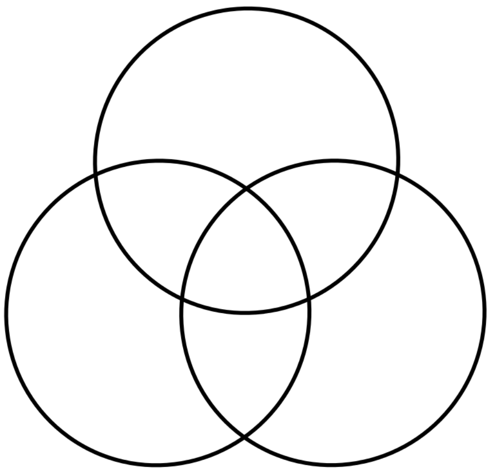
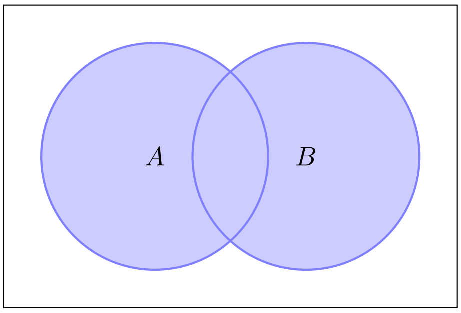
Σύνολα

$\aleph_0$



$A \cup B$

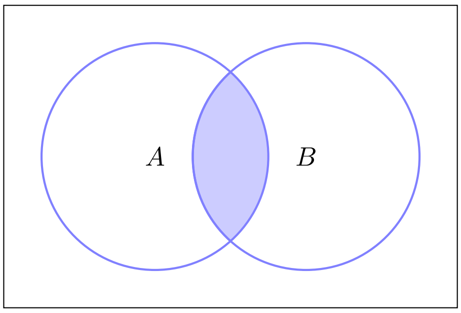


Η *ένωση* των A και B είναι το σύνολο

$$A \cup B = \{x \in \Omega \,|\, (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

Δηλ. $A \cup B$ είναι το σύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία του A, ή από τα στοιχεία του B ή και από τα στοιχεία και των δύο.

$A \cap B$

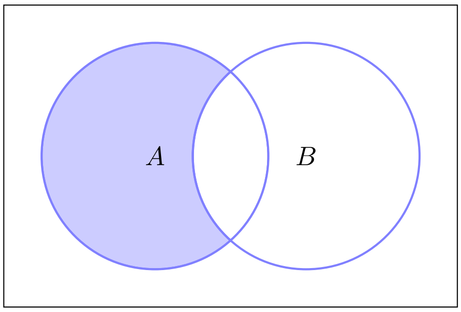


Η *τομή* των A και B είναι το σύνολο

$$A \cap B = \{x \in \Omega \,|\, (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

Δηλ. $A \cap B$ είναι το σύνολο που αποτελείται από τα κοινά στοιχεία των A και B.

$A - B$

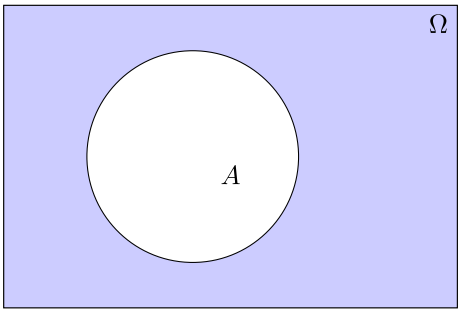


Η *διαφορά* των A και B είναι το σύνολο

$$A - B = \{x \in \Omega \,|\, (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$

Δηλ. $A - B$ είναι το σύνολο που αποτελείται από εκείνα τα στοιχεία του A που δεν ανήκουν στο B.

A^c



Το συμπλήρωμα του A είναι το σύνολο

$$A' \equiv A^C = \{x \in \Omega \,|\, a \notin A\}.$$

Δηλ. A' είναι το σύνολο που αποτελείται από εκείνα τα στοιχεία του Ω τα οποία δεν ανήκουν στο A.

Παράδειγμα **0.2.1.** *Αν για τα σύνολα A, B, C ισχύει $A \subseteq B \subseteq C \subseteq A$, τότε $A = B = C$.*

Θα δείξουμε ότι $A = B$: Από υπόθεση, είναι $A \subseteq B$. Επίσης, αφού $B \subseteq C \subseteq A$, θα είναι ότι και $B \subseteq A$. Άρα,

$$\begin{cases} A \subseteq B \\ B \subseteq A \end{cases} \Rightarrow A = B$$

Θα δείξουμε ότι $A = C$: Από υπόθεση, είναι $A \subseteq C$. Επίσης, αφού $A \subseteq B \subseteq C$, θα είναι ότι και $A \subseteq C$. Άρα,

$$\begin{cases} C \subseteq A \\ A \subseteq C \end{cases} \Rightarrow A = C$$

Από τα πιο πάνω έπεται ότι $A = B = C$.

