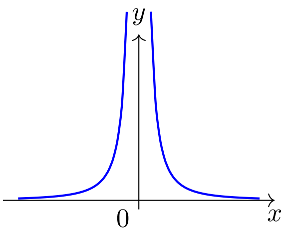
$\int$ Γενικευμένα Ολοκληρώματα

Μέχρι τώρα έχουμε μελετήσει (Ορισμένα) ολοκληρώματα $I = \int_a^b f(x)\,dx$ για $f \in C([a,b])$. Λόγω της συνέχειας της f στο (κλειστό και φραγμένο) διάστημα $[a,b]$, συνεπώς από το Θεώρημα Μέγιστης/Ελάχιστης τιμής ότι αυτή είναι και φραγμένη. Αν η f είναι θετική, τότε το I ισούται με το εμβαδόν που περικλείεται κάτω από το γράφημά της. Στην περίπτωση όμως που η συνάρτηση ορίζεται σε μη φραγμένο διάστημα, π.χ. της μορφής $[a,+\infty)$ ή $(-\infty,a]$, ή ακόμη η συνάρτηση να μην είναι φραγμένη σε μια περιοχή ενός σημείου του Π.Ο. της, εγείρεται το ερώτημα του εαν έχει νόημα ή όχι να μιλήσουμε για το εμβαδόν του περικλείεται κάτω από το γράφημα της συνάρτησης.

Παράδειγμα Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 1/x^2$. Είναι $D(f) = \mathbb{R}_*$. Θέλουμε να δούμε αν 'προσδιορίζεται' εμβαδόν κάτω από το γράφημα της συνάρτησης αυτής. Είναι $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$. Η f έχει παράγουσα σε οποιοδήποτε διάστημα της μορφής $[a,b]$, όπου $0 < a < b$. Μια παράγουσα είναι και η F με τύπο $F(x) = -1/x$, $x \neq 0$. Έτσι, αν $0 < a$, τότε $\int_a^1 \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a} - 1$. Αλλά $\lim_{a\to 0^+} \frac{1}{a} = +\infty$.



2.1 Γενικευμένα Ολοκληρώματα Α΄Είδους

Ορισμός 2.1.1.

Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Καλούμε Γενικευμένο Ολοκλήρωμα της f από το a στο $+\infty$ το όριο

$$\lim_{\ell\to+\infty} \int_a^{\ell} f(x)\,dx := \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

Αν το πιο πάνω όριο υπάρχει, τότε λέμε ότι το Γενικευμένο Ολοκλήρωμα της f συγκλίνει, ενώ αν αυτό δεν υπάρχει, τότε λέμε ότι το Γενικευμένο Ολοκλήρωμα της f αποκλίνει. Αν το όριο αυτό είναι ίσο με $+\infty$ (αντ. $-\infty$), τότε λέμε ότι το Γενικευμένο Ολοκλήρωμα της f απειρίζεται θετικά (αντίστοιχα απειρίζεται αρνητικά).

Αν $b \in \mathbb{R}$ και $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση, τότε ορίζεται το Γενικευμένο Ολοκλήρωμα της f από το $-\infty$ στο b ως το όριο

$$\lim_{\ell \to -\infty} \int_{\ell}^{b} f(x)\,dx := \lim_{\ell \to -\infty} \int_{\ell}^{b} f(x)\,dx.$$

Παρατήρηση: Για $f \in C(\mathbb{R})$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$$

Συνεπώς, το ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος της πιο πάνω ισότητας συγκλίνει αν και μόνο αν και τα δυο ολοκληρώματα στο δεξί μέλος αυτής συγκλίνουν. Κατακρίβειαν, αντί του $x = 0$ μπορούμε να πάρουμε οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό a: Έστω $a \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$$

Πράγματι, υποθέτουμε χωρίς απώλεια της γενικότητας ότι $a > 0$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx &= \lim_{\ell \to -\infty} \int_{\ell}^{0} f(x)\,dx + \lim_{k \to +\infty} \int_{0}^{k} f(x)\,dx \\
&= \lim_{\ell \to -\infty} \int_{\ell}^{0} f(x)\,dx + \lim_{k \to +\infty} \left[\int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{k} f(x)\,dx \right] \\
&= \lim_{\ell \to -\infty} \int_{\ell}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \lim_{k \to +\infty} \int_{a}^{k} f(x)\,dx \\
&= \lim_{\ell \to -\infty} \left[\int_{\ell}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \right] + \lim_{k \to +\infty} \int_{a}^{k} f(x)\,dx \\
&= \lim_{\ell \to -\infty} \int_{\ell}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.1.1.

