Σειρές Πραγματικών αριθμών

Ασκήσεις

Ιωακείμ Ι. Ιωάννης

Ασκήσεις 0.2.1.

1. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις πιο κάτω σειρές:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$. **(ii)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4^n}-\frac{2}{5^{n+1}}\right)$.

2. Δείξτε οτι $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=0$. Ακολούθως, εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

3. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις πιο κάτω σειρές:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{n!}$ **(ii)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!}{3^n}$.

4. Χρησιμοποιώντας το Κριτήριο Ολοκλήρωσης, αποφανθείτε ως προς τη σύγκλιση των ακόλουθων σειρών:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ **(ii)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^5}}$ **(iii)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+9n^2}$.

5. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις πιο κάτω σειρές

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-n^2}$ **(iii)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n^2-n}$ **(v)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n+3}{2n^2+1}$ **(iv)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+5}$ **(vi)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

6. Δείξτε οτι η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$ συγκλίνει απλά αλλά όχι απόλυτα.

7. Δείξτε οτι η σειρά $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(\ln n)^n}$ συγκλίνει.

8. Δείξτε ότι $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^\rho}<+\infty\iff\rho>1.$

9. **(i)** Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία τέτοια ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ συγκλίνει. Συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$;

   (ii) Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία με $a_n\geq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$ τέτοια ώστε $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ συγκλίνει. Δείξτε οτι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ συγκλίνει.

10. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln(n)}{\sqrt{n}}$.

11 Δείξτε οτι αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτα, τότε

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

12 Αποδείξτε ότι αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ συγκλίνουν, τότε

(i) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει απόλυτα και

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

[Ανισότητα Cauchy-Schwarz για σειρές]

(ii) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)^2$ συγκλίνει και

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

13 Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία με $a_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Τότε, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ συγκλίνει.

14 Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία με $a_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ να συγκλίνει. Αποδείξτε οτι και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ συγκλίνει.

Λύσεις

1 **(i)** Κατ' αρχάς, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ συγκλίνει γιατί συμπεριφέρεται το ίδιο ως προς τη σύγκλιση με τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, από το Κριτήριο Σύγκρισης:

$$\frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n^2}} \to 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$. Τώρα,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k(k+1)} &= \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \\
\Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \\
&\quad + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1,
\end{aligned}$$

επομένως,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

(ii) Έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n-1}} = \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} \overset{\Gamma.\Sigma.}{=} \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = 1$$

και

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5^{n+1}} &= \frac{2}{5}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{2}{5}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^n} - 1\right] \overset{\Gamma.\Sigma.}{=} \frac{2}{5} \cdot \left[\frac{1}{1-5} - 1\right] \\ &= \frac{2}{5}\left[-\frac{1}{4} - 1\right] = \frac{2}{5}\left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{2}{4} \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5^{n+1}} &= -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Επομένως, η $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4^n} - \frac{2}{5^{n+1}}\right)$ συγκλίνει και μάλιστα,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4^n} - \frac{2}{5^{n+1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5^{n+1}} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

2 $\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \to \ln(1) = 0.$

Τώρα, για κάθε $n \geq 1$ έχουμε $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n)$. Επομένως, για τα μερικά αθροίσματα S_n της σειράς έχουμε οτι

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} [\ln(k+1) - \ln(k)] \\ &= (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \ldots + (\ln(n+1) - \ln(n)) \\ &= \ln(n+1) \to \infty. \end{aligned}$$

Επομένως, $+\infty = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$, δηλ η σειρά αποκλίνει.

3 **(i)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!}$

Έχουμε

$$\rho := \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1.$$

Επομένως, από το Κριτήριο Λόγου Απόλυτης Σύγκλισης, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{n!}$ συγκλίνει απόλυτα, άρα και απλά.

(ii) Έχουμε

$$\rho := \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}(2(n+1)-1)!}{3^{n+1}}}{\frac{(-1)^n(2n+-1)!}{3^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2n(2n+1)}{3} = \infty$$

και άρα, από το Κριτήριο Λόγου Απόλυτης Σύγκλισης έχουμε οτι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!}{3^n}$ αποκλίνει.