Παράδειγμα **0.2.2.** *Δίνονται τα σύνολα:*

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{N} \,|\, x \leq 12\} \\ B &= \{x \in \mathbb{N} \,|\, x \leq 8\} \\ C &= \{x \in \mathbb{N} \,|\, 3 \leq x \leq 11\} \end{aligned}$$

Να βρείτε τα σύνολα

(i) $A \cap B$ *(ii)* $(A \cap B) \cap C$ *(iii)* $(A \cap B) \cup C$ *(iv)* $(C \cup B) \cap C$

Λύση

(i) $A \cap B = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x \leq 12\} \cap \{x \in \mathbb{N} \,|\, x \leq 8\}$
Έχουμε:

$$x \in A \cap B \iff \begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ x \leq 12 \\ x \leq 8 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ x \leq 8 \end{cases} \iff x \in B$$

Άρα, $A \cap B = B$. Αναμενόμενο, αφού $B \subset A$.

(ii) Από πρίν, $(A \cap B) \cap C = B \cap C$.
Έχουμε:

$$\begin{aligned} x \in B \cap C &\iff \begin{cases} x \in \ B \\ x \in C \end{cases} \iff \begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ x \leq 12 \\ x \leq 8 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ x \leq 8 \\ 3 \leq x \leq 11 \end{cases} \\ &\iff x \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8\} \end{aligned}$$

Άρα, $(A \cap B) \cap C = B \cap C = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

(iii) Από πρίν, $(A \cap B) \cup C = B \cup C$.
Έχουμε:

$$x \in B \cup C \iff \begin{cases} x \in \ B \\ \text{ή} \\ x \in C \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq 8, \, x \in \mathbb{N} \\ \text{ή} \\ x \leq 12, \, x \in \mathbb{N} \end{cases} \iff \begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ x \leq 11 \end{cases}$$

Άρα,

$$(A \cap B) \cup C = B \cup C = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x \leq 11\}$$

(iv) Από πρίν, $C \cup B = B \cup C = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x \leq 11\}$.
Τότε, εύκολα βλέπουμε ότι

$$(C \cup B) \cap C = \{x \in \mathbb{N} \,|\, 3 \leq x \leq 11\} = C.$$

Παράδειγμα **0.2.3.** *Θα δείξουμε ότι* $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$.

$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ και αρα $A \cap B \subseteq A$. Επίσης, $x \in A \Rightarrow (x \in A) \vee (x \in B) \Rightarrow x \in A \cup B$ και αρα $A \subseteq A \cup B$.

0.2.1 Ιδιότητες

Θα δούμε (και θα αποδείξουμε αναλυτικά) ορισμένες χρήσιμες ιδιότητες που ικανοποιούν η (συνολοθεωρητική) διαφορά, η τομή, η ένωση και το συμπλήρωμα συνόλων. Ολα τα σύνολα που θεωρούμε ευρίσκονται σε ενα καθολικό σύνολο Ω.

Σχόλιο. *Στην απόδειξη μερικών από τις πιο κάτω ιδιότητες, χρησιμοποιούνται εναλλακτικοί τρόποι απόδειξης, οι οποίοι είναι ισοδύναμοι μεταξύ τους. Κάθε τρόπος έχει το δικό του πλεονέκτημα ως προς τη βαρύτητα των επιχειρημάτων που θα χρησιμοποιήσετε και αντανακλά τη σημασία της επιχειρηματολογίας που χρησιμοποιείται.*

Στοιχειώδεις ιδιότητες τομής/ένωσης και συμπληρώματος

(i) $A \cap B \subseteq A$ και $A \cap B \subseteq B$.

(ii) $(A^c)^c = A$

(iii) $\emptyset^c = \Omega$

(iv) $\Omega^c = \emptyset$

(v) $A \cup A^c = \Omega$

(vi) $A \cap A^c = \emptyset$

Απόδειξη.

(i) $x \in A \cap B \Longrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B) \Longrightarrow x \in A$. Εντελώς όμοια και για το δεύτερο.