Τα ολοκληρώματα

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} \qquad \text{και} \qquad \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

συγκλίνουν αμφότερα. Αφού η συνάρτηση $x \mapsto 1/(1+x^2)$ είναι άρτια, αρκεί να δείξουμε ότι ενα από αυτά συγκλίνει. Έχουμε π.χ.

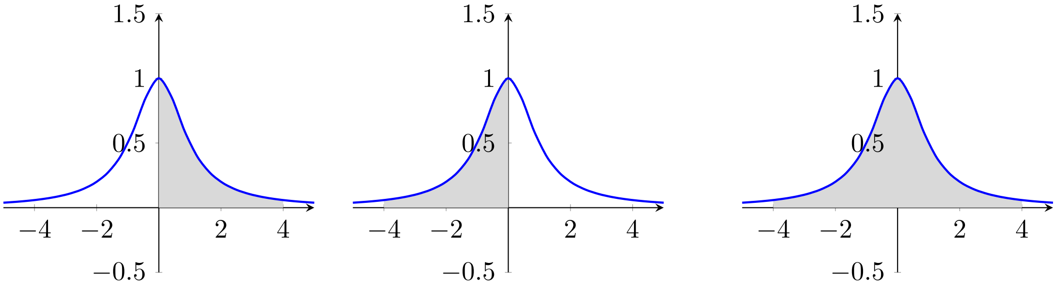
$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\ell \to -\infty} \int_{\ell}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\ell \to -\infty} [\arctan(x)]_{\ell}^{0} = \frac{\pi}{2}$$

Έτσι,

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} < +\infty$$

και

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$



$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}}$ $\boxed{\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}}$ $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi}$

Παράδειγμα 2.1.2.

Το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} \cos x\, dx$ αποκλίνει. Πράγματι,

$$\int_0^{+\infty} \cos x\, dx = \lim_{\ell \to +\infty} \int_0^{\ell} \cos x\, dx = \lim_{\ell \to +\infty} \sin \ell$$

το οποίο όριο όπως ξέρουμε δεν υπάρχει.

Παράδειγμα 2.1.3.

Το ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$ απειρίζεται θετικά. Πράγματι,

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \lim_{\ell \to +\infty} \int_1^{\ell} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \lim_{\ell \to +\infty} [\sqrt{1+\ell^2} - \sqrt{2}] = +\infty$$

Παράδειγμα 2.1.4.

Το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ συγκλίνει.
Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $x \mapsto 1/\sqrt{x}$ δεν είναι φραγμένη κοντά στο $x = 0$. Έτσι, το ανωτέρω ολοκλήρωμα είναι γενικευμένο Α′ είδους. Συνεπώς,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\ell \to 0^+} \int_{\ell}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\ell \to 0^+} (2 - 2\sqrt{\ell}) = 2 < +\infty$$

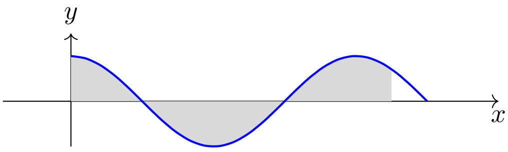
Παράδειγμα 2.1.5.

Το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} x \sin x\, dx$ αποκλίνει. Πράγματι,

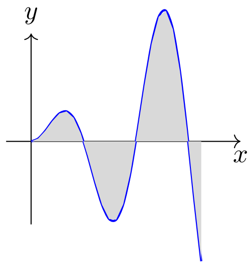
$$\int_0^{+\infty} x \sin x\, dx = \lim_{\ell \to +\infty} \int_0^{\ell} x \sin x\, dx = \lim_{\ell \to +\infty} (\sin \ell - \ell \cdot \cos \ell)$$

το οποίο όριο δεν υπάρχει.

