Μετασχηματισμός Laplace

Μετασχηματισμοί Laplace βασικών συναρτήσεων

Θα δούμε μετασχηματισμούς Laplace ορισμένων βασικών συναρτήσεων οι οποίες μας είναι χρήσιμες στους υπολογισμούς.

(i) $\mathcal{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}, \quad s > 0.$

(ii) $\mathcal{L}\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}, \quad n = 1, 2, 3, ..., \quad s > 0$

(iii) $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}, \quad s > a$

(iv) $\mathcal{L}\{\sin at\} = \dfrac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$

(v) $\mathcal{L}\{\cos at\} = \dfrac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$

(vi) $\mathcal{L}\{\sinh at\} = \dfrac{a}{s^2-a^2}, \quad s > |a|$

(vii) $\mathcal{L}\{\cosh at\} = \dfrac{s}{s^2-a^2}, \quad s > |a|$

Απόδειξη

(i)

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}\,dt = \int_0^{+\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)'\,dt = \lim_{\ell\to+\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^{\ell} = \frac{1}{s}, \quad s > 0$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $\lim_{\ell\to+\infty} e^{-s\ell} = 0$ αν $s > 0$.

(ii) Είδαμε ότι $\mathcal{L}\{t\} = 1/s^2$ για $s > 0$.
Θα δείξουμε τώρα ότι για κάθε $n = 1, 2, 3, \ldots,$

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n}{s}\mathcal{L}\{t^{n-1}\}$$

Πράγματι, με ολοκλήρωση κατα παράγοντες,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^n\} &= \int_0^{+\infty} e^{-st}t^n\,dt = \lim_{\ell\to+\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}t^n\right]_0^{\ell} + \frac{n}{s}\int_0^{+\infty} e^{-st}t^{n-1}\,dt \\ &= -\frac{1}{s}\lim_{\ell\to+\infty}\left[e^{-s\ell}\ell^n\right] + \frac{n}{s}\mathcal{L}\{t^{n-1}\}\end{aligned}$$

Αλλά (χρησιμοποιώντας τον κανόνα του De L'Hospital n-φορές[3]) παίρνουμε

$$\lim_{\ell\to+\infty}\frac{\ell^n}{e^{s\ell}} = 0$$

και αρα $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n}{s}\mathcal{L}\{t^{n-1}\}$, για κάθε $n = 1, 2, 3, \ldots$.
Συνεπώς (για $s > 0$)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^n\} &= \frac{n}{s}\mathcal{L}\{t^{n-1}\} = \frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}\mathcal{L}\{t^{n-2}\} \\ &= \ldots = \frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{s}\cdot 1\cdot\mathcal{L}\{t\} \\ &= \frac{n!}{s^{n-1}}\cdot\frac{1}{s^2} = \frac{n!}{s^{n+1}}\end{aligned}$$

[3] το όριο $\lim\limits_{\ell\to+\infty} e^{-s\ell}\ell^n = \lim\limits_{\ell\to+\infty}\frac{\ell^n}{e^{s\ell}}$ υπάρχει αν και μόνο αν $s \neq 0$ και επίσης $\lim\limits_{\ell\to+\infty} e^{-s\ell} = 0 \iff s > 0$

(iii)

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}e^{at}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t}\,dt = \frac{1}{a-s}\lim_{\ell\to+\infty} e^{(a-s)t} + \frac{1}{s-a}$$

Αλλά, το $\lim_{\ell\to+\infty} e^{(a-s)t}$ υπάρχει και είναι ίσο με 0 αν και μόνο αν $a-s<0$, δηλ. αν και μόνο αν $s>a$. Έτσι, για $s>a$,

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}.$$

(iv) Έχουμε (με ολοκλήρωση κατά παράγοντες)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sin at\} &= \int_0^{+\infty} e^{-st}\sin at\,dt = \lim_{l\to+\infty}\int_0^l e^{-st}\sin at\,dt \\ &= \lim_{l\to+\infty}\left[-\frac{1}{s}\sin(a\ell)e^{-s\ell} + \frac{a}{s}\int_0^\ell e^{-st}\cos(at)\,dt\right]\end{aligned}$$

Από το κριτήριο της παρεμβολής (για $s>0$), έχουμε ότι $\lim_{l\to+\infty}\sin(a\ell)e^{-s\ell}=0$ και αρα το πιο πάνω δίνει

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\sin at\,dt = \frac{a}{s}\int_0^{+\infty} e^{-st}\cos(at)\,dt \tag{1.3}$$

Εφαρμόζοντας (ξανά) ολοκλήρωση κατά παράγοντες,

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\cos(at)\,dt = \lim_{l\to+\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\cos(a\ell) + \frac{1}{s} - \frac{a}{s}\int_0^\ell e^{-st}\cos(at)\,dt\right]$$

και ξανά από το κριτήριο της παρεμβολής (για $s>0$), έχουμε ότι $\lim_{l\to+\infty}\cos(a\ell)e^{-s\ell}=0$ και αρα το πιο πάνω δίνει

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\cos at\,dt = -\frac{a}{s}\int_0^{+\infty} e^{-st}\sin(at)\,dt \tag{1.4}$$

Από τις (1.3) και (1.4) παίρνουμε

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\sin at\,dt = \frac{a}{s^2} - \frac{a^2}{s^2}\int_0^{+\infty} e^{-st}\sin at\,dt \Longrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-st}\sin at\,dt = \frac{a}{s^2+a^2}$$

και αρα

$$\mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2} \quad \text{αν} \quad s>0$$

(v)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cos at\} &= \int_0^{+\infty} e^{-st}\cos at\,dt = \lim_{l\to+\infty}\int_0^l e^{-st}\cos at\,dt \\ &= \lim_{l\to+\infty}\left[\frac{s}{a^2+s^2}\left(\frac{a}{s}\sin at - \cos at\right)e^{-st}\right]_0^l \\ &= \lim_{l\to+\infty}\left[\frac{s}{a^2+s^2}\left(\frac{a}{s}\sin al - \cos al\right)e^{-sl} + \frac{s}{a^2+s^2}\right] \\ &= \frac{s}{a^2+s^2} \quad \text{αν} \quad s>0\end{aligned}$$

(vi)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\sinh at\} &= \int_0^{+\infty} e^{-st}\sinh at\, dt = \lim_{l\to+\infty}\int_0^{l} e^{-st}\sinh at\, dt \\
&= \lim_{l\to+\infty}\left[-\frac{s}{s^2-a^2}\left(\frac{a}{s}\cosh at+\sinh at\right) re^{-st}\right]_0^l \\
&= \lim_{l\to+\infty}\left[-\frac{s}{s^2-a^2}\left(\frac{a}{s}\cosh al+\sinh al\right) e^{-sl}+\frac{a}{s^2-a^2}\right] \\
&= \frac{a}{s^2-a^2}-\frac{s}{s^2-a^2}\lim_{l\to+\infty}\left[\left(\frac{a}{2s}+1\right)e^{-(s-a)l}+\left(\frac{a}{2s}-1\right)e^{-(s+a)l}\right] \\
&= \frac{a}{s^2-a^2} \quad \text{αν} \quad s>a \quad \text{και} \quad s>-a \quad (\text{Δηλαδή} \;\; s>|a|)
\end{aligned}
$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $\lim_{x\to+\infty} e^{ax}=0$ αν $a<0$.

(vii) Αφήνεται ως άσκηση.

□