Άνω και κάτω φράγματα πραγματικών αριθμών

Η ιδιότητα της διάταξης μας δίνει τις έννοιες 'μέγιστο 'και 'ελάχιστο'. Οι έννοιες αυτές μας επιτρέπουν να κινούμαστε πάνω στην ευθεία των πραγματικών αριθμών. Αυτό που μας χρειάζεται είναι οι έννοιες του οσοδήποτε κοντά ή/και αρκετά κοντά, τις οποίες θα δούμε τώρα πως υλοποιούνται. Αργότερα, οι έννοιες αυτές θα λάβουν μια πιο 'συμπαγή' μορφή, μέσω των ακολουθιών.

Ορισμός
Ενα μη κενό υποσύνολο A των πραγματικών αριθμών λέγεται:

Άνω φραγμένο αν υπάρχει $s \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\alpha \leq s$ για κάθε $\alpha \in A$. Το s λέγεται ανω φράγμα του A .
Κάτω φραγμένο αν υπάρχει $l \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $l \leq \alpha$ για κάθε $\alpha \in A$. Το l λέγεται κάτω φράγμα του A .

Φραγμένο αν είναι και κάτω και ανω φραγμένο.

Το αξίωμα της πληρότητας

Κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών έχει ελάχιστο άνω φράγμα.

Υπάρχουν πέρα του ενός άνω ή/και κάτω φράγματα ενός μη κενού υποσυνόλου A των πραγματικών αριθμών

Το ελάχιστο από όλα τα άνω φράγματα λέγεται 'το **supremum**[1] του συνόλου A΄ ενώ το μέγιστο από όλα τα κάτω φράγματα λέγεται 'το **infimum**[2] του συνόλου A΄.

Εύλογα, αφού δεχόμαστε ως αληθές το πιο πάνω, τότε δυϊκά θα ισχύει το αντίστοιχο αποτέλεσμα για το μέγιστο κάτω φράγμα:

Πρόταση [ύπαρξη του supremum]

Έστω A ενα μη κενό και κάτω φραγμένο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών. Τότε το A έχει μέγιστο κάτω φράγμα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ
Έπεται εύκολα αν θεωρήσουμε το σύνολο

$$-A \equiv \{\alpha \in \mathbb{R}: (-\alpha) \in A\}$$

Πράγματι, αφού το A είναι μη κενό και κάτω φραγμένο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών, τότε και το σύνολο $(-A)$ θα είναι μη κενό και θα υπάρχει (τουλάχιστον ενα) $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\forall \alpha \in A \Rightarrow s_* \leq \alpha$. Από τον ορισμό του συνόλου $(-A)$ έχουμε $\forall \alpha \in (-A)$ έχουμε $(-\alpha) \in A$ και αρα $s_* \leq -\alpha$, δηλ. $\alpha \leq -s_*$. Συνεπώς, το $-s$ είναι ένα άνω φράγμα του $(-A)$. Αφού λοιπόν το $(-A)$ είναι μη κενό και άνω φραγμένο, σύμφωνα με το αξίωμα, αυτό θα έχει ελάχιστο άνω φράγμα, έστω s. Θα δείξουμε ότι το $(-s)$ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του συνόλου A. Καταρχάς, το $(-s)$ είναι **ενα κάτω φράγμα του συνόλου A**: αφού $s = sup(-A)$, έχουμε ότι $\forall \alpha \in A$, $(-\alpha) \in (-A)$ και αρα $-\alpha \leq s \Rightarrow -s \leq \alpha$. Θα δείξουμε ότι **είναι και το μέγιστο από τα κάτω φράγματα του**

[1] πληθυντικός: suprema
[2] πληθυντικός: infima

συνόλου A: αν υπήρχε ένα άλλο κάτω φράγμα του συνόλου A, έστω t με την ιδιότητα να είναι μεγαλύτερο από το $-s$, δηλ. $t > -s$, τότε

$$\forall \alpha \in (-A), \qquad (-\alpha) \in A \Rightarrow t \leq -\alpha \Rightarrow \alpha \leq -t$$

και αρα το $-t$ είναι ένα πάνω φράγμα του συνόλου $-A$, συνεπώς, $s \leq -t \Leftrightarrow t \leq s$, άτοπο. □