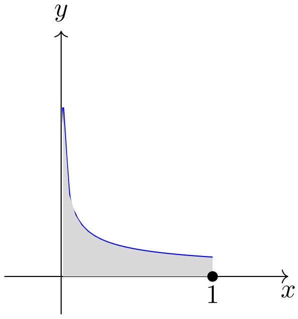
Παρατήρηση 2.1.1. *Από τα πιο πάνω παραδείγματα, παρατηρούμε ότι ενα γενικευμένο ολοκλήρωμα δεν καθορίζει εμβαδόν αν είτε συσσωρεύεται 'πολλή' ποσότητα εμβαδού (και οδηγεί σε αποτέλεσμα $+\infty$ ή $-\infty$) ή το εμβαδόν εναλλάσεται 'συνεχώς' κάτω ή πάνω από τον άξονα των τετμημενων χωρίς να μπορούμε να εξαγάγουμε συμπέρασμα για το συνολικό εμβαδόν. Αποδεικνύεται ότι μόνο αυτές είναι και οι πιθανές περιπτώσεις (μαζί βέβαια με τους συδυασμούς αυτών).*



$f(x) = \cos x,\, x \geq 0$



$f(x) = x \sin x,\, x \geq 0$



$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}},\, 0 < x \leq 1$

Η επόμενη πρόταση μας δίνει ένα κριτήριο σύγκλισης των γενικευμένων ολοκληρωμάτων Α είδους:

Πρόταση 2.1.1.

Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $f \in C([a, +\infty)$. Το Γενικευμένο Ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ συγκλίνει αν και μόνο αν

$$\forall \epsilon > 0\, \exists M \geq a : \; \forall x, y \geq M \Longrightarrow \left| \int_x^y f(t)\, dt \right| < \epsilon \tag{2.1}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι το Γενικευμένο Ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ συγκλίνει, έστω στον αριθμό L. Έστω $\epsilon > 0$.. Αφού $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = L$, μπορούμε να επιλέξουμε $M \geq a$ αρκετά μεγάλο τέτοιο ώστε αν $y \geq M$, τότε

$$\left| \int_a^y f(t)\, dt - L \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Αν επιπλέον $x \geq M$, τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \left| \int_x^y f(t)\, dt \right| &= \left| \int_a^y f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt \right| = \left| \int_a^y f(t)\, dt - L + L - \int_a^x f(t)\, dt \right| \\ &\leq \left| \int_a^y f(t)\, dt - L \right| + \left| \int_a^x f(t)\, dt - L \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

Έστω αντίστροφα ότι ισχύει η (2.1). Έστω $\epsilon > 0$. Θεωρούμε την ακολουθία $(a_n)_{n \in [a]+1, \dots}$ με

$$a_n = \int_a^n f(t)\, dt,\, n \geq [a] + 1.$$

(εξηγήστε γιατί είναι καλά ορισμένη). Τότε, από την υπόθεση, έχουμε ότι υπάρχει $M \geq a$ τέτοιο ώστε για $\forall n, m \in \mathbb{N}$ με $n > m \geq M (\geq a)$ να είναι $\left| \int_n^m f(t)\, dt \right| < \epsilon$. Αλλά,

$$\left| \int_n^m f(t)\, dt \right| = |a_m - a_n|$$

και έτσι λοιπόν η ακολουθία $(a_n)_n$ είναι ακολουθία Cauchy, άρα συγκλίνουσα. Έστω $a_n \to L$. Τότε, από τον ορισμό της σύγκλισης της ακολουθίας, έχουμε ότι υπάρχει $N \in \{[a]+1, \ldots\}$ τέτοιο ώστε $|a_n - L| < \epsilon/2$, $\forall n \geq N$. Επίσης, από υπόθεση, αν $x \geq [N]+1 = N+1$, τότε $\forall x, y \in \mathbb{N}$ με $x > y$, $\left|\int_x^y f(t)\,dt\right| < \epsilon/2$ και αρα

$$\begin{aligned} \left|\int_a^x f(t)\,dt - L\right| &= \left|\int_a^{[N]+1} f(t)\,dt - L + \int_{[N]+1}^x f(t)\,dt\right| \\ &\leq \left|\int_a^{[N]+1} f(t)\,dt - L\right| + \left|\int_{[N]+1}^x f(t)\,dt\right| \\ &< |a_n - L| + \left|\int_{[N]+1}^x f(t)\,dt\right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

και επομένως το Γενικευμένο Ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει στον αριθμό L. □

Θεώρημα 2.1.1. ***(κριτήριο Σύγκρισης για γενικευμένα ολοκληρώματα Α′ Είδους)***
Έστω $a \in \mathbb{R}$ και έστω $f, g \in C([a, +\infty)$ τέτοιες ώστε να ισχύει $f(x) \geq g(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, +\infty)$. Τότε:

