Μελέτη συνέχειας βασικών συναρτήσεων

Η μελέτη της συνέχειας συναρτήσεων μέσω του ορισμού μπορεί να είναι επίπονη και χρονοβόρα. Μέσα όμως από την Αρχή της Μεταφοράς σε συνδυασμό με την Πρόταση [Ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων] η διαδικασία επαλήθευσης ή διάψευσης της συνέχειας είναι ευκολότερη.

1. Έστω η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=\begin{cases} x\cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right), \alpha\nu\ x\neq 0 \\ 0, \alpha\nu\ x=0 \end{cases}$$

Η f είναι συνεχής.

|Απόδειξη ισχυρισμού με τον ορισμό|

Έστω $x_0\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x. Έστω $\varepsilon>0$. Θα βρούμε ένα $\delta\equiv\delta(\varepsilon)>0$ τέτοιο ώστε η $|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, δηλ. (ισοδύναμα) $|x-x_0|<\delta\Rightarrow\left|x\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)-x_0\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{x_0}\right)\right|<\varepsilon$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\left|x\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)-x_0\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{x_0}\right)\right| &= \left|x\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)-x_0\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)+x_0\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)-x_0\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{x_0}\right)\right| \\
&\leq \left|x\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)-x_0\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\right|+\left|x_0\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)-x_0\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{x_0}\right)\right| \\
&= |x-x_0|\cdot\left|\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\right|+|x_0|\cdot\left|\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)-\eta\mu\left(\frac{1}{x_0}\right)\right| \\
\eta\mu(2x)=2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x\qquad &= |x-x_0|\cdot\left|\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\right|+2|x_0|\cdot\left|\eta\mu\left(\frac{x-x_0}{2xx_0}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x-x_0}{2xx_0}\right)\right| \\
&= |x-x_0|\cdot\left|\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\right|+2|x_0|\cdot\left|\eta\mu\left(\frac{x-x_0}{2xx_0}\right)\right|\cdot\left|\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x-x_0}{2xx_0}\right)\right| \\
\left|\eta\mu\left(\frac{x-x_0}{2xx_0}\right)\right|\leq x\qquad &\leq |x-x_0|\cdot\left|\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\right|+2|x_0|\cdot\frac{|x-x_0|}{2|xx_0|}\cdot\left|\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x-x_0}{2xx_0}\right)\right| \\
\left|\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x-x_0}{2xx_0}\right)\right|\leq 1, \left|\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\right|\leq 1\qquad &\leq |x-x_0|+\frac{|x-x_0|}{|x|} \\
&\leq |x-x_0|\cdot\left(1+\frac{1}{|x|}\right)
\end{aligned}$$

Θα βρούμε ενα ανω φράγμα για την ποσότητα $\left(1+\frac{1}{|x|}\right)$ το οποίο εξαρτάται μόνο από το x_0.

Για $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ και $|x-x_0|<1$ έχουμε

$$|x|-|x_0|<|x-x_0|<1\Rightarrow|x|-|x_0|<1\Rightarrow|x|<1+|x_0|$$

Επίσης, για Για $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ και $|x-x_0|<\frac{|x_0|}{2}$ έχουμε (τελικά) ότι

$$\frac{1}{|x|}<\frac{2}{|x_0|}$$

Συνδυάζοντας τα πιο πάνω, έχουμε:

$$\left|x\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)-x_0\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{x_0}\right)\right|\leq 2|x-x_0|\cdot\frac{2+|x_0|}{|x_0|}$$

Επιλέγοντας λοιπόν για

$$\delta=\frac{1}{2}min\left\{1,\quad\frac{|x_0|}{2},\quad\frac{\varepsilon|x_0|}{2+|x_0|}\right\}$$

έχουμε το ζητούμενο.