(ii) $a \in A \Longrightarrow a \notin A^c \Longrightarrow a \in (A^c)^c$ και αρα $A \subseteq (A^c)^c$.
$a \in (A^c)^c \Longrightarrow a \notin A^c \Longrightarrow a \in A$ και αρα $(A^c)^c \subseteq A$.
Από τα πιο πάνω, έπεται ότι $(A^c)^c = A$.
Εναλλακτικά:

$$\begin{aligned}(A^c)^c &= \{x \in \Omega \,|\, x \notin A^c\} = \{x \in \Omega \,|\, x \in \Omega \setminus A\} \\ &= \{x \in \Omega \,|\, x \in \Omega \setminus (\Omega \setminus A)\} = \{x \in \Omega \,|\, x \in A\} = A\end{aligned}$$

(iii) $\emptyset^c = \{x \in \Omega \,|\, x \notin \emptyset\} = \Omega$.

(iv) $\Omega^c = \Omega - \Omega = \{x \in \Omega \,|\, x \notin \Omega\} = \emptyset$

(v) $A \cup A^c = \{x \in \Omega \,|\, x \in A \quad \text{ή} \quad x \in A^c\} = \{x \in \Omega \,|\, x \in \Omega\} = \Omega$.

(vi) $A \cap A^c = \{x \in \Omega \,|\, x \in A \quad \text{και} \quad x \in A^c\} = \emptyset$

□

Και άλλες ιδιότητες της τομής/ένωσης και του συμπληρώματος

(i) $A \cup A = A$

(ii) $A \cap A = A$

(iii) $A \cup B = B \cup A$

(iv) $A \cap B = B \cap A$

(v) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

(vi) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(vii) $A \cup \emptyset = A$

(viii) $A \cap (A \cap B) = A$

(ix) $A \cup (A \cap B) = A$

(x) $A \setminus B = A \cap B^c$

(xi) $A \setminus B = B^c \setminus A^c$

Απόδειξη

(i) Θα δείξουμε πρώτα ότι $A \cup A \subseteq A$.
$a \in A \cup A \Longrightarrow (a \in A) \vee (a \in A)$
$\Longrightarrow a \in A$.
Θα δείξουμε τώρα ότι $A \subseteq A \cup A$.
$a \in A \Longrightarrow (a \in A) \Longrightarrow (a \in A) \vee (x \in A)$

(ii) Θα δείξουμε πρώτα ότι $A \cap A \subseteq A$.
$a \in A \cap A \Longrightarrow (a \in A) \wedge (x \in A) \Longrightarrow (a \in A)$
Θα δείξουμε τώρα ότι $A \subseteq A \cap A$.
$a \in A \Longrightarrow (a \in A) \Longrightarrow (a \in A) \wedge (a \in A)$

(iii) Θα δείξουμε πρώτα ότι $A \cup B \subseteq B \cup A$.
$a \in A \cup B \Longrightarrow (a \in A) \vee (a \in B)$
$\Longrightarrow (a \in B) \vee (a \in A) \Longrightarrow a \in B \cup A$.
Θα δείξουμε τώρα ότι $B \cup A \subseteq A \cup B$.
$a \in B \cup A \Longrightarrow (a \in B) \vee (a \in A)$
$\Longrightarrow (a \in A) \vee (a \in B)$
$\Longrightarrow a \in A \cup B$.

(iv) Θα δείξουμε πρώτα ότι $A \cap B \subseteq B \cap A$.
$a \in A \cap B \Longrightarrow (a \in A) \wedge (a \in B)$
$\Longrightarrow (a \in B) \wedge (a \in A)$
$\Longrightarrow a \in B \cap A$.
Θα δείξουμε τώρα ότι $B \cap A \subseteq A \cap B$.
$a \in B \cap A \Longrightarrow (a \in B) \wedge (a \in A)$
$\Longrightarrow (a \in A) \wedge (a \in B)$
$\Longrightarrow a \in A \cap B$.

(v) Θα δείξουμε πρώτα ότι $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$.
$a \in A \cup (B \cup C) \Longrightarrow (a \in A) \vee (a \in B \cup C) \Longrightarrow (a \in A) \vee ((a \in B) \vee (a \in C)) \Longrightarrow ((a \in A) \vee (a \in B)) \vee (a \in C) \Longrightarrow a \in (A \cup B) \cup C$.
Θα δείξουμε τώρα ότι $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$.
$a \in (A \cup B) \cup C \Longrightarrow ((a \in A) \vee (a \in B)) \vee (a \in C) \Longrightarrow (a \in A) \vee ((a \in B) \vee (a \in C)) \Longrightarrow (a \in A) \vee ((a \in B) \vee (a \in C)) \Longrightarrow a \in A \cup (B \cup C)$.