Πρόταση [χαρακτηρισμός του supremum]
Έστω A ενα μη κενό υποσύνολο των πραγματικών αριθμών. Έστω $s \in \mathbb{R}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα
(α) $s = supA$
(β) (i) Το s είναι ενα ανω φράγμα του A και (ii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \alpha \in A$ τέτοιο ώστε $\alpha \in (s-\varepsilon, s]$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

(α) ⇒ (β)Έστω $s = supA$. Τότε. από τον ορισμό του s ως supremum του συνόλου A, έπεται ότι το s είναι ένα ανω φράγμα του A. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού το s είναι το ελάχιστο από τα άνω φράγματα του A, το $s - \varepsilon$ δεν είναι ανω φράγμα του A. Τότε, υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $s - \varepsilon < x$. Τέλος $x \leq s$ αφού $s = supA$.

(β) ⇒ (α) Έστω ότι το s είναι ενα άνω φράγμα του συνόλου A και ότι $\forall \varepsilon > 0\ \exists \alpha \in A$ τέτοιο ώστε $\alpha \in (s-\varepsilon, s]$. Θα δείξουμε ότι $s = supA$, δηλ. ότι το s είναι το ελάχιστο από τα ανω φράγματα του A. Έστω λοιπόν t ένα άλλο άνω φράγμα του A με $t < s$. Τότε, για $\varepsilon = s - t > 0$ θα υπάρχει (από υπόθεση) $\alpha \in A$ τέτοιο ώστε $t = s - \varepsilon < \alpha \leq s$. Άρα το t δεν είναι άνω φράγμα του A, άτοπο.. Έτσι, $t \geq s$. □

Παρατήρηση: Γράφουμε $t < \alpha \leq s$ και οχι $t < \alpha < s$ γιατί π.χ. για το σύνολο $A = [0,1] \cup \{3\}$ είναι $supA = 3$.

Πρόταση [χαρακτηρισμός του infimum]
Έστω A ενα μη κενό υποσύνολο των πραγματικών αριθμών. Έστω $s \in \mathbb{R}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα
(α) $s = infA$
(β) (i) Το s είναι ενα κάτω φράγμα του A και (ii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \alpha \in A$ τέτοιο ώστε $\alpha \in [s, s+\varepsilon)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

(α) ⇒ (β) Έστω $s = infA$. Τότε. από τον ορισμό του s ως infimum του συνόλου A, έπεται ότι το s είναι ένα κάτω φράγμα του A. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού το s είναι το μέγιστο από τα κάτω φράγματα του A, το $s + \varepsilon$ δεν είναι κάτω φράγμα του A. Τότε, υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $s + \varepsilon > x$. Τέλος $x \geq s$ αφού $s = infA$.

(β) ⇒ (α) Έστω ότι το s είναι ενα κάτω φράγμα του συνόλου A και ότι $\forall \varepsilon > 0\ \exists \alpha \in A$ τέτοιο ώστε $\alpha \in [s, s+\varepsilon)$. Θα δείξουμε ότι $s = infA$, δηλ. ότι το s είναι το μέγιστο από τα κάτω φράγματα του A. Έστω λοιπόν t ένα άλλο κάτω φράγμα του A με $t > s$. Τότε, για $\varepsilon = t - s > 0$ θα υπάρχει (από υπόθεση) $\alpha \in A$ τέτοιο ώστε $s \leq \alpha < s + \varepsilon = t$. Άρα το t δεν είναι κάτω φράγμα του A, άτοπο. Έτσι, $s \geq t$. □

Πρόταση [Αρχιμήδεια ιδιότητα των φυσικών αριθμών]

Το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών δεν είναι άνω φραγμένο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Υποθέτουμε προς άτοπο ότι το $\mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένο. Αφού είναι και μη κενό, από το Αξίωμα της Πληρότητας των Πραγματικών Αριθμών, έπεται ότι $\exists s = sup\mathbb{N} \in \mathbb{R}$. Τότε, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $s - 1 < n$ και αρα $s < n - 1$, άτοπο, αφού $(n+1) \in \mathbb{N}$. □

