Παραδείγματα 2.1.1.

1. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} 2x+y-w &= 4 \\ y+w+u &= 4 \\ x-z+2w &= 0 \end{aligned}$$

Λύση Το σύστημα είναι μη-ομογενές, 3 εξισώσεων με 5 αγνώστους (5 μεταβλητές, τις z, y, z, w, u):

$$\begin{aligned} 2x+y+0z-w+0u &= 4 \\ 0x+y+w+0z+u &= 4 \\ x+0y-z+2w+0u &= 0 \end{aligned}$$

και αρα θα έχει μη-τετριμμένες λύσεις. Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Κάνοντας γραμμοπράξεις στον πίνακα καταλήγουμε σε έναν κλιμακωτό πίνακα:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \to r_3 - \frac{1}{2}r_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{5}{2} & 0 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3 \to r_3 + \frac{1}{2}r_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1/2 & 0 \end{array}\right].$$

Ο τελευταίος πίνακας μας δίνει το ισοδύναμο σύστημα

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y-w &=& 4 \\ y+w+u &=& 4 \\ x-z+3w-\frac{1}{2}u &=& 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -\frac{y}{2}+\frac{w}{2}+2 \\ y &=& -w-u+4 \\ z &=& 3w-\frac{1}{2}u \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& w+\frac{u}{2} \\ y &=& -w-u+4 \\ z &=& 3w+\frac{1}{2}u \end{array}\right.$$

Οι βασικές μεταβλητές είναι οι x, y, z και ελεύθερες οι u, w. Επομένως, οι λύσεις του συστήματος θα είναι της μορφής

$$\left(w+\frac{u}{2}, -w-u+4, 3w-\frac{1}{2}u, w, u\right),\ u, w \in \mathbb{R}$$

δηλ. της μορφής

$$w(1,-1,3,1,0) + u\left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}, 0, 1\right) + (0,4,0,0,0),\ u, w \in \mathbb{R}$$

ή καλύτερα,

$$w(1,-1,3,1,0) + U\,(1,-2,1,0,2) + (0,4,0,0,0),\ U, w \in \mathbb{R}$$

Παρατηρήστε οτι η ειδική λύση $(0,4,0,0,0)$ του συστήματος προκύπτει για $u = 0 = w$.

2. Θα βρούμε το σύνολο λύσεων του συστήματος

$$\begin{aligned} -3x+y+4z &= -5 \\ x+y+z &= 2 \\ -2x+z &= -3 \\ x+y-2z &= 5 \end{aligned}$$

Ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος είναι ο

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

και ο επαυξημένος

$$(A|B) = \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{r_2 \to r_2 + 3r_1 \\ r_3 \to r_3 + 2r_1 \\ r_4 \to r_4 - r_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{r_3 \to r_3 - 2r_1 \\ r_4 \to \frac{1}{3} r_4}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_4 \to r_4 + r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Το (ισοδύναμο) σύστημα που αντιστοιχεί στον τελευταίο πίνακα που βρήκαμε είναι το

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ 2y + 3z &= 1 \\ z &= -1 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το (μη-ομογενές) αυτό σύστημα έχει πλήθος εξισώσεων ίσο με το πλήθος των αγνώστων και αρα έχει μοναδική λύση. Για να βρούμε τη λύση αυτή, ξεκινάμε π.χ. από την τελευταία εξίσωση που είναι ευκολότερο και καταλήγουμε στην $(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, -1)$.

3. Θα λύσουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} 2x + 4y - 3z &= -1 \\ 5x + 10y - 7z &= -2 \\ 3x + 6y + 5z &= 9 \end{aligned}$$

Έχουμε

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -3 & -1 \\ 5 & 10 & -7 & -2 \\ 3 & 6 & 5 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \to r_2 - \frac{2}{5} r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & 9 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3 \to r_3 - \frac{2}{3} r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 21 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \to r_3 - r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{array}\right].$$

Παρατηρούμε ότι το σύστημα δεν μπορεί να έχει λύση (ισοδύναμα η εξίσωση $0x + 0y + 0z = 20$ δεν έχει λύσεις, αφού $0 \neq 20$.).

4. Θα βρούμε την τιμή του $a \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το σύστημα

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 &= -1 \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 &= a \end{aligned}$$

να είναι συμβιβαστό.

