Συνέχεια συνάρτησης

Ορισμός

Μια συνάρτηση f λ έγεται ότι είναι **συνεχής** σε ενα σημείο x_0 του Π.Ο. της αν $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta \equiv \delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να ισχύει $f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$. Λέμε ότι η f είναι **συνεχής** αν αυτή είναι συνεχής σε κάθε στοιχείο του Π.Ο. της.

Παρατηρήσεις

i. Ο ορισμός της συνέχειας μας λέει ότι κατάλληλα μικρές μεταβολές τως τιμών της συνάρτησης έχουν ως αποτέλεσμα κατάλληλα μικρές μεταβολές στις εικόνες τους, υπό την έννοια ότι ενα σημείο x_0 του Π.Ο. της είναι σημείο συνέχειας αυτής αν για οσοδήποτε μικρή περιοχή του $f(x_0)$ μπορούμε να βρούμε μια κατάλληλα μικρή περιοχή του x_0 έτσι ώστε **κάθε** σημείο x που ανήκει στην περιοχή αυτή να απεικονίζεται (μέσω της f) σε αυτή την περιοχή του $f(x_0)$.

ii. **Η άρνηση του ορισμού της συνέχειας είναι η εξής:**
Μια συνάρτηση f είναι είναι **ασυνεχής** σε ενα σημείο x_0 του Π.Ο. $D(f)$ της f αν και μόνο αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x_\delta \in D(f)$ με $|x_\delta - x_0| < \delta$ **ΚΑΙ** $|f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \varepsilon$.

Εφαρμογές

i. Θα αποδείξουμε με τον ορισμό της συνέχειας ότι η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 5x - 1$ είναι συνεχής στο σημείο $x = 1$. Πράγματι, έστω τυχόν $\varepsilon > 0$. Θα βρούμε $\delta \equiv \delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε η πιο κάτω πρόταση να είναι αληθής: $|x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(1)| < \varepsilon$, δηλ. η

$$|x - 1| < \delta \Rightarrow |5x - 1 - (5 \cdot 1 - 1)| < \varepsilon.$$

Αλλά, $|5x - 1 - (5 \cdot 1 - 1)| = 5|x - 1|$. Θέτοντας λοιπόν $\delta \equiv \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{5}$, έχουμε το ζητούμενο. Δείξαμε λοιπόν ότι

$$\forall \varepsilon > 0 : |x - 1| < \frac{\varepsilon}{5} \Rightarrow \; |f(x) - f(1)| = 5|x - 1| < 5 \cdot \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon$$

και αρα η f είναι συνεχής στο σημείο $x = 1$.

ii. Θα αποδείξουμε με τον ορισμό της συνέχειας ότι η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 5x^2 - 1$ είναι συνεχής. Πράγματι, έστω τυχόν $x_0 \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0. Έστω τυχόν $\varepsilon > 0$. Θα βρούμε $\delta \equiv \delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε η πιο κάτω πρόταση να είναι αληθής: $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, δηλ. η

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |5{x_0}^2 - 1 - (5 \cdot {x_0}^2 - 1)| < \varepsilon.$$

Αλλά, $|5{x_0}^2 - 1 - (5 \cdot {x_0}^2 - 1)| = 5|x_0 - 1| \cdot |x_0 + 1|$. Για την ποσότητα $|x_0 - 1|$ μπορούμε να βρούμε ένα άνω φράγμα, π.χ. για $\delta < 1$. Αν λοιπόν $\delta < 1$, τότε

$$|x - x_0| < \delta < 1 \Rightarrow |x| - |x_0| < 1 \Rightarrow |x| < 1 + |x_0|$$

Άρα

$$|x + x_0| = |x - x_0 + 2x_0| \leq |x - x_0| + 2|x_0| < \delta + 2|x_0| < 1 + 2|x_0|$$

Το φράγμα αυτό εξαρτάται **μόνον** από το x_0. Έτσι, αν $\delta < \frac{\varepsilon}{2(1+2|x_0|)}$, τότε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Έτσι, επιλέγοντας $\delta = min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2(1+2|x_0|)}\right\}$, έχουμε το ζητούμενο.

iii. Έστω $f:[1,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\frac{1}{x}$. θεωρούμε ενα τυχόν $x_0 \in [1,+\infty)$ και θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο αυτό. Έστω $\varepsilon>0$. Θα βρούμε $\delta \equiv \delta(\varepsilon)>0$τέτοιο ώστε η πιο κάτω πρόταση να είναι αληθής: $|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. Αλλά,

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{|x_0-x|}{|x_0\cdot x|}<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{|x_0-x|}{x_0\cdot x}<\varepsilon$$

Για $\delta=\varepsilon$, αφού $x, x_0 \in [1,+\infty)$, έχουμε ότι $\frac{1}{x_0\cdot x}\leq 1$ και αρα

$$\frac{|x_0-x|}{x_0\cdot x}\leq |x_0-x|.$$

Παίρνοντας λοιπόν $\delta=\varepsilon$, έχουμε το ζητούμενο.