Για τη συνέχεια στο σημείο $x = 0$, έστω $\varepsilon > 0$. Θα βρούμε ένα $\delta \equiv \delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε η $|x| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon$, δηλ. (ισοδύναμα) $|x| < \delta \Rightarrow \left|x \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\right| < \varepsilon$. Αλλά,

$$\left|x \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\right| = |x| \cdot \left|\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$$

Αρα αρκεί να πάρουμε $\delta = \varepsilon$.

|Απόδειξη ισχυρισμού με την Αρχή της Μεταφοράς|

Η συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων. Για τη συνέχεια στο $x = 0$, θεωρούμε τυχούσα ακολουθία $(x_n)_n \subset \mathbb{R}\backslash\{0\}$με τέτοια ώστε $x_n \to 0$. Τότε

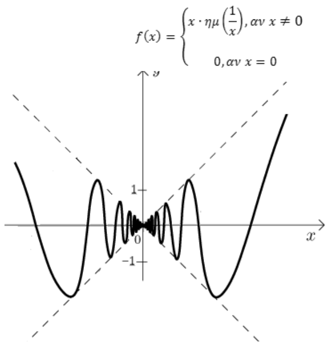
$$|f(x_n)| = \left|x_n \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x_n}\right)\right| \to 0$$

όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Άρα, $f(x_n) \to 0 = f(0)$ και το συμπέρασμα έπεται από την Αρχή της Μεταφοράς.

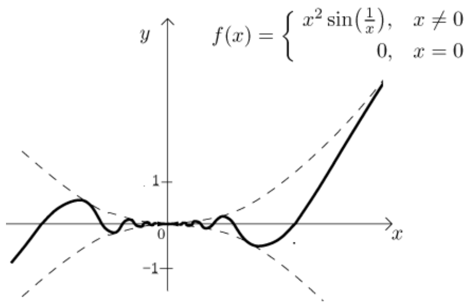
2. Ομοίως, δείχνουμε ότι η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right), \alpha\nu\ x \neq 0 \\ 0, \alpha\nu\ x = 0 \end{cases}$$

είναι συνεχής.



Το γράφημα της συνάρτησης είναι 'εγκλωβισμένο' μεταξύ των ευθειών $y = x$ και $y = -x$



Το γράφημα της συνάρτησης είναι 'εγκλωβισμένο' μεταξύ των καμπύλων $y = x^2$ και $y = -x^2$

Γενικά, μπορούμε να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^n \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right), \alpha\nu\ x \neq 0 \\ 0, \alpha\nu\ x = 0 \end{cases}$$

όπου n φυσικός αριθμός, είναι συνεχής.

3. **[Η συνάρτηση του Dirichlet]**

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \alpha\nu\ x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \alpha\nu\ x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

Θα δείξουμε ότι η f είναι **πουθενά συνεχής** (παντού ασυνεχής)

Με χρήση του ορισμού της συνέχειας: Έστω τυχόν $x_0 \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι η f είναι ασυνεχής στο σημείο αυτό. Επιλέγουμε $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$. Θα δείξουμε ότι $\forall\delta > 0\, \exists x \in \mathbb{R}$ με

$|x-x_0| \geq \varepsilon = \frac{1}{2}$. Πράγματι, αν $x_0 \in \mathbb{Q}$, τότε το σύνολο $(x_0-\delta, x_0+\delta) \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ είναι μη κενό, από την πληρότητα του $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$. Έστω λοιπόν $q \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$. Τότε $|f(q)-f(x_0)| = |1-1| = 1 > \frac{1}{2}$. Αν όμως το $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, τότε χρησιμοποιούμε ανάλογο επιχείρημα (από την πληρότητα του $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$). Σε κάθε περίπτωση έπεται το ζητούμενο.

Με την αρχή της Μεταφοράς:

Έστω τυχόν $x_0 \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι η f είναι ασυνεχής στο σημείο αυτό. Από την πληρότητα του $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$ έχουμε ότι υπάρχει ακολουθία $(q_n)_n \subset \mathbb{Q}$ τέτοια ώστε $x_n \to x_0$. Επίσης, από την πληρότητα του $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$ χουμε ότι υπάρχει ακολουθία $(p_n)_n \subset \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ τέτοια ώστε $q_n \to x_0$. Αλλά, από τον ορισμό της f έχουμε ότι $f(q_n) = 1 \to 1$ ενω $f(p_n) = 0 \to 0$. Βρήκαμε λοιπόν 2 διαφορετικές ακολουθίες οι οποίες συγκλίνουν στο x_0 αλλα οι εικόνες τους μέσω της f συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια. Το συμπέρασμα έπεται από την αρχή της μεταφοράς.

