} &= \int \sin^2 x \, dx \stackrel{(v)}{=} \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int (1 - \cos(2x)) \, dx \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin(2x) + c \end{aligned}$$

το οποίο με χρήση της τριγωνομετρικής ταυτότητας (iii) γράφεται και ως

$$I_{2,0} = \frac{1}{2}(x - \sin x \cdot \cos x).$$

Ομοίως, με χρήση της τριγωνομετρικής ταυτότητας (iv) πρώτα και ακολούθως της (iii) βρίσκουμε

$$I_{0,2} = \int \cos^2 x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin(2x) + c = \frac{1}{2}(x + \sin x \cdot \cos x).$$

Αν $m \geq 2$, $n = 0$, με ολοκλήρωση κατά παράγοντες παίρνουμε **αναδρομικό** τύπο για το αντίστοιχο ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned} I_{m,0} &= \int \sin^m x \, dx = \int \sin^{m-1} x \cdot \sin x \, dx \\ &= \int \sin^{m-1} x \cdot (-\cos x)' \, dx \\ &= -\cos x \cdot \sin^{m-1} x + \int \cos x \cdot (\sin^{m-1} x)' \, dx \\ &= -\cos x \cdot \sin^{m-1} x + (m-1) \int \cos^2 x \cdot \sin^{m-2} x \, dx \\ &\stackrel{(i)}{=} -\cos x \cdot \sin^{m-1} x + (m-1) \int \sin^{m-2} x \, dx + (m-1) \int \sin^m x \, dx, \end{aligned}$$

δηλ.

$$I_{m,0} = -\cos x \cdot \sin^{m-1} x + (m-1)I_{m,0} + (m-1)I_{m,0}$$

η οποία λύνεται ως προς $I_{m,0}$:

$$I_{m,0} = -\frac{1}{m} \sin^{m-1} x \cdot \cos x + \left(1 - \frac{1}{m}\right) I_{m-2,0} \quad (2)$$

Εντελώς όμοια, αν $m = 0$, $n \geq 2$, παίρνουμε

$$I_{0,n} = \int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \cdot \sin x + \left(1 - \frac{1}{n}\right) I_{0,n-2}$$

► **Παράδειγμα 0.6.1.** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I_{3,0} = \int \sin^3 x dx.$$

Απάντηση

$$\begin{aligned} I_{3,0} &= \int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x dx \\ &= \int \sin^2 x \cdot (-\cos x)' dx \\ &= -\cos x \cdot \sin^2 x + \int \cos x \cdot (\sin^2 x)' dx \\ &= -\cos x \cdot \sin^2 x + 2 \int \cos^2 x \cdot \sin x dx \\ &\stackrel{(i)}{=} -\cos x \cdot \sin^2 x + 2 \int (1 - \sin^2 x) x \cdot \sin x dx \\ &= -\cos x \cdot \sin^2 x + 2 \underbrace{\int \sin x dx}_{=-\cos x} - 2 \underbrace{\int \sin^3 x dx}_{I_{3,0}} \\ \Rightarrow 3I_{3,0} &= -\cos x \cdot \sin^2 x - 2 \cos x \\ \Rightarrow I_{3,0} &= -\frac{1}{3} \cos x \cdot \sin^2 x - \frac{2}{3} \cos x + c \end{aligned}$$

► Θα υπολογίσουμε το $I_{m,n}$, στην περίπτωση που n =περιττός, δηλ. $n = 2k+1$ για κάποιον $k \in \mathbb{N}$ και $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} I_{m,n} = I_{m,2k+1} &= \int \sin^m x \cdot \cos^{2k+1} x dx = \int \sin^m x \cdot (\cos^2 x)^k \cdot \cos x dx \\ &= \int \sin^m x \cdot (1 - \sin^2 x)^k d(\sin x) \\ &\stackrel{u=\sin x}{=} \int u^m \cdot (1 - u^2)^k du \end{aligned}$$

τα οποία ολοκληρώματα υπολογίζονται κατά τα γνωστά.

► Ομοίως και η περίπτωση m =περιττός και $n \in \mathbb{N}$.

► Παράδειγμα 0.6.2. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I_{3,2} = \int \sin^3 x \cdot \cos^2 x \, dx.$$

Απάντηση

$$\begin{aligned} I_{3,2} &= \int \sin^3 x \cdot \cos^2 x \, dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \sin x \, dx \\ &= - \int (1 - \cos^2 x) \cdot \cos^2 x \, d(\cos x) \\ &= \int (\cos^4 x - \cos^2 x) \, d(\cos x) \\ &= \frac{1}{5} \cos^5 x - \frac{1}{3} \cos^3 x + c \end{aligned}$$

► Παράδειγμα 0.6.3. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I_{1,3} = \int \sin x \cdot \cos^3 x \, dx.$$

Απάντηση

$$\begin{aligned} I_{1,3} &= \int \sin x \cdot \cos^3 x \, dx = - \int \cos^3 x \, d(\cos x) \\ &= -\frac{1}{4} \cos^4 x + c \end{aligned}$$

► Παράδειγμα 0.6.4. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I_{5,4} = \int \sin^5 x \cdot \cos^4 x \, dx.$$

Απάντηση

$$\begin{aligned} I_{5,4} &= \int \sin^5 x \cdot \cos^4 x \, dx = \int \sin^4 x \cdot \cos^4 x \cdot \sin x \, dx \\ &= \int (\cos^2 x - 1)^2 \cdot \cos^4 x \, d(\cos x) \\ &= \int (\cos^8 x + 2 \cos^6 x - \cos^4 x) \, d(\cos x) \\ &= -\frac{1}{9} \cos^9 x + \frac{2}{7} \cos^7 x - \frac{1}{5} \cos^5 x + c \end{aligned}$$

Τέλος, αν n και m άρτιοι, χρησιμοποιούμε την τριγωνομετρική ταυτότητα (i) και τα ολοκληρώματα (τα οποία είναι δυνάμεις μόνον του ημιτόνου ή μόνο του συνημιτόνου) που προκύπτουν υπολογίζονται με τις μεθόδους που αναφέραμε.

Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned} I_{4,4} &= \int \sin^4 x \cdot \cos^4 x \, dx = \int \sin^4 x \cdot (\cos^2 x)^2 \, dx \\ &= \int \sin^4 x \cdot (1 - \sin^2 x)^2 \, dx \\ &= \int \sin^4 x \cdot (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) \, dx \\ &= \int (\sin^4 x - 2\sin^6 x + \sin^8 x) \, dx. \end{aligned}$$

Με χρήση του τύπου (2),

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \, dx &= \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{16}\sin(2x)\cos(2x) + c, \\ \int \sin^6 x \, dx &= \frac{5}{16}x - \frac{\sin(3x)\cos(3x)}{96} - \frac{15}{64}\sin(2x) + c \\ \int \sin^8 x \, dx &= \frac{105}{384}x + \frac{1}{512}\sin(4x)\cos(4x) - \frac{21}{348}\sin(4x) + \frac{1}{24}\sin^3(2x) - \frac{1}{4}\sin(2x) + c \end{aligned}$$

και άρα (τελικά)

$$I_{4,4} = \frac{3}{128}x + \frac{1}{1024}\sin(8x) - \frac{1}{128}\sin(4x) + c.$$

Το ιδιαίτερο αυτό ολοκλήρωμα υπολογίζεται επίσης χρησιμοποιώντας τις τριγωνομετρικές ταυτότητες (iv) και (v):

$$\begin{aligned} I_{4,4} &= \int \sin^4 x \cdot \cos^4 x \, dx = \int \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2} \right)^2 \cdot \left(\frac{1 + \cos(2x)}{2} \right)^2 \, dx \\ &= \frac{1}{16} \int (1 - \cos^2(2x))^2 \, dx = \frac{1}{16} \int (\sin^2(2x))^2 \, dx \\ &= \frac{1}{16} \int \sin^4(2x) \, dx = \frac{1}{32} \int \sin^4(2x) \, d(2x) \\ &\stackrel{(2)}{=} \frac{1}{32} \left(-\frac{1}{4}\sin^3(2x) \cdot \cos(2x) + \frac{3}{4} \int \sin^2(2x) \, d(2x) \right) \\ &= \frac{1}{32} \left(-\frac{1}{4}\sin^3(2x) \cdot \cos(2x) + \frac{3}{4} \left(x - \frac{\sin(4x)}{4} \right) \right) \\ &= \frac{1}{128} \left(3x - \sin^3(2x) \cdot \cos(2x) - \frac{3}{4}\sin(4x) \right). \end{aligned}$$

Μετά από μια σειρά αλγεβρικών χειρισμών, χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικές ταυτότητες, βλέπουμε ότι τα δυο αποτελέσματα που βρήκαμε συμφωνούν.

Τέλος, τα ολοκληρώματα της μορφής

$$\int \sin(ax) \cdot \cos(bx) \, dx,$$

όπου $a, b \in \mathbb{R}$, υπολογίζονται εύκολα με χρήση των τριγωνομετρικών τύπων

- (i) $2 \sin a \cdot \cos b = \sin(a - b) + \sin(a + b)$
- (ii) $2 \sin a \cdot \sin b = \cos(a - b) - \cos(a + b)$
- (iii) $2 \cos a \cdot \cos b = \cos(a - b) + \cos(a + b)$

► **Παράδειγμα 0.6.5.** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \sin 5x \cdot \cos 3x \, dx.$$

Απάντηση

$$\begin{aligned} \int \sin 5x \cdot \cos 3x \, dx &= \frac{1}{2} \int [\sin(5x - 3x) + \sin(5x + 3x)] \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int [\sin(2x) + \sin(8x)] \, dx \\ &= -\frac{1}{4} \left(\cos(2x) + \frac{1}{4} \cos(8x) \right) + c \end{aligned}$$

► **Παράδειγμα 0.6.6.** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \sin 2x \cdot \sin(x/2) \, dx.$$

Απάντηση

$$\begin{aligned} \int \sin 2x \cdot \sin(x/2) \, dx &= \frac{1}{2} \int [\cos(2x - x/2) - \cos(2x + x/2)] \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int [\cos(3x/2) - \cos(5x/2)] \, dx \\ &= \frac{1}{3} \sin(3x/2) - \frac{1}{5} \sin(5x/2) + c \end{aligned}$$

Άσκηση 0.6.1. Να υπολογιστούν τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

$$(i) \int \sin^5 x \, dx \qquad (ii) \int \cos^5 x \, dx \qquad (iii) \int \sin^6 x \cdot \cos^3 x \, dx.$$

Απαντήσεις:

$$(i) \int \sin^5 x \, dx = -\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x + c$$

$$(ii) \int \cos^5 x \, dx = \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + c$$

$$(iii) \int \sin^6 x \cdot \cos^3 x \, dx = \frac{1}{7} \sin^7 x - \frac{1}{9} \sin^9 x + c.$$