(vi) Ακριβώς όπως και στο προηγούμενο.

(vii) $a \in A \cup \emptyset \Longleftrightarrow (a \in A) \vee (a \in \emptyset) \Longleftrightarrow a \in A$

(viii) Θα δείξουμε πρώτα ότι $A \cap (A \cap B) \subseteq A$.
$a \in A \cap (A \cap B) \Longrightarrow (a \in A) \wedge (a \in A \cap B) \Longrightarrow a \in A$
Θα δείξουμε τώρα ότι $A \subseteq A \cap (A \cap B)$.
$a \in A \Longrightarrow a \in A \cap B \Longrightarrow (a \in A) \wedge (a \in A \cap B) \Longrightarrow a \in A \cap (A \cap B)$.

(ix) Θα δείξουμε πρώτα ότι $A \cup (A \cap B) \subseteq A$.
$a \in A \cup (A \cap B) \Longrightarrow (a \in A) \vee (a \in A \cap B)$
$\Longrightarrow (a \in A) \vee ((a \in A) \wedge (a \in B))$
$\Longrightarrow a \in A$.
Θα δείξουμε τώρα ότι $A \subseteq A \cup (A \cap B)$.
$a \in A \Longrightarrow (a \in A) \cup (a \in A \cup B)$
$\Longrightarrow a \in A \cup (A \cap B)$.
Διαφορετικά,
$a \in A \cup (A \cap B) \Longleftrightarrow (a \in A) \cup (a \in A \cap B)$
$\Longleftrightarrow (a \in A) \cup ((a \in A) \wedge (a \in B))$
$\Longleftrightarrow a \in A$.

(x) $a \in A \setminus B \Longleftrightarrow (a \in A) \wedge (a \notin B) \Longleftrightarrow (a \in A) \wedge (a \in B^c) \Longleftrightarrow a \in A \cap B^c$

(xi) $B^c \setminus A^c = \{x \in \Omega \,|\, x \in B^c \quad \text{και} \quad x \notin A^c\} = \{x \in \Omega \,|\, x \notin B \quad \text{και} \quad x \in A\} = A \setminus B$

Νόμοι του De Morgan[1]

Νόμοι του De Morgan για το συμπλήρωμα

Ισχύουν
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \tag{1}$$
και
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \tag{2}$$

[1] Augustus De Morgan (1806-1871). Βρετανός Μαθηματικός. Εισήγαγε την έννοια της *Μαθηματικής Επαγωγής*.

Απόδειξη

(i) 1ος τρόπος

$$\begin{aligned} a \in (A\cup B)^c &\iff a \notin A\cup B \\ &\iff (a\notin A)\wedge(a\notin B) \\ &\iff (a\in A^c)\wedge(a\in B^c) \\ &\iff a\in A^c\cap B^c \end{aligned}$$

2ος τρόπος

$$\begin{aligned} (A\cup B)^c &= \{x\in\Omega \,|\, x\notin A\cup B\} \\ &= \{x\in\Omega \,|\, x\notin A \quad \text{και} \quad x\notin B\} \\ &= \{x\in\Omega \,|\, x\in A^c \quad \text{και} \quad x\in B^c\} \\ &= A^c\cap B^c \end{aligned}$$

(ii) $\boxed{(A\cap B)^c \subseteq A^c\cup B^c :}$
$a \in (A\cap B)^c \implies a\notin A\cap B \implies (a\notin A)\vee(a\notin B) \implies (a\in A^c)\vee(a\in B^c) \implies a\in A^c\cup B^c$

$\boxed{A^c\cup B^c \subseteq (A\cap B)^c :}$
$a\in A^c\cup B^c \implies (a\in A^c)\vee(b\in B^c) \implies (a\notin A)\vee(a\notin B) \implies ((a\in A)\wedge(a\in B))^c \implies a\in(A\cap B)^c$

Νόμοι του De Morgan για τη διαφορά

Ισχύουν

$$A\setminus(B\cap C) = (A\setminus B)\cup(A\setminus C) \tag{3}$$

και

$$A\setminus(B\cup C) = (A\setminus B)\cap(A\setminus C) \tag{4}$$

Απόδειξη Για το πρώτο:

$\boxed{A\setminus(B\cap C) \subseteq (A\setminus B)\cup(A\setminus C) :}$
$x\in A\setminus(B\cap C) \implies (x\in A)\wedge(x\notin B\cap C)$
$\implies (x\in A)\wedge((x\notin B)\vee(x\notin C))$
$\implies ((x\in A)\wedge(x\notin B))\vee((x\in A)\wedge(x\notin C)) \implies (x\in A\setminus B)\vee(x\in A\setminus C)$
$\implies x\in(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$.