Εφαρμογές

1. Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ μη κενά και φραγμένα. Θέτουμε
$$A + B = \{\alpha + \beta : \alpha \in A, \beta \in B\} \ \ \kappa\alpha\iota \ \ A \cdot B = \{\alpha \cdot \beta : \alpha \in A, \beta \in B\}$$
Τότε. αφού τα $A, B \subseteq \mathbb{R}$ είναι μη κενά και φραγμένα, θα υπάρχουν τα $supA, infA, supB, infB$. Θα δείξουμε τώρα ότι υπάρχει το $sup(A + B)$ και είναι ίσο με $supA + supB$. Πράγματι, έπεται καταρχάς εύκολα ότι το $A + B$ είναι μη κενό και φραγμένο. Θα δείξουμε πρώτα ότι $supA + supB \leq sup(A + B)$. Πράγματι, το $supA + supB$ είναι ενα άνω φράγμα του $A + B$: έστω $s \in (A + B)$. Τότε, υπάρχουν $\alpha \in A, \beta \in B$ τέτοια ώστε $s = \alpha + \beta$. Αλλά, $supA \geq \alpha$ και $supB \geq \beta$. Συνεπώς, $s = \alpha + \beta \leq supA + supB$. Για την αντίστροφη ανισότητα $supA + supB \geq sup(A + B)$, θα δείξουμε ότι ο αριθμός $sup(A + B) - supB$ είναι ενα άνω φράγμα του A. Έστω λοιπόν $\alpha \in A$. Τότε $sup(A + B) - \alpha \geq supB$. Πράγματι, ο $sup(A + B) - \alpha$ είναι ενα άνω φράγμα του B: έστω $\beta \in B$. Τότε, $sup(A + B) \geq \alpha + \beta$ και αρα $sup(A + B) - \alpha \geq \beta$. Το συμπέρασμα έπεται.
Εργαζόμενοι δυϊκά, μπορούμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει το $inf(A + B)$ και είναι ίσο με $infA + infB$.

2. Έστωσαν $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και φραγμένο τέτοιο ώστε $supA = infA$. Τότε το A είναι **μονοσύνολο.**
Πράγματι, αφού το A είναι μη κενό, υπάρχει $\alpha \in A$. Αν $\beta \in A$, τότε ακριβώς ενα από τα πιο κάτω μπορεί να συμβαίνει:
   - $\alpha > \beta$. Τότε $infA \leq \beta < \alpha \leq supA$, άτοπο.
   - $\alpha < \beta$. Τότε $infA \leq \alpha < \beta \leq supA$, άτοπο.
   - $\alpha = \beta$, δηλ. το Α είναι μονοσύνολο

3. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και φραγμένο και B ενα υποσύνολο του A. Τότε,
$$infA \leq infB \leq supB \leq supA.$$
Καταρχάς, τα $supA, infA, supB, infB$ υπάρχουν αφού και τα 2 εν λόγω σύνολα είναι μη κενα και φραγμένα (αφού $A \neq \emptyset$, έπεται ότι υπάρχει $\alpha \in A$ και αφού $B \subseteq A$, έπεται ότι $\alpha \in B$. Αφού το A είναι φραγμένο, θα υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $|\alpha| \leq M, \forall \alpha \in A$. Συνεπώς, αφού $B \subseteq A$, έπεται ότι $|\beta| \leq M, \forall \beta \in B$, δηλ. το B είναι (επίσης) φραγμένο). Τώρα αν $\beta \in B$, έχουμε ότι $infB \leq \beta \leq supB$ και αρα $infB \leq supB$. Αφού το $supA$ είναι ενα ανω φράγμα του A, έπεται ότι αν $\beta \in B \subseteq A$, τότε $\beta \leq supA$ και τότε το $supA$ θα είναι μεγαλύτερο ή ίσο του ελαχίστου φράγματος του B , δηλ. $supB \leq supA$. Ομοίως, δείχνουμε ότι και $infA \leq infB$.

4. Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ μη κενά και φραγμένα. Τότε,
$$sup(A \cup B) = max\{supA, supB\} \ \ \kappa\alpha\iota \ \ inf(A \cup B) = min\{infA, infB\}$$
Θα αποδείξουμε μόνο το ότι $sup(A \cup B) = max\{supA, supB\}$ αφού το δεύτερο αποδεικνύεται εντελώς όμοια. Αφού $A, B \subseteq A \cup B$, από την προηγούμενη εφαρμογή, έπεται ότι $sup(A \cup B) \geq supA$ και $sup(A \cup B) \geq supB$. Συνεπώς, $sup(A \cup B) \geq max\{supA, supB\}$. Για την αντίστροφη ανισότητα, αρκεί να δείξουμε ότι το $max\{supA, supB\}$ είναι ενα άνω φράγμα του συνόλου $A \cup B$: Έστω $s \in A \cup B$. Τότε το s ανήκει σε ένα τουλάχιστον από τα σύνολα A και B. Αν $s \in A$, τότε $s \leq supA \leq max\{supA, supB\}$. ενώ αν $s \in B$, τότε $s \leq supB \leq max\{supA, supB\}$ και το συμπέρασμα έπεται.