4. **[Η συνάρτηση του Thomae][1] -βλ. [Rud]-Άσκηση 18**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \alpha\nu\ x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, MK\Delta(p,q) = 1 \\ & 0, \alpha\nu\ x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

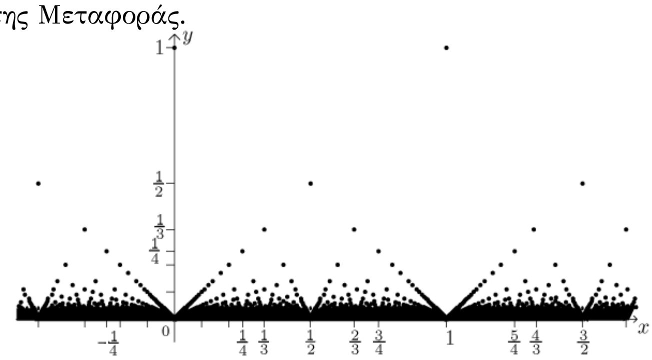
Η f είναι συνεχής στους αρρήτους: Από τον ορισμό της συνάρτησης f, έχουμε ότι οι μόνοι αριθμοί x οι οποίοι ικανοποιούν την $f(x) \geq \frac{1}{q}$ είναι οι $x = \frac{\mu}{\nu}$ με $1 \leq \nu \leq q$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θεωρούμε το σύνολο

$$S_\nu = \left\{\frac{\mu}{\nu} : \nu \in \mathbb{Z}, \quad \left|\frac{\mu}{\nu} - 1\right| < 1\right\}$$

για το οποίο παρατηρούμε ότι $|S_\nu| \leq 2\nu$ αφού $x = [x] - (x)$ [2]. Έστω $q \in \mathbb{Z}_+$ σταθεροποιημένο. Τότε, σε κάθε φραγμένο διάστημα έχουμε $\frac{1}{q} > f(x) \geq 0$ για όλα (αλλά πεπερασμένα το πλήθος) $x \in \mathbb{Q}$. Αν $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ και $\delta > 0$ η ελάχιστη απόσταση μεταξύ του α και των ρητών αυτών, τότε

$$|x-\alpha| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\alpha)| < \frac{1}{q}$$

και το συμπέρασμα έπεται. Η ασυνέχεια στους ρητούς έπεται εύκολα με ενα επιχείρημα μέσω της Αρχής της Μεταφοράς.



Σχήμα: Η συνάρτηση του Thomae

[1] *Ονομάζεται έτσι εις μνήμη του Johannes Karl Thomae (1840-1921). Η συνάρτηση αυτή έχει και άλλα ονόματα: η συνάρτηση ποπκορν, η συνάρτηση σταγόνα, η συνάρτηση χάρακας, η συνάρτηση Riemann ή τα άστρα της Βαβυλωνίας

[2] $[x]$ δηλώνει το ακέραιο μέρος του x και (x) το κλασματικό μέρος του x

5. [Η συνάρτηση ακεραίου μέρους πραγματικού αριθμού]

Θεώρημα

Για κάθε πραγματικό αριθμό x, έχουμε ότι υπάρχει **μοναδικός** ακέραιος αριθμός κ τέτοιος ώστε να ισχύει

$$\kappa \leq x \leq \kappa + 1 \quad (*).$$

Ορισμός

Αν $x \in \mathbb{R}$, τότε ο (μοναδικός) ακέραιος αριθμός κ τέτοιος ώστε να ισχύει η $(*)$ λέγεται **το ακέραιο μέρος του** x και συμβολίζεται με $[x]$.

