Το 1ο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού

Θεώρημα (1ο Θεμελιώδες Θεώρημα Απειροστικού Λογισμού)

Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Θεωρούμε τη συνάρτηση $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ με

$$x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Τότε, η F είναι συνεχής στο $[a,b]$, διαφορίσιμη στο (a,b) και ισχύει $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in (a,b)$, δηλ.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x),\ \forall x \in (a,b).$$

Η F είναι ουσιαστικά μια παράγουσα της f.

Άσκηση 17-75 από το[ΝΓΓ]

1. Έστω $f, g : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ συναρτήσεις με g συνεχής και f παραγωγίσιμη. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F : [0,+\infty) \to \mathbb{R} \quad \text{με} \quad F(x) = \int_0^{f(x)} g(t)\,dt.$$

Τότε η F είναι παραγωγίσιμη με $F'(x) = g(f(x)) \cdot f'(x), \quad \forall x \in [0,+\infty)$.

2. Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις με g παραγωγίσιμη συνάρτηση και $h, g : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ συναρτήσεις με $h(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [0,+\infty)$, τότε η συνάρτηση

$$G : [0,+\infty) \to \mathbb{R} \quad \text{με} \quad G(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt$$

είναι παραγωγίσιμη με

$$G'(x) = \frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt = f(g(x)) \cdot g'(x) - f(h(x)) \cdot h'(x), \forall x \in [0,+\infty).$$

Λύση

1.Κατ' αρχάς, η F είναι καλά ορισμένη, αφού $R(f) = [0,+\infty)$ και g συνεχής . Αφου η συνάρτηση g είναι συνεχής, έπεται ότι η συνάρτηση $G : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $G(y) = \int_0^y g(t)\,dt$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της. Επιπλέον, από το 1ο Θεμελιώδες Θεώρημα Απειροστικού Λογισμού, $G'(y) = g(y)$, $\forall y \in [0,+\infty)$. Τέλος, αφού $F(x) = \int_0^{f(x)} g(t)\,dt = G(f(x))$, έπεται από τον κανόνα της αλυσίδας, ότι $\forall x \in [0,+\infty)$

$$F'(x) = G'(f(x)) \cdot f'(x) = g(f(x)) \cdot f'(x).$$

2. Όπως και στο προηγούμενο ερώτημα, παρατηρούμε ότι η G είναι καλά ορισμένη. Τώρα, για $x \in [0,+\infty)$ σταθεροποιημένο, επιλέγουμε ένα $a \in [h(x), g(x)]$ και

$$G(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt = \int_{h(x)}^{a} f(t)\,dt + \int_a^{g(x)} f(t)\,dt = \int_a^{g(x)} f(t)\,dt - \int_a^{h(x)} f(t)\,dt$$

και, από το προηγούμενο αποτέλεσμα, έπεται ότι

$$G'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x) - f(h(x)) \cdot h'(x).$$

►Εφαρμογή
Να υπολογιστούν οι παράγωγοι των πιο κάτω συναρτήσεων:

(i) $F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \sin^2 t\, dt$

(ii) $G(x) = \int_{-x}^{x} \frac{dt}{1+t}$

►►Λύση

(i) Η F είναι παραγωγίσιμη και

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3} \sin^2 t\, dt \\ &= \sin^2(x^3)\cdot(x^3)' - \sin^2(x^2)\cdot(x^2)' \\ &= 3x^2\cdot\sin^2(x^3) - 2x\cdot\sin^2(x^2) \end{aligned}$$

(ii) Η G είναι παραγωγίσιμη και

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{d}{dx}\int_{-x}^{x} \frac{dt}{1+t} \\ &= \frac{1}{1+x}\cdot(x)' - \frac{1}{1+(-x)}\cdot(-x)' \\ &= \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

Άσκηση 18-63 από το[ΝΓΓ]

Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση, παραγωγίσιμη στο (a,b) με $f(a) = 0$, $f(b) = -1$ και $\int_a^b f = 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

Λύση
Κατ' αρχάς, το $\int_a^b f$ υπάρχει αφού η f είναι συνεχής συνάρτηση (στο $[a,b]$). Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F : [a,b] \to \mathbb{R} \quad \text{με} \quad F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

Τότε από το 1ο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού, η F είναι συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b) και αφού $F(a) = F(b) = 0$, από το Θεώρημα του Rolle θα υπάρχει (τουλάχιστον) ενα $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε $F'(\xi) = 0$, δηλ. τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$.
Τώρα, αφού $f(a) = 0 \neq -1 = f(b)$, έπεται ότι η f δεν είναι σταθερή. Εφαρμόζοντας τότε το Θεώρημα του Rolle για την f στο διάστημα $[a,\xi]$, έπεται ότι υπάρχει (τουλάχιστον) ενα $\xi_* \in (a,\xi)$ τέτοιο ώστε $f(\xi_*) = 0$.

Άσκηση 18-66 από το[ΝΓΓ]

Έστω η συνάρτηση $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^{1/x} \frac{dt}{1+t^2}.$$

Δείξτε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.

Λύση
Έχουμε για $x \in (0, +\infty)$,

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dx} &= \frac{d}{dx}\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} + \frac{d}{dx}\int_0^{1/x} \frac{dt}{1+t^2} \\
&= = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(1/x)^2} \cdot (1/x)' \\
&= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

και αρα, από το γνωστό μας Πόρισμα του ΘΜΤ[1], έχουμε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.

[1]Έστω f συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (a, b) τέτοια ώστε $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$. Τότε, υπάρχει πραγματική σταθερά c τέτοια ώστε $f(x) = c$, $\forall x \in (a, b)$, δηλ. η συνάρτηση f είναι σταθερή (στο (a, b)).

Βιβλιογραφία-Αναφορές

[**ΝΓΓ**] *Σ. Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος, Ε. Γιαννακούλιας*, Απειροστικός Λογισμός, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1999

[**Σοφ**] *Χ. Σοφοκλέους*, Εισαγωγικά Μαθηματικά Ι, ΙΙ (Σημειώσεις Διαλέξεων), Πανεπιστήμιο Κύπρου