(i) *αν το Γενικευμένο Ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει, τότε και το Γενικευμένο Ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνει.*

(ii) *αν το Γενικευμένο Ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ αποκλίνει, τότε και το Γενικευμένο Ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ αποκλίνει.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $F, G : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπους $F(t) = \int_a^t f(x)\,dx$ και $G(t) = \int_a^t g(x)\,dx$ αντίστοιχα. Είναι καλά ορισμένες και αύξουσες συναρτήσεις (αφού $f(x) \geq g(x) \geq 0$, $\forall x \in (a, +\infty)$ και ιδιαίτερα, $F(t) \geq G(t)$, $\forall x \in (a, +\infty)$. Υποθέτουμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει, δηλ. $\lim_{t\to+\infty} F(t) = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx := L \in \mathbb{R}$.. Αφού η F είναι αύξουσα, έπεται ότι $F(t) \leq L$, $\forall x \in (a, +\infty)$ και αρα τελικά $0 \leq G(t) \leq F(t) \leq L$, $\forall x \in (a, +\infty)$. Έτσι, αφού η συνάρτηση G είναι αύξουσα και άνω φραγμένη (από τον αριθμό L), από γνωστό μας αποτέλεσμα, έπεται ότι συγκλίνει (στον αριθμό L).

□

Παρατηρήσεις 2.1.1.

(i) *Υπο τις υποθέσεις του Θεωρήματος* (2.1.1), *έχουμε ότι τα ολοκληρώματα συμπεριφέρονται το ίδιο ως προς τη σύγκλιση, δηλ.*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ συγκλίνει} \Longleftrightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ συγκλίνει}$$

ή, ισοδύναμα (αντιθετοαντίστροφα)

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ αποκλίνει} \Longleftrightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ αποκλίνει}$$

και γράφουμε

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \sim \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

για να δηλώσουμε το πιο πάνω. Διαισθητικά, αν το ολοκλήρωμα της 'μεγαλύτερης' συνάρτησης συγκλίνει (δηλ. αν το εμβαδόν κάτω από το γράφημά της είναι πεπερασμένο), τότε θα συγκλίνει και αυτό της 'μικρότερης' (δηλ. το εμβαδόν κάτω από το γράφημά της είναι επίσης πεπερασμένο), ή (ισοδύναμα) αν το ολοκλήρωμα της 'μικρότερης' συνάρτησης αποκλίνει, τότε και αυτό της 'μεγαλύτερης' συνάρτησης θα αποκλίνει. Όμως, αν το ολοκλήρωμα της μεγαλύτερης συνάρτηση αποκλίνει, τότε δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα για το ολοκλήρωμα της μικρότερης, με το κριτήριο αυτό.

(ii) *Στο ολοκλήρωμα Riemann, είδαμε ότι αν $f, g \in C([a,b])$, τέτοιες ώστε $f(x) \le g(x)$, $\forall x \in [a,b]$, τότε $\int_a^b f(x), dx \le \int_a^b g(x)\,dx$. Στο προηγούμενο όμως Θεώρημα, η πιο πάνω ανίσωση δεν έχει ακριβώς το ίδιο νόημα αφού μπορεί (τουλάχιστον) ένα από τα ολοκληρώματα να μη συγκλίνει. Έτσι, η σημασία του (στην περίπτωση θετικών συναρτήσεων) είναι αυτή που είδαμε πιο πάνω. Επίσης, ας σταθούμε στο ότι εδω απαιτούμε η f να είναι μεγαλύτερη ή ίση από τη μηδενική συνάρτηση, σε αντίθεση με το ολοκλήρωμα Riemann. Αν επιτρέψουμε στη συνάρτηση f να πάρει τιμές κάτω από τον άξονα των τετμημένων, τότε δεν ξέρουμε πόσο εμβαδόν συσσωρεύεται από κάτω και αρα θα πρεπει να σπάσουμε τη συνάρτηση σε επι μέρους άλλες. Αυτό θα φανεί καλύτερα σε επόμενες εφαρμογές.*

2.1.1 Εφαρμογές

Θα βρούμε για ποιές τιμές του $p \in \mathbb{R}$ το (γενικευμένο) ολοκλήρωμα

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$$

συγκλίνει.