Παρατηρήσεις

(α) Προφανώς αν $x \in \mathbb{R}$, τότε $[x] \leq x \leq [x] + 1$ ή ισοδύναμα, $x - 1 \leq [x] \leq x$

(β) Μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι ισχύουν τα

(i) $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$ και (ii) $\exists \theta \in [0,1)$ τέτοιο ώστε $x - [x] = \theta$.

Έτσι, το ακέραιος ενός αριθμού είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος αριθμός ο οποίος δεν υπερβαίνει τον αριθμό αυτό.

Για παράδειγμα, $[-1{,}8] = -2$ αφού $-2 \leq -1{,}8 \leq -2 + 1 = -1$ και $[1{,}8] = 1$ αφού $1 \leq 1{,}8 \leq 1 + 1 = 2$. Επίσης, $[1] = 1$.

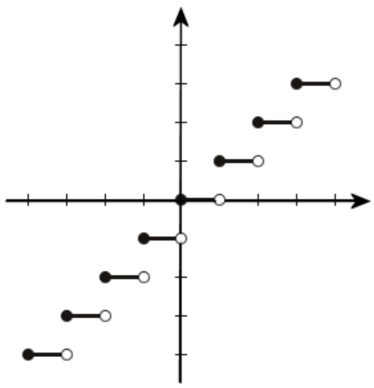
Έστω τώρα η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = [x]$. Τότε αφού $\forall x \in \mathbb{R}$ είναι $x - 1 \leq [x] \leq x$ και $f(\kappa) = [\kappa] = \kappa, \forall \kappa \in \mathbb{Z}$, έπεται ότι

$$f(x) = \begin{cases} \vdots \\ -2, x \in [-2,-1) \\ -1, x \in [-1,0) \\ 1, x \in [1,2) \\ 2, x \in [2,3) \\ \vdots \end{cases}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι στους ακεραίους παρουσιάζει άλματα **ασυνέχειας ύψους 1**. Έτσι,

Η f δεν είναι φραγμένη: έπεται από την $f(\kappa) = [\kappa] = \kappa, \forall \kappa \in \mathbb{Z}$.

Η f δεν είναι περιοδική: Έστω ότι η f είναι περιοδική με περίοδο T. Τότε $f(x) = [x] = f(x+T) = [x+T]$. Υποθέτουμε χωρίς απώλεια της γενικότητας ότι $T > 0$ (αφού και το $-T$ είναι περίοδος της συνάρτησης). Τότε $f(\mathbb{R}) = [0,T)$. Πράγματι, αν $x \in \mathbb{R}$, τότε η διαίρεση του x με το T δίνει $x = \mu T + \lambda$, όπου $\mu, \lambda \in \mathbb{Z}$ με $\lambda \in [0,T)$ και οι δυο αυτοί αριθμοί εξαρτώνται φυσικά από το x. Τότε $f(x) = f(\mu T + \lambda) = f(\lambda) = [\lambda] = \lambda \in [0,T)$. Έτσι, $f(\mathbb{R}) \subseteq [0,T)$. Επίσης, ισχύει και ο αντίστροφος εγκλεισμός, αφού αν $x \in [0,T)$, τότε $0 \leq [x] = f(x) \leq x < T$. Δείξαμε λοιπόν ότι η f είναι φραγμένη, άτοπο.



Σχήμα: Η συνάρτηση ακεραίου μέρους πραγματικού αριθμού

Ερωτήσεις κατανόησης/Εμπέδωσης

- Δώστε ενα παράδειγμα συνάρτησης $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που να είναι συνεχής σε ενα και μόνο σημείο.

  Ένα τέτοιο παράδειγμα συνάρτησης είναι η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

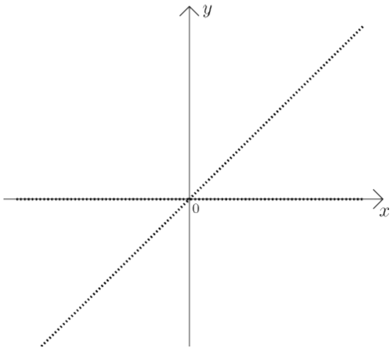
$$f(x) = \begin{cases} x, αν\ x \notin \mathbb{Q} \\ 0, αν\ x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