Απάντηση

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & -5 & 1 & -1 \\ 4 & -7 & 1 & a \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 \to r_3 - 2r_1]{r_2 \to r_2 - \frac{3}{2}r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & -7 \\ 0 & -5 & -5 & a-8 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2 \to \frac{2}{3}r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & a-8 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \to r_3 + 5r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{array}\right].$$

Συνεπώς, για να είναι συμβιβαστό το σύστημα (δηλ. να έχει λύση), πρέπει $a+2=0 \Leftrightarrow a=-2$ και το σύστημα τότε γίνεται

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 &= -1 \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 &= -2 \end{aligned}$$

το οποίο είναι (από τον τελευταίο πίνακα που βγάλαμε) ισοδύναμο με το

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 4 \Leftrightarrow x_1 = \frac{x_2}{2} - \frac{3}{2}x_3 + 2 \Leftrightarrow x_1 = 3 - 2x_3 \\ x_2 + x_3 &= 2 \Leftrightarrow x_2 = -x_3 + 2 \end{aligned}$$

Έπεται ότι ελεύθερη μεταβλητή είναι η x_3 και βασικές οι x_1, x_2. Οι λύσεις του συστήματος (για $a=-2$) είναι της μορφής $(3-2x, 2-x),\ x \in \mathbb{R}$, δηλ.

$$(3,2,0) + x(-2,-1,1),\ x \in \mathbb{R}.$$

5. Θα βρούμε Έστω $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ τέτοιοι ώστε $AB + A - I_{n\times n} = 0$. Θα δείξουμε ότι το σύστημα $AX = B$ έχει μοναδική λύση και ακολούθως, θα βρούμε τη λύση αυτή συναρτήσει του πίνακα B.

Απάντηση Έχουμε

$$AB + A - I_{n\times n} = 0 \Rightarrow AB + A = I_{n\times n} \Rightarrow A(B + I_{n\times n}) = I_{n\times n}. \tag{2.5}$$

Επομένως, είναι αναγκαστικά $B + I_{n\times n} \neq 0$, διότ αν $B + I_{n\times n} = 0 \Rightarrow B = -I_{n\times n}$ και τότε θα έχουμε ότι $AB + A - I_{n\times n} = 0 \Rightarrow A(-I_{n\times n}) + A - I_{n\times n} = 0 \Rightarrow A - A - I_{n\times n} = 0 \Rightarrow I_{n\times n} = 0$, άτοπο. Συνεπώς, από την (2.5) έχουμε ότι $\det(A(B+I_{n\times n})) = \det(I_{n\times n}) = 1 \Rightarrow \det(A)\det(B+I_{n\times n}) = 1 \Rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$ και η σχέση σχέση (2.5) μας δίνει τότε οτι $A^{-1} = B + I_{n\times n}$. Το σύστημα $AX = B$ έχει μοναδική λύση αφού $\det(A) \neq 0$ και η λυση του είναι η $A^{-1}B$.

Ασκήσεις 2.1.1.

1. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x+3y+6z &= 25 \\ 2x+7y+14z &= 58 \\ 2y+5z &= 19 \end{aligned}$$

Απάντηση: Μοναδική λύση, την $(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 3)$.

2. Δίνεται το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 &= a \\ x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5 &= b \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5 &= c \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5 &= d, \end{aligned}$$

όπου $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

(i) Ποιές σχέσεις πρέπει να πληρούν τα a, b, c, d έτσι ώστε το σύστημα να είναι συμβιβαστό;
Απάντηση: $c+b-3a=0$, και $c+d-5a=0$.

(ii) Για τις τιμές που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να λυθεί το αντίστοιχο ομογενές σύστημα.
Απάντηση: $x(0,0,-2,1,0)+y(0,2,-2,1,0)+z(5,-6,0,0,1)$, $x, y, z \in \mathbb{R}$

3. Να λυθεί το πιο κάτω σύστημα με τη μέθοδο του αντίστροφου πίνακα:

$$\begin{aligned} x+3y+z &= 4 \\ 2x+2y+z &= -1 \\ 2x+3y+z &= 3 \end{aligned}$$

Υπόδειξη: Αν A ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος, δείξτε ότι είναι αντίστρέψιμος. Τότε $x = A^{-1}b$, όπου $x = (x, y, z)^T$ και $b = (4, -1, 3)^T$.