4 **(i)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ με $x \mapsto f(x) := \frac{1}{x}$. Είναι συνεχής και φθίνουσα (στο πεδίο ορισμού της) και

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{L\to\infty} \int_1^{L} \frac{dx}{x} = +\infty$$

και αρα, από το Κριτήριο Ολοκλήρωσης, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^5}}$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ με $x \mapsto f(x) := \frac{1}{x^{5/2}}$. Είναι συνεχής και φθίνουσα (στο πεδίο ορισμού της) και

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{5/2}}dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^{n} \frac{dx}{x^{5/2}} < +\infty$$

και αρα, από το Κριτήριο Ολοκλήρωσης, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^5}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}}$ συγκλίνει.

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+9n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(3n)^2}.$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ με $x \mapsto f(x) := \frac{1}{1+(3x)}$. Η f είναι συνεχής και φθίνουσα. Επίσης,

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} f(x)dx &= \int_1^{\infty} \frac{dx}{1+(3x)^2} \\
&= \frac{1}{3} \lim_{L\to\infty} [\arctan(3x)]_{x=1}^{L} \\
&= \frac{1}{3} \lim_{L\to\infty} [\arctan(3L) - \arctan(3)] \\
&= \frac{1}{3} \left[\frac{\pi}{3} - \arctan(3)\right] < \infty.
\end{aligned}$$

Επομένως, από το Κριτήριο Ολοκλήρωσης, η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+9n^2}$ συγκλίνει.

5 **(i)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ με $x \mapsto f(x) := xe^{-x^2}$. Η f είναι συνεχής και φθίνουσα. Επίσης,

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} xe^{-x^2}dx &= \lim_{L\to\infty} \int_1^{L} xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2} \lim_{L\to\infty} \left[e^{-x^2}\right]_1^L \\
&= -\frac{1}{2} \lim_{L\to\infty} \left[e^{-L^2} - e^{-1}\right]_1^L = \frac{e}{2} < \infty
\end{aligned}$$

και άρα από το Κριτήριο Ολοκλήρωσης, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ συγκλίνει.

(ii) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+3}{2n^2+1}$ αποκλίνει, αφού $\frac{n^2+n+3}{2n^2+1} \to \frac{1}{2} \neq 0$.

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n^2-n}$

Έχουμε

$$\frac{1}{5n^2-n} \leq \frac{1}{5n^2-n^2},\ \forall n \in \mathbb{N},$$

επομένως,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n^2-n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n^2-n^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

και άρα η σειρά συγκλίνει από το Κριτήριο Σύγκρισης.
Διαφορετικά, αφού

$$\left| \frac{\frac{1}{5n^2-n}}{\frac{1}{n^2}} \right| \to 1$$

έπεται οτι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n^2-n} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, έχουμε οτι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n^2-n}$ συγκλίνει.

(iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+5}$

Έχουμε $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{3^n+5} < \frac{1}{3^n}.$$

Επομένως,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+5} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \overset{\text{Γ.Σ.}}{=} \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} < \infty.$$

Άρα, από το Κριτήριο σύγκρισης, η σειρά συγκλίνει.

(v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$

έχουμε

$$\left| \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} \right| = \frac{3}{n+1} \to 0 < 1$$

και άρα η σειρά συγκλίνει.

(vi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$

Έχουμε

$$\left| \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} \right| = (n+1)\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} < 1$$

και άρα σειρά συγκλίνει.