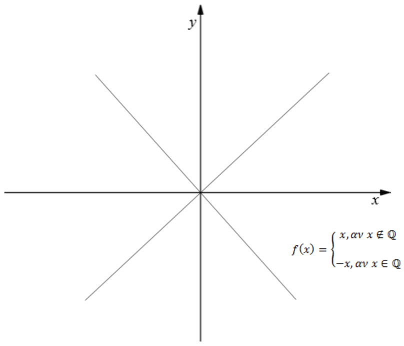
  Απόδειξη ισχυρισμού:

  - η f είναι συνεχής για $x = 0$: Έστω $\varepsilon > 0$. Ψάχνουμε να βρούμε ένα $\delta \equiv \delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε η $|x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon$, δηλ. (ισοδύναμα) $|x| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$, Αλλά, αν $x \notin \mathbb{Q}$, τότε $|f(x)| = |x|$ και αν $x \in \mathbb{Q}$, τότε $|f(x)| = 0$. Επομένως, λαμβάνοντας $\delta = \varepsilon$ έπεται το ζητούμενο.
  - η f είναι ασυνεχής στο $\mathbb{R}\setminus\{0\}$: Έστω $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Αφού $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, έχουμε ότι υπάρχει ακολουθία $(q_n)_n$ ρητών αριθμών τέτοια ώστε $q_n \to x_0$ και ομοίως, αφού $\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, έχουμε ότι υπάρχει ακολουθία $(p_n)_n$ αρρητών αριθμών τέτοια ώστε $p_n \to x_0$. Τότε, από τον ορισμό της f, έχουμε ότι $f(q_n) = 0 \to 0$ και $f(p_n) = p_n \to x_0$. Αλλά, $x_0 \neq 0$ και τότε το ζητούμενο προκύπτει από την Αρχή της Μεταφοράς.

  Ένα άλλο παράδειγμα είναι η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x, αν\ x \notin \mathbb{Q} \\ -x, αν\ x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$





- Δώστε ενα παράδειγμα συνάρτησης $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που να μην είναι πουθενά συνεχής αλλά η $|f|$ να είναι παντού συνεχής.

  Απάντηση: η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 1, \alpha\nu\ x \notin \mathbb{Q} \\ -1, \alpha\nu\ x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

- Έστω $f: (1,2) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $f(x) = x^4, \forall x \in (1,2) \cap \mathbb{Q}$. Τί συμπεραίνετε για την f;

  Απάντηση: $f(x) = x^4, \forall x \in (1,2)$. Έστω λοιπόν $x_0 \in (1,2)$. Τότε, από την πληρότητα του $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$ έχουμε ότι υπάρχει ακολουθία $(q_n)_n \subset \mathbb{Q}$ τέτοια ώστε $x_n \to x_0$. Αλλά, η f είναι συνεχής και άρα, από την αρχή της μεταφοράς, έχουμε ότι $f(x_0) = \lim_n f(x_n) = \lim_n {x_n}^4 = {x_0}^4$.

Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι μια συνάρτηση f είναι είναι **ασυνεχής** σε ενα σημείο x_0 του Π.Ο. της αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία $(x_n)_n$ στο Π.Ο. της ώστε $x_n \to x_0$ (καθώς $n \to +\infty$) αλλά $f(x_n) \nrightarrow f(x_0)$.

2. Αν η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x = 0$ με $g(0) = 0$ και τέτοια ώστε $|f(x)| \leq |g(x)|, \forall x \in \mathbb{R}$, όπου $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση , να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x = 0$.

3. Βρείτε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία να είναι συνεχής σε μόνο 2 σημεία. Αποδείξτε τον ισχυρισμό σας.

4. Έστω g και h δυο συνεχείς συναρτήσεις σε ενα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο
$$f(x) = \begin{cases} h(x), & x \leq x_0 \\ g(x), & x \geq x_0 \end{cases}$$
Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο x_0.

5. Έστω f μια συνάρτηση για την οποία $f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$ και η οποία είναι συνεχής στο σημείο $x = 0$. Δείξτε ότι η f είναι παντού συνεχής (ότι δηλ. επεκτείνεται σε μια παντού συνεχή συνάρτηση).