iv. Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία υπάρχει $M\geq 0$ τέτοιο ώστε $\forall x, y \in A$ ισχύει

$$|f(x)-f(y)|\leq M|x-y|.$$

Η συνθήκη αυτή είναι ικανή για να μας εξασφαλίσει τη συνέχεια της f στο σημείο $x=0$. Πράγματι, αν $M=0$, τότε η συνάρτηση είναι σταθερή. Αν $M>0$, τότε θεωρούμε ενα τυχόν $x_0\in A$ και θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο αυτό. Έστω $\varepsilon>0$. Θα βρούμε $\delta\equiv\delta(\varepsilon)>0$τέτοιο ώστε η πιο κάτω πρόταση να είναι αληθής: $|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. Αλλά, αφού από υπόθεση έχουμε ότι $|f(x)-f(x_0)|\leq M|x-x_0|$, αρκεί να πάρουμε $\delta=\frac{\varepsilon}{M}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ (χαρακτηρισμός συνέχειας συνάρτησης μέσω ακολουθιών-Αρχή της Μεταφοράς)
Μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ενα σημείο x_0 του Π.Ο. της αν και μόνο αν για **κάθε** ακολουθία $(x_n)_n$ πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $x_n\to x_0$, τότε $f(x_n)\to f(x_0)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ενα σημείο x_0 του Π.Ο. της. Έστω ακολουθία $(x_n)_n$ πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $x_n\to x_0$. Θα δείξουμε ότι $f(x_n)\to f(x_0)$.
Έστω $\varepsilon>0$ τυχόν. Λόγω της συνέχειας της f στο x_0, θα υπάρχει $\delta\equiv\delta(\varepsilon)>0$ τέτοιο ώστε $|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. Αφού $x_n\to x_0$, για το $\delta(\varepsilon)$ που βρήκαμε, μπορούμε να βρούμε $n_0\equiv n_0\big(\delta(\varepsilon)\big)\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|x_n-x_0|<\delta, \forall n\geq n_0$. Από τις δυο πάνω σχέσεις, έχουμε τελικά ότι αν $n\geq n_0$, τότε $|x_n-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x_n)-f(x_0)|<\varepsilon$. Δείξαμε λοιπόν ότι $\forall\varepsilon>0\,\exists n_0\equiv n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ έτσι ώστε $|f(x_n)-f(x_0)|<\varepsilon, \forall n\geq n_0$ και αυτός είναι ακριβώς ο ορισμός ότι $\lim_n f(x_n)=f(x_0)$.

($\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι για κάθε ακολουθία $(x_n)_n$ πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $x_n\to x_0$, τότε $f(x_n)\to f(x_0)$. Υποθέτουμε προς άτοπο ότι η f είναι ασυνεχής στο σημείο x_0. Τότε, υπάρχει $\varepsilon>0$ τέτοιο ώστε η πιο κάτω πρόταση να είναι αληθής: $(\exists x\, \mu\varepsilon\, |x-x_0|<\delta)\wedge(|f(x)-f(x_0)|\geq\varepsilon)$. Εφαρμόζουμε την πιο πάνω σχέση διαδοχικά για $\delta=\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}$: κάθε τέτοιο δ είναι >0 και αρα η πιο πάνω δίνει ότι υπάρχει ακολουθία $(x_n)_n$ στο Π.Ο. της f με

$$|x_n-x_0|<\frac{1}{n}\ \kappa\alpha\iota\ |f(x_n)-f(x_0)|\geq\varepsilon$$

Από το κριτήριο Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών, έχουμε ότι $x_n\to x_0$ και αρα (από την υπόθεσή μας) θα είναι $f(x_n)\to f(x_0)$, άτοπο, αφού $|f(x_n)-f(x_0)|\geq\varepsilon$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Συνέπειες της Αρχής της Μεταφοράς

i. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ενα σημείο x_0 του Π.Ο. της, τότε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \qquad \textbf{(*)}$$

δηλ.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right).$$

Αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι οι 3 πιο κάτω προτάσεις είναι ταυτόχρονα αληθείς:

(α) Υπάρχουν τα $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ *και* $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$,

(β)

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

(γ)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Το όριο $\lim_{x \to x_0} f(x)$ έχει έννοια μόνο όταν το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης της συνάρτησης f και επομένως η συνέχεια μέσω της **(*)** επαληθεύεται μόνο στα σημεία συσσώρευσής της. Αν όμως το x_0 δεν είναι σημείο συσσώρευσης της f, τότε είναι μεμονωμένο σημείο και επομένως η f είναι έτσι και αλλιώς συνεχής σε αυτό.

ii. Μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε (Άσκηση) παίρνοντας αρνήσεις στους αντίστοιχους προτασιακούς τύπους ότι μια συνάρτηση f είναι είναι **ασυνεχής** σε ενα σημείο x_0 του Π.Ο. της αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία $(x_n)_n$ στο Π.Ο. της ώστε $x_n \to x_0$ (καθώς $n \to +\infty$) αλλά $f(x_n) \nrightarrow f(x_0)$.

Εφαρμογή

Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και τέτοια ώστε $|f(x)| \leq |x|, \forall x \in \mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής στο $x = 0$.

Πράγματι, παρατηρούμε Καταρχάς ότι $0 \leq |f(0)| \leq |0| = 0$ και αρα $f(0) = 0$. Έστω ακολουθία $(x_n)_n$ πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $x_n \to 0$. Τότε από την υπόθεση, έχουμε ότι $\forall n \in \mathbb{N}$ έχουμε $|f(x_n)| \leq |x_n|$, δηλ.

$$-x_n \leq f(x_n) \leq x_n.$$

Άρα, αφού $x_n \to 0$, από το Κριτήριο Ισοσυγκλινουσών, έχουμε ότι και $f(x_n) \to 0$. Αλλά, $f(0) = 0$ και το συμπέρασμα έπεται από την Αρχή της Μεταφοράς.