6 Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ συγκλίνει από το Κριτήριο Εναλλάσουσας σειράς του Leibniz. Πράγματι, $a_n = \frac{\ln n}{n} \geq 0, \ \forall n \geq 1$ και μάλιστα η αντίστοιχη ακολουθία $(a_n)_n$ είναι (τελικά) φθίνουσα. Πράγματι, για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ είναι

$$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} \leq 0, \ \forall x \geq e.$$

Αλλά, η σειρά δε συγκλίνει απόλυτα, δηλ. η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ αποκλίνει.
1ος τρόπος:
Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f : [1,\infty) \to \mathbb{R} \quad \text{με} \quad f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

Όπως είδαμε πιο πάνω, η f είναι φθίνουσα για $x \geq e$. Επίσης,

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{\ell\to+\infty} \int_1^{\ell} \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{\ell\to+\infty} \frac{\ln^2(\ell)}{2} = +\infty$$

και το συμπέρασμα έπεται από το Κριτήριο Ολοκλήρωσης.
2ος τρόπος:
Αφού $\ln x \geq 1$ για $x \geq e$, έπεται οτι

$$\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}, \quad \text{για } n \geq 3$$

και άρα

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \geq \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Έπεται το ζητούμενο, αφού η σειρά $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει.

7 Θα δείξουμε οτι η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(\ln n)^n}$ συγκλίνει απόλυτα, άρα και απλά. Δηλ. θα δείξουμε οτι η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$ συγκλίνει. Αφού $\ln n > 2$ για $n > 9$, έπεται οτι

$$\frac{1}{(\ln n)^n} < \frac{1}{2^n}, \quad \text{για } n > 9$$

και άρα

$$\sum_{n=9}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n} < \sum_{n=9}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty,$$

αφού η $\sum_{n=9}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ είνα Γ.Σ..

8 Για $\rho = 1$, η σειρά είναι $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ η οποία αποκλίνει, από το κριτήριο Ολοκλήρωσης, αφού η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ είναι φθίνουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$ (αφού $f'(x) = -\frac{1+\ln x}{(x \ln x)^2} < 0$ για $x < 0$) και το ολοκλήρωμα

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{\ell \to +\infty} \int_2^{\ell} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{\ell \to +\infty} [\ln(\ln x)]_{x=2}^{\ell} = +\infty.$$

Για $\rho \neq 1$, έχουμε οτι η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^\rho}$ είναι φθίνουσα στο διάστημα $(e^{-\rho}, +\infty)$ (αφού $f'(x) = \frac{-(\rho+\ln x)}{x^2(\ln x)^{\rho+1}} < 0$ για $x > e^{-\rho}$) και

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\rho} = \lim_{\ell \to +\infty} \int_2^{\ell} \frac{dx}{x(\ln x)^\rho}.$$

Αλλά,

$$\int_2^{\ell} \frac{dx}{x(\ln x)^\rho} = \left[\frac{\ln^{1-\rho} x}{1-\rho}\right]_{x=2}^{\ell} = \frac{\ln^{1-\rho}(2) - \ln^{1-\rho}(\ell)}{1-\rho}$$

και άρα,

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\rho} = \lim_{\ell \to +\infty} \frac{\ln^{1-\rho}(\ell) - \ln^{1-\rho}(2)}{1-\rho} = \begin{cases} +\infty, & \rho < 1 \\ \frac{\ln^{\rho-1}(2)}{\rho-1} < +\infty, & \rho > 1 \end{cases}$$

και άρα, από το Κριτήριο Ολοκλήρωσης, η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\rho}$ συγκλίνει για $\rho > 1$ και αποκλίνει για $\rho < 1$.

9 **(i)** Ισχύει

$$\frac{1}{(\ln n)^k} > \frac{1}{n}, \quad \text{για} \quad n = N \text{ αρκετά μεγάλο}$$

και άρα

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^k} > \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n}$$

και άρα, αφού η σειρά $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει και η σειρά $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^k}$ αποκλίνει.