$\boxed{(A\setminus B)\cup(A\setminus C) \subseteq A\setminus(B\cap C) :}$
$x\in((A\setminus B)\cup(A\setminus C)) \implies (x\in A\setminus B)\vee(x\in A\setminus C)$.
Αν $x\in(A\setminus B)$, τότε $x\in A$ και $x\notin B$ και αρα $x\notin B\cap C$ ενω αν $x\in(A\setminus C)$, τότε $x\in A$ και $x\notin C$ και αρα $x\notin B\cap C$. Άρα, $x\in A\setminus(B\cap C)$.

Το δεύτερο αφήνεται ως άσκηση.

Επιμεριστική ιδιότητα

Ισχύουν

$$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C) \tag{5}$$

και

$$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C) \tag{6}$$

Απόδειξη Για το πρώτο:

$$\begin{aligned} A\cap(B\cup C) &= \{x\in\Omega \,|\, x\in A \quad \text{και} \quad x\in B\cup C\} \\ &= \{x\in\Omega \,|\, x\in A \quad \text{και} \quad (x\in B \text{ ή } x\in C)\} \\ &= \{x\in\Omega \,|\, x\in A \quad \text{και} \quad x\in B\}\cup\{x\in\Omega \,|\, x\in A \quad \text{και} \quad x\in C\} \\ &= (A\cap B)\cup(A\cap C) \end{aligned}$$

Αλλιώς:

$$x \in A \cap (B \cup C) \implies x \in ((A \cap B) \cup (B \cap C)) \implies A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (B \cap C)$$

και

$$x \in ((A \cap B) \cup (B \cap C)) \implies x \in (A \cap (B \cup C)) \implies (A \cap B) \cup (B \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$$

Το δεύτερο αφήνεται ως άσκηση.

Εφαρμογή

Ισχύει

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \tag{7}$$

Απόδειξη

$$\begin{aligned}
(A \cup B) \setminus (A \cap B) &= \{x \in \Omega \,|\, x \in (A \cup B)\} \cap \{x \in \Omega \,|\, x \notin (A \cap B))\} \\
&= \{x \in \Omega \,|\, x \in (A \cup B)\} \cap \{x \in \Omega \,|\, (x \notin A) \vee (x \notin B)\} \\
&= \{x \in \Omega \,|\, (x \in A) \wedge (x \notin A)\} \cup \{x \in \Omega \,|\, (x \in A) \wedge (x \notin B)\} \cup \\
&\quad \cup \{x \in \Omega \,|\, (x \in B) \wedge (x \notin A)\} \cup \{x \in \Omega \,|\, (x \in B) \wedge (x \notin B)\} \\
&= \{x \in \Omega \,|\, (x \in A) \wedge (x \notin B)\} \cup \{x \in \Omega \,|\, (x \in B) \wedge (x \notin A)\} \\
&= (A \setminus B) \cup (B \setminus A)
\end{aligned}$$

Εφαρμογή

$$A \subseteq B \iff A \cup B = B \iff A \cap B = A.$$

Απόδειξη

($A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$) Έστω ότι $A \subseteq B$. Θα δείξουμε ότι $A \cup B = B$. Έχουμε: $x \in A \cup B \implies (x \in A) \vee (x \in B) \implies x \in B \implies x \in B$. Επομένως $A \cup B \subseteq B$. Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, $x \in B \overset{A \subseteq B}{\implies} x \in A$. Άρα, $(x \in A) \vee (x \in B)$ και αρα $B \subseteq A \cup B$.

($A \cup B = B \Rightarrow A \cap B = A$) Έστω ότι $A \cup B = B$. Θα δείξουμε ότι $A \cap B = A$. Έχουμε: $x \in A \cap B \implies (x \in A) \wedge (x \in B) \overset{A \cup B = B}{\implies} (x \in A) \wedge (x \in A \cup B) \implies (x \in A) \wedge ((x \in A) \vee (x \in B)) \implies (x \in A) \vee (x \in B) \implies x \in B$. Επομένως $A \cap B \subseteq A$. Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, $x \in A \overset{B = A \cup B}{\implies} x \in B$. Άρα, $(x \in A) \wedge (x \in B)$ και αρα $A \subseteq A \cap B$.

($A \cap B = A \Rightarrow A \subseteq B$) Έστω ότι $A \cap B = A$. Θα δείξουμε ότι $A \subseteq B$. Έχουμε: $x \in A = A \cap B \implies (x \in A) \wedge (x \in B) \implies x \in B$.