6. Έστω $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $f(0) = 0$ και $|f'(x)| \leq |f(x)|, \forall x \in [0,1]$. Δείξτε ότι $f \equiv 0$.

7. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x - [x]$ είναι περιοδική με περίοδο $T = 1$.

8. Εξετάστε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$.

9. Βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f: [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = [\eta\mu x]$.

10. Εξετάστε ως προς την παραγωγισιμότητα τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \tau o\xi\eta\mu(\eta\mu x)$

11. Δείξτε ότι η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \tau o\xi\varepsilon\varphi x$ είναι κατα τμήματα σταθερή.

Λύσεις

1. Ισοδύναμα, θα δείξουμε ότι μια συνάρτηση f είναι είναι **ασυνεχής** σε ενα σημείο x_0 του Π.Ο. $D(f)$ της f αν και μόνο αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x_\delta \in D(f)$ με $|x_\delta - x_0| < \delta$ ΚΑΙ $|f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \varepsilon$.

2. Παρατηρούμε Καταρχάς ότι $0 \leq |f(0)| \leq |g(0)| = 0$ και αρα $f(0) = 0$. Έστω ακολουθία $(x_n)_n$ πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $x_n \to 0$. Τότε από την υπόθεση, έχουμε ότι $\forall n \in \mathbb{N}$ έχουμε $|f(x_n)| \leq |g(x_n)|$, δηλ.
$$-g(x_n) \leq f(x_n) \leq g(x_n).$$

Άρα, αφού $x_n \to 0$, έπεται (λόγω της συνέχειας της g) ότι $g(x_n) \to g(0) = 0$. Έτσι από το Κριτήριο Ισοσυγκλινουσων, έχουμε ότι και $f(x_n) \to g(0) = 0$ και το συμπέρασμα έπεται από την Αρχή της Μεταφοράς.

3. Έστω η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2, αν\ x \in \mathbb{Q} \\ x, αν\ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Είναι συνεχής σε δύο μόνο σημεία. στα σημεία $x = 0{,}1$.

Έστω η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)(x-2), αν\ x \in \mathbb{Q} \\ 0, αν\ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Είναι συνεχής σε δύο μόνο σημεία, στα $x = 1{,}2$.

4. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο x_0. Ισοδύναμα, θα δείξουμε ότι το $\lim_{h\to 0} f(x_0 + h)$ υπάρχει και είναι ίσο με $f(x_0)$. Έχουμε

$$\lim_{h\to 0^-} f(x_0 + h) = \lim_{h\to 0^-} h(x_0 + h) = h(x_0)$$

λόγω της συνέχειας της h στο x_0 και

$$\lim_{h\to 0^+} f(x_0 + h) = \lim_{h\to 0^+} g(x_0 + h) = g(x_0)$$

λόγω της συνέχειας τ ης g στο x_0 και Αλλά, $g(x_0) = h(x_0) = f(x_0)$ και το ζητούμενο έπεται.

5. Καταρχάς, από την υπόθεση για την f έχουμε ότι $\forall x \in \mathbb{R}\, f(x+0) = f(x) + f(0)$ δηλ. $f(0) = 0$. Τώρα, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} f(\alpha + h) - f(\alpha) &= \lim_{h\to 0}\big(f(\alpha) + f(h)\big) - f(\alpha) \\ &= \lim_{h\to 0}\big(f(\alpha) + f(h) - f(\alpha)\big) \\ &= \lim_{h\to 0} f(h) \\ \text{f συνεχής στο } x = 0 \quad &= f(0) = 0 \end{aligned}$$

Έτσι, για το (τυχόν) α έχουμε ότι

$$\lim_{h\to 0} f(\alpha + h) - f(\alpha) = 0$$

δηλ. ισοδύναμα $\lim_{h\to 0} f(\alpha + h) = f(\alpha)$. Αυτό όμως και ο ορισμός της συνέχειας στο (τυχόν) α.

