Ασκήσεις στα γραμμικά συστήματα

Θεωρούνται γνωστά:

(i) Ο κανόνας του Cramer (ii) Μέθοδος απαλοιφής Gauss-Jordan (iii) Ιδιότητες Οριζουσών

(1)

Να λυθεί το παρακάτω σύστημα για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x - y + z &= 3 \\ x + y + \lambda z &= 1 \\ x + \lambda y + z &= \lambda \end{aligned}$$

Λύση
Το σύστημα γράφεται ως $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, όπου

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Είναι

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \end{vmatrix} \overset{R_3 \to R_3 - R_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \overset{R_1 \to R_1 - R_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 - \lambda \\ 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1) \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 - \lambda \\ 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{ανάπτυγμα ως προς} \\ \text{1η στήλη}}}{=} -(\lambda - 1) \begin{vmatrix} -2 & 1 - \lambda \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -(\lambda - 1)(\lambda + 1) \end{aligned}$$

Έτσι, $\det(A) \neq 0 \iff \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ και αρα, το σύστημα έχει μοναδική λύση $\iff \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

την οποία και θα βρούμε με χρήση του κανόνα του Cramer:

$$
\begin{aligned}
D_x &= \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1 \end{vmatrix} \overset{C_1 \to C_1 - C_2}{=} \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 1 \end{vmatrix} \\
&\overset{\substack{\text{ανάπτυγμα ως προς} \\ \text{1η στήλη}}}{=} 4 \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 4(1-\lambda^2) = 4(1-\lambda)(1+\lambda)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_y &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \end{vmatrix} \overset{C_1 \to C_1 - C_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1-\lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 1 \end{vmatrix} \\
&\overset{\substack{\text{ανάπτυγμα ως προς} \\ \text{1η στήλη}}}{=} -(1-\lambda) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(3-\lambda) \\
&= -(\lambda-1)(\lambda-3)
\end{aligned}
$$

και

$$
\begin{aligned}
D_z &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \end{vmatrix} \overset{R_2 \to R_2 - R_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 1 & \lambda & \lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \end{vmatrix} \overset{R_1 \to R_1 - R_3}{=} (1-\lambda) \begin{vmatrix} 0 & -1-\lambda & 3-\lambda \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \end{vmatrix} \\
&\overset{\substack{\text{ανάπτυγμα ως προς} \\ \text{1η στήλη}}}{=} (1-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3-\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4(1-\lambda) = 4(\lambda-1)
\end{aligned}
$$

Άρα, η (μοναδική) λύση του συστήματος είναι η

$$
\boxed{(x,y,z) = \left(\frac{D_x}{\det(A)}, \frac{D_y}{\det(A)}, \frac{D_z}{\det(A)}\right) = \left(4, \frac{3-\lambda}{\lambda+1}, -\frac{4}{\lambda+1}\right)}
$$

Αν τώρα $\lambda = 1$, το αντίστοιχο σύστημα είναι το $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Εκτελούμε γραμμοπράξεις στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]
$$

και έτσι, έχουμε 1 ελεύθερη μεταβλητή (την z), αρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, οι οποίες είναι της μορφής $(x,y,z) = (2-t, -1, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Αν $\lambda = -1$, το αντίστοιχο σύστημα είναι το $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Εκτελούμε γραμμοπράξεις στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
$$

και έτσι, το σύστημα είναι μη-συμβιβαστό.