Παραδείγματα

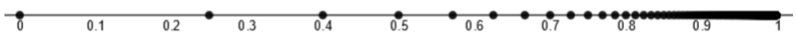
1. Θα υπολογίσουμε το $supA$, όπου

$$A = \left\{1 - \frac{3}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

Καταρχάς, το σύνολο A είναι άνω φραγμένο (ενα αω φράγμα του είναι π.χ. ο αριθμός 1 η ο 2). Θα δείξουμε ότι $supA = 1,$ χρησιμοποιώντας την Πρόταση (χαρακτηρισμός του supremum). Έχουμε $\forall n \in \mathbb{N}$ $\frac{3}{n} > 0 \Rightarrow -\frac{3}{n} < 0 \Rightarrow 1 - \frac{3}{n} < 1$ και αρα ο αριθμός 1 είναι ενα ανω φράγμα του συνόλου A. Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Αφού το σύνολο των φυσικών αριθμών δεν είναι άνω φραγμένο, θα υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ο οποίος φυσικά εξαρτάται από την επιλογή αυτή του ε τέτοιος ώστε $\frac{3}{N} < \varepsilon$, δηλ. $N > \frac{3}{\varepsilon}$, δηλ. $1 - \frac{3}{N} < 1 - \varepsilon$. Αλλά, . $\left(1 - \frac{3}{N}\right) \in A$ και το συμπέρασμα έπεται.

Εναλλακτικά, θα αποδείξουμε ότι $supA = 1$ απευθείας μέσω του ορισμού του supremum: Όπως και πρίν, δείχνουμε ότι αρα ο αριθμός 1 είναι ενα ανω φράγμα του συνόλου A. Θα δείξουμε ότι το $s = 1$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου A. Έστω λοιπόν t ενα άλλο ανω φράγμα του συνόλου A με $t < s = 1$. Τότε για $\varepsilon = s - t > 0$ και αφού το σύνολο των φυσικών αριθμών δεν είναι άνω φραγμένο, έπεται ότι υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\frac{3}{N} < \varepsilon = 1 - t$, δηλ. $t < 1 - \frac{3}{\varepsilon}$, δηλ. $1 - \frac{3}{N} < 1 - \varepsilon$. Αλλά, . $\left(1 - \frac{3}{N}\right) \in A$, και συνεπώς καταλήξαμε σε αντίφαση, αφού το t είναι ενα ανω φράγμα του A.

Σημείωση: αφού το $supA = 1 \notin$ Α, έπεται ότι το σύνολο A δεν έχει maximum.



2. Έστω το σύνολο

$$A = \left\{\frac{2}{n} : n \in \mathbb{Z} - \{0\}\right\}$$

Έχουμε $\forall n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ έχουμε ότι $\frac{2}{n} \leq 2$ και αρα ο αριθμός 2 είναι έναάνω φράγμα του συνόλου αυτού. Αλλά $2 \in A$, επομένως, $supA = maxA = 2$. Επίσης, $\forall n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ έχουμε ότι $\frac{2}{n} \geq -2$ και αρα ο αριθμός -2 είναι ενα κάτω φράγμα του συνόλου. Αλλά $-2 \in A$, επομένως, $infA = minA = -2$.

3. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα $infA, minA, maxA, supA$ αν

$$A = \left\{\frac{2}{n} + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\right\}$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι

$$A = \left\{\frac{2}{2n} + (-1)^{2n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{\frac{2}{2n-1} + (-1)^{2n-1} : n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{\frac{1}{n} + 1 : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{\frac{2}{2n-1} - 1 : n \in \mathbb{N}\right\}$$
$$= \left\{\dots, \frac{1}{3} + 1, \quad \frac{1}{2} + 1, \quad 2\right\} \cup \left\{\dots, \frac{2}{5} - 1, \quad \frac{2}{3} - 1, \quad 1\right\}$$

και αρα $2 = maxA = supA$ και $infA = -1 \notin A$, δηλ. $\nexists\, minA$.