6. Η f είναι φραγμένη στο $[0,1] \Rightarrow \exists M > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x)| \le M, \forall x \in [0,1]$. Έστω $x \in (0,1)$ σταθεροποιημένο. Εφαρμόζοντας το ΘΜΤ στο διάστημα $[0,x]$, υπάρχει $\xi_x{}^1 \in (0,x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_x{}^1) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Rightarrow x f'(\xi_x{}^1) = f(x)$$

και αρα (αφου $x > 0$) $x|f'(\xi_x{}^1)| = |f(x)|$. Από υπόθεση, έπεται λοιπόν ότι $|f(x)| \le x|f(\xi_x{}^1)|$. Ομοίως, υπάρχει $\xi_x{}^2 \in (0, \xi_x{}^1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_x{}^2) = \frac{f(\xi_x{}^1) - f(0)}{\xi_x{}^1 - 0} \Rightarrow \xi_x{}^1 f'(\xi_x{}^2) = f(\xi_x{}^1)$$

και αρα (αφου $\xi_x{}^1 > 0$) $\xi_x{}^1|f'(\xi_x{}^2)| = |f(\xi_x{}^1)|$. Από υπόθεση, έπεται λοιπόν ότι $|f(\xi_x{}^1)| \le \xi_x{}^1|f(\xi_x{}^2)|$ και τελικά, $|f(x)| \le x^2|f(\xi_x{}^2)|$. Συνεχίζοντας έτσι, κατασκευάζουμε μια ακολουθία

$(\xi_x{}^n) \subset (0,1)$ τέτοια ώστε $|f(x)| \leq x^n |f(\xi_x{}^n)| \leq x^n M, \forall n \in \mathbb{N}$. Αφού $x \in (0,1)$, έπεται ότι $x^n \to 0$ και αρα $f(x) = 0$.

7. $f(x) = x - [x]$. Ισοδύναμα, θα δείξουμε ότι $[x+1] = [x] + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Έχουμε $\forall x \in \mathbb{R}$, $[x] \leq x \leq [x] + 1$ και αρα $[x] + 1 \leq x + 1 \leq ([x] + 1) + 1$ και το ζητούμενο έπεται από τη μοναδικότητα του ακεραίου μέρους.
Σημείωση: αφού $\exists \theta \in [0,1)$ τέτοιο ώστε $x - [x] = \theta$, τότε $f(x) \in [0,1), \forall x \in \mathbb{R}$ και αρα $\forall x \in [\kappa, \kappa+1)$ *όπου* $\kappa \in \mathbb{Z}$, έχουμε ότι $f(x) = 0$.

8. Η f είναι καλά ορισμένη αφού $x \geq [x], \forall x \in \mathbb{R}$. Επίσης, $\forall x \in \mathbb{R}$ είναι $x = [x] + \theta$, όπου $\theta \in [0,1)$, δηλ. $x - [x] = \theta$, όπου $\theta \in [0,1)$. Συνεπώς, αν $\kappa \in \mathbb{Z}$, τότε $\forall x \in [\kappa, \kappa+1)$ είναι $[x] = \kappa$ και αρα

$$f(x) = \begin{cases} \kappa - 1 + \sqrt{x - \kappa + 1}, & x \in [\kappa - 1, \kappa) \\ \kappa + \sqrt{x - \kappa}, & x \in [\kappa, \kappa + 1) \end{cases} \quad (\kappa \in \mathbb{Z})$$

Έτσι, η f είναι συνεχής στα διαστήματα της μορφής $[\kappa - 1, \kappa)$ και $[\kappa, \kappa + 1)$ για $\kappa \in \mathbb{Z}$. Ελέγχουμε τη συνέχεια της f στους ακεραίους: αν $x = \kappa \in \mathbb{Z}$, τότε $f(x) = f(\kappa) = \kappa$ και

$$\lim_{x\to\kappa^+} f(x) = \lim_{x\to\kappa^+}\left(\kappa + \sqrt{x-\kappa}\right) = \kappa \;\; \textit{και} \;\; \lim_{x\to\kappa^+} f(x) = \lim_{x\to\kappa^+}\left(\kappa - 1 + \sqrt{x - \kappa + 1}\right) = \kappa$$

και αρα

$$\lim_{x\to\kappa} f(x) = \kappa = f(\kappa)$$

Άρα, η f είναι συνεχής και στους ακεραίους. Συνεπώς, η f είναι παντού συνεχής.

