Ο κανόνας του Cramer

Θεώρημα 2.1.2. *(Κανόνας του Cramer)*

Αν ο $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ έχει μη μηδενική ορίζουσα, τότε η μοναδική λύση $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ του συστήματος $AX = B$ δίνεται από τον τύπο

$$x_i = \frac{1}{\det A}\det(A_{(A_i \leftrightarrow K)}), \quad 1 \le i \le n, \tag{2.6}$$

όπου $A_{A_i \leftrightarrow K}$ είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον A αν αντικαταστήσουμε την $i-$στήλη του με τον B.

Απόδειξη. Αφού $\det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$. Αφού $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$. Όμως,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{Adj}(A),$$

συνεπώς,

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\det A}\operatorname{Adj}(A)B.$$

Συνεπώς, αν $\operatorname{Adj}(A) = (\beta_{i,j})_{i,j=1}^n$ και $B = (b_{i,j})_{i,j=1}^n$, τότε

$$x_i = \frac{1}{\det A}\sum_{j=1}^n \beta_{i,j}b_j = \frac{1}{\det A}\sum_{j=1}^n A_{i,j}bj,$$

όπου $A_{i,j} =$ ο i,j συμπαράγοντας του A. Όμως, το $\frac{1}{\det A}\sum_{j=1}^n A_{i,j}bj =$ το ανάπτυγμα κατά Laplace ως προς την $i-$στήλη του

$$\frac{1}{\det A}\det(A_{B_i \leftrightarrow A_i}),$$

απ όπου έπεται το ζητούμενο. □

Παρατήρηση: Ο Κανόνας του Cramer[1] είναι εύχρηστος όταν $n = 2, 3$ γιατί για $n > 3$ οι ορίζουσες είναι πίο χρονοβόρες στον υπολογισμό τους. και συνεπώς έχουν μεγάλη υπολογιστική πολυπλοκότητα. Αρκετά βιβλία αναφέρουν τον κανόνα του Cramer στις διαστάσεις $n = 2, 3$ μόνο και για το λόγο αυτό θα διατυπώσουμε τη μορφή που λαμβάνει ο κανόνας στις περιπτώσεις αυτές:

Θεώρημα 2.1.3. *(Κανόνας του Cramer-n=2)*

Έστω το 2×2 γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

Θέτουμε

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Τότε, αν $D \neq 0$, η (μοναδική) λύση του συστήματος είναι η $(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right)$.

[1] Gabriel Cramer-Ελβετός Μαθηματικός (1704-1752)

Παραδείγματα

Θα διερευνήσουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} \lambda^2 x - 2y &= \lambda \\ -\lambda x + y &= 1 - \lambda \end{aligned}$$

για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Είναι

$$D = \begin{vmatrix} \lambda^2 & -2 \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2)$$

και αρα για $\underline{\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}}$, το σύστημα έχει μοναδική λύση, τον οποία θα βρούμε με χρήση του κανόνα του Cramer:

$$D_x = \begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ 1-\lambda & 1 \end{vmatrix} = \lambda + 2(1-\lambda) = 2 - \lambda, \quad D_y = \begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ -\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(2-\lambda).$$

και αρα η (μοναδική) λύση του συστήματος είναι η $(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = \left(-\frac{1}{\lambda}, -\lambda\right)$.

$\underline{\text{Για } \lambda = 0,}$ το σύστημα που προκύπτει είναι το $\begin{cases} y &= 0 \\ y &= 1 \end{cases}$ το οποίο είναι μη-συμβιβαστό.

$\underline{\text{Για } \lambda = 2,}$ το σύστημα που προκύπτει είναι το $\begin{cases} 2x - y &= 1 \\ -2x + y &= -1 \end{cases}$, δηλ. $2x - y = 1$ το έχει άπειρες λύσεις, της μορφής $(x, y) = (x, 2x - 1)$, δηλ. ο χώρος λύσεων του συστήματος είναι ο

$$S = \langle (1, 2) \rangle + (0, -1).$$

Θεώρημα 2.1.4. *(Κανόνας του Cramer-n=3)*

Έστω το γραμμικό 3×3 σύστημα

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{31}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{32}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned}$$