(ii) Αφού $\ln x \geq 1$ για $x \geq e$, έπεται οτι $\frac{1}{\ln n} \leq 1$, για $n \geq 3$, και άρα

$$\frac{1}{n^2 \log n} \leq \frac{1}{n^2}, \quad \text{για}\, n \geq 3.$$

Συνεπώς,

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log n} \leq \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

10 Η σειρά συγκλίνει από το Κριτήριο του Leibniz για εναλλάσσουσες σειρές. Πράγματι, αν $a_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$, τότε, $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Επίσης,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\sqrt{n}}{n} = 0,$$

όπου η δεύτερη ισότητα έπεται από τον κανόνα του deL'Hospital. Μένει να δείξουμε οτι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα. Αυτό μπορεί να γίνει είτε με επαγωγή στο n είτε ως εξής: ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$. Τότε,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2 - \ln x}{x\sqrt{x}}.$$

Για $x > 0$ έχουμε οτι $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2 - \ln x < 0 \Leftrightarrow x > e^2$. Έτσι, η f είναι (γνησίως) φθίνουσα στο $(e^2, +\infty)$. Άρα, η ακολουθία $(a_n)_n$ είναι τελικά φθίνουσα (για $n \geq [e^2] + 1$, είναι $a_n > a_{n+1}$).

11 Θέτουμε $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$|S_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_n| \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Επομένως,

$$\lim_{n\to\infty} |S_n| \leq \lim_{n\to\infty} S_n$$

και από τη συνέχεια της συνάρτησης απόλυτη τιμή, έπεται οτι

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

12 **(i)** Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $|a_n b_n| \leq 2|a_n b_n| \leq |a_n|^2 + |b_n|^2 = a_n^2 + b_n^2$. Επομένως,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2). \tag{7}$$

Αλλά, από υπόθεση, οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ συγκλίνουν, άρα θα συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ και μάλιστα $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$. Συνεπώς, από την

(7) και το Κριτήριο σύγκρισης έπεται οτι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει απόλυτα. Τώρα, από την προηγούμενη άσκηση έχουμε οτι

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|.$$

Τέλος, έχουμε οτι για $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $2x_k y_k \leq x_k^2 + y_k^2,\ k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Για

$$x_k := \frac{|a_k|}{\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{και} \quad y_k := \frac{|b_k|}{\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}},\ k \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Αθροίζοντας τους πιο πάνω όρους έχουμε:

$$\frac{2\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k|}{\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_k^2}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_k^2} + \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_k^2}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_k^2} = 2.$$

Συνεπώς,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \lim_{n\to\infty} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

και άρα,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(ii) Ισχύει οτι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $(a_n + b_n)^2 = a_n^2 + b_n^2 + 2a_n b_n$, άρα $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty}[a_n^2 + b_n^2 + 2a_n b_n]$ και αφού οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνουν έπεται οτι και η $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)^2$ συγκλίνει και μάλιστα

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \\
&\overset{(i)}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 + 2\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 \\
\Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)^2\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

13 $(i) \Rightarrow (ii)$ Θέτουμε $b_n := \frac{1+a_n}{,}$ $n \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_n}{\frac{a_n}{1+a_n}} = 1 + a_n,\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Από υπόθεση, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει άρα $a_n \to 0$ και συνεπώς από την (8), έπεται οτι $\frac{a_n}{b_n} \to 1$. Αν υποθέσουμε λοιπόν οτι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ αποκλίνει, τότε από το Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει, άτοπο.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ συγκλίνει, έπεται οτι $\frac{a_n}{1+a_n} \to 0$ και αφού

$$\frac{a_n}{1+a_n} = \underbrace{\frac{1+a_n}{1+a_n}}_{=1} - \frac{1}{1+a_n},$$

έχουμε ότι $\frac{1}{1+a_n} \to 1 \Rightarrow a_n \to 0$. Τώρα, $\frac{a_n}{\frac{a_n}{1+a_n}} \to 1$ και η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ συγκλίνει, από το Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει.

14 Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz για σειρές (προτελευταία άσκηση) έχουμε οτι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{9}$$

Αλλά, από υπόθεση, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ συγκλίνει και ως γνωστόν και η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Έστω λοιπόν οτι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = M_1 < \infty$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = M_2 < \infty$. Άρα, η (9) μας δίνει

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{M_1 M_2} < \infty.$$