9. Έχουμε

$$f(x) = [\eta\mu x] = \begin{cases} 0, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ 1, x = \frac{\pi}{2} \\ 0, x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \\ 1, x \in (\pi, 2\pi) \\ 0, x = 2\pi \end{cases}$$

και αρα το σύνολο τιμών της είναι το $\{0,1\}$.

10. Είναι $\mathrm{D(f)} = \mathbb{R}$ αφού $|\eta\mu x| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Είναι περιοδική με περίοδο 2π (αφού η συνάρτηση ημίτονο είναι τέτοια) και παραγωγίσιμη στο σύνολο $\left\{x \neq \frac{k\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}\right\}$. Λόγω της περιοδικότητας της συνάρτησης, αποδεικνύουμε μόνο ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x = \frac{\pi}{2}$:
Έχουμε

$$f'_+\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{\overbrace{\tau o\xi\eta\mu(\eta\mu x)}^{\pi - x} - \overbrace{\tau o\xi\eta\mu\left(\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}^{\frac{\pi}{2}}}{x - \frac{\pi}{2}} = -1$$

ενω

$$f'_-\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\overbrace{\tau o\xi\eta\mu(\eta\mu x)}^{x} - \overbrace{\tau o\xi\eta\mu\left(\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}^{\frac{\pi}{2}}}{x - \frac{\pi}{2}} = 1$$

Για $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε $f'(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu\, x}{|\sigma\upsilon\nu\, x|} = \frac{\sigma\upsilon\nu\, x}{\sigma\upsilon\nu\, x} = 1$ ενω για $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ έχουμε $f'(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu\, x}{|\sigma\upsilon\nu\, x|} = -\frac{\sigma\upsilon\nu\, x}{\sigma\upsilon\nu\, x} = -1$. Έτσι,

$$f'(x) = 1 \text{ στα διαστήματα της μορφής } \left[2\kappa\pi, 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right) \text{ και} \left(\kappa\pi + \frac{3\pi}{2}, 2(\kappa+1)\pi\right), \kappa \in \mathbb{Z}$$

και

$$f'(x) = -1 \text{ στα διαστήματα της μορφής } \left(2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa\pi + \frac{3\pi}{2}\right], \kappa \in \mathbb{Z}$$

11. Είναι $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$. Σε κάθε μια από τις 2 συνεκτικές συνιστώσες του συνόλου $\mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

και αρα αυτή είναι σταθερή σε κάθε μία από αυτές, ήτοι υπάρχουν (πραγματικές) σταθερές c_1 και c_2 τέτοιες ώστε

$$f(x) = \begin{cases} c_1, & x < 1 \\ c_2, & x > 1 \end{cases}$$

Αλλά, $f(0) = \tau o\xi\varepsilon\varphi 1 - \tau o\xi\varepsilon\varphi 0 = \frac{\pi}{4}$ και αρα $c_1 = \frac{\pi}{2}$ και $f(-1) = \tau o\xi\varepsilon\varphi 0 - \tau o\xi\varepsilon\varphi(-1) = -\frac{3\pi}{4}$ και αρα $c_1 = -\frac{\pi}{2}$. Έτσι, τελικά,

$$f(x) = \tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \tau o\xi\varepsilon\varphi x = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & x < 1 \\ -\frac{3\pi}{4}, & x > 1 \end{cases}$$

Παρατήρηση

Η $g(x) = \tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ έχει άλμα ασυνέχειας μήκους π στο σημείο $x = 1$ αφού

$$\lim_{x\to 1^+} \tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -\frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to 1^-} \tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

και αυτό δικαιολογεί κατα κάποιον τρόπο γιατί η 'διαφορά' $\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \tau o\xi\varepsilon\varphi x$ είναι π στο σημείο αυτό.