Θέτουμε

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

και

$$D_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Τότε, αν $D \neq 0$, η (μοναδική) λύση του συστήματος είναι η

$$(x, y, z) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}, \frac{D_z}{D}\right).$$

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x+y+z &= 2 \\ 2y+3z &= 1 \\ x+2y+3z &= 4 \end{aligned}$$

Ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος είναι ο $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ και $D := \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση την οποία θα βρούμε με τον Κανόνα του Cramer:

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3, \quad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -4, \quad D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 3$$

Άρα, η (μοναδική) λύση του συστήματος είναι η

$$(x,y,z) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}, \frac{D_z}{D}\right) = (3,-4,3).$$

Να διερευνηθεί και λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} \lambda x+y+z &= 1 \\ x+\lambda y+z &= \lambda \\ x+y+\lambda z &= \lambda^2 \end{aligned}$$

για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Το σύστημα είναι 3×3, $(n = m = 3)$. Ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος είναι ο $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow D := \det A = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+2)$ και

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda & 1 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)(\lambda-1)^2, \quad D_y = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2$$

και

$$D_z = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda^2 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2(\lambda-1)^2$$

Συνεπώς, αν $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$, τότε από τον κανόνα του Cramer έπεται ότι έχουμε μοναδική λύση:

$$(x,y,z) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}, \frac{D_z}{D}\right) = \left(-\frac{\lambda+1}{\lambda+2}, \frac{1}{\lambda+2}, \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}\right).$$

Περίπτωση 2. Αν $\lambda = -2$, τότε, ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right]$$

ο οποίος είναι γραμμοισοδύναμος με τον

$$[A'|b'] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

και αρα, αφού $\text{rank}[A'] = 2 \neq 3 = \text{rank}[A'|b']$, το σύστημα είναι μη-συμβιβαστό.

Περίπτωση 3. Αν $\lambda = 1$, τότε, ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

ο οποίος είναι γραμμοισοδύναμος με τον

$$[A'|b'] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

και αρα το σύστημα καταρρέει σε μια και μόνο εξίσωση, την $x+y+z = 1$. Έχουμε λοιπόν 2 ελεύθερες μεταβλητές και μια βασική: αν π.χ. $x = -y - z - 1$ και η βασική μεταβλητή είναι η x και οι ελεύθερες οι y, z, τότε θέτοντας π.χ. $z = 0 = y$, παίρνουμε $x = 1$ και άρα μια μερική λύση του συστήματος είναι η $(1, 0, 0)$. Το αντίστοιχο ομογενές σύστημα είναι το $x = -y - z$ το οποίο έχει λύσεις της μορφής $(-y-z, y, z)$, $y, z \in \mathbb{R}$. Συνεπώς, οι λύσεις του συστήματος είναι της μορφής $(-y-z, y, z) + (1, 0, 0)$, δηλ. $(1 - y - z, y, z)$, όπου $y, z \in \mathbb{R}$.

2.1.4 Ασκήσεις

1. Να διερευνηθεί και να λυθεί το πιο κάτω σύστημα για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 2x + \lambda y &= 4 \\ \lambda x + 2y &= \lambda^2 \end{aligned}$$

Απάντηση: Αν $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση, την $(x, y) = \left(\frac{\lambda^2+2(\lambda+2)}{\lambda+2}, -\frac{2\lambda}{\lambda+2}\right)$. Για $\lambda = 2$, ο χώρος λύσεων του συστήματος είναι ο $\langle(1, -1)\rangle + (0, 2)$ και για $\lambda = -2$, ο χώρος λύσεων του συστήματος είναι ο $\langle(1, 1)\rangle + (0, -2)$.

2. Για τα πιο κάτω συστήματα, να ελέγξετε αν έχουν ή όχι μοναδική λύση και στην περίπτωση που έχουν, να την προσδιορίσετε:

(i)

$$\begin{aligned} 3x + y + z &= 1 \\ 5x + 3y + 3z &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} 2x + 3y + w &= 1 \\ 3x - y + 2w &= 4 \\ 3x + y + w &= 5 \end{aligned}$$

3. Να βρεθούν όλες οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το πιο κάτω σύστημα έχει μοναδική λύση:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 2 \\ x + 2y + z &= 3 \\ x + y + (\lambda^2 - 5) &= \lambda \end{aligned}$$