Βρίσκουμε μια αντιπαράγωγο της $x \mapsto 1/x^p$:

$$\int \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \ln|x| + c \ \ (c \in \mathbb{R}), & p = 1 \\ \\ \dfrac{x^{1-p}}{1-p} + c \ \ (c \in \mathbb{R}), & p \neq 1 \end{cases}$$

Για $p = 1$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{\ell \to +\infty} \int_1^\ell \frac{dx}{x} = \lim_{\ell \to +\infty} \ln \ell = +\infty$$

Για $p \neq 1$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{\ell \to +\infty} \int_1^\ell \frac{dx}{x^p} = \lim_{\ell \to +\infty} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^\ell = \lim_{\ell \to +\infty} \left[\frac{\ell^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right] = \frac{1}{1-p} \lim_{\ell \to +\infty} \left(\ell^{1-p} - 1\right)$$

Αν $p < 1$, έχουμε ότι $p - 1 < 0 \Rightarrow \lim_{\ell \to +\infty} \left(\ell^{1-p} - 1\right) = +\infty$ ενω αν $p > 1$, έχουμε ότι $p - 1 > 0 \Rightarrow \lim_{\ell \to +\infty} \left(\ell^{1-p}\right) = \lim_{\ell \to +\infty} \frac{1}{\ell^{p-1}} = 0 \Rightarrow \lim_{\ell \to +\infty} \left(\ell^{1-p} - 1\right) = \frac{1}{p-1}$.
Βρήκαμε λοιπόν ότι

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} +\infty, & p \le 1 \\ \\ \dfrac{1}{p-1}, & p > 1 \end{cases}$$

Σημείωση: η συνάρτηση $x \mapsto 1/x^p$ δεν είναι φραγμένη 'κοντά' στο $x = 0$ για καμία τιμή του p αφού $\lim_{\ell \to 0^+} 1/x^p = +\infty$.

Θα βρούμε για ποιές τιμές του $p \in \mathbb{R}$ το (γενικευμένο) ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^p}$$

συγκλίνει.

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \int_0^{1} \frac{dx}{x^p} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$$

Από την προηγούμενη εφαρμογή, το $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ συγκλίνει μόνον για $p > 1$ και αρα για να συγκλίνει το αρχικό ολοκλήρωμα, πρέπει να διευρευνήσουμε ως προς τη σύγκλιση το $\int_0^{1} \frac{dx}{x^p}$ για τις τιμές αυτές του p και μόνο αυτές. Έχουμε (για $p > 1$)

$$\int_0^{1} \frac{dx}{x^p} = \lim_{\ell \to 0^+} \int_\ell^{1} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}\left[x^{1-p}\right]_1^{\ell} = \frac{1}{1-p}\lim_{\ell \to 0^+}\left(\ell^{1-p} - 1\right) = +\infty.$$

και αρα, το $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ δε συγκλίνει για καμία τιμή του $p \in \mathbb{R}$.

Παραδείγματα 2.1.1.

(i) Το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ συγκλίνει, όπως είδαμε, παρόλο που με το κριτήριο σύγκρισης δεν θα μπορούσαμε να βγάλουμε συμπέρασμα για τη σύγκλισή του:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = +\infty.$$

(ii) Το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_5^{+\infty} \frac{dx}{x^2-4x}$ συγκλίνει:

$$\begin{aligned}
\int_5^{+\infty} \frac{dx}{x^2-4x} &= \frac{1}{4}\lim_{\ell \to +\infty}\int_5^{\ell}\left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{4}\lim_{\ell \to +\infty}\left[\ln\left|\frac{x-4}{x}\right|\right]_5^{\ell} \\
&= \underbrace{\frac{1}{4}\lim_{\ell \to +\infty}\left[\ln\left|\frac{\ell-4}{\ell}\right|\right]}_{=0} - \frac{1}{4}\cdot\ln(1/5) \\
&= \frac{1}{4}\ln 5
\end{aligned}$$

Με το Κριτήριο σύγκρισης όμως δεν μπορούμε να αποφανθούμε ως προς τη σύγκλιση του πιο πάνω ολοκληρώματος:

$$\underbrace{\int_5^{+\infty} \frac{dx}{x^2}}_{<+\infty} \leq \int_5^{+\infty} \frac{dx}{x^2-4x}$$

<u>Εφαρμογή:</u> Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση το πιο κάτω (γενικευμένο) ολοκλήρωμα:

$$\int_4^{+\infty} \frac{dx}{x^2-4x}$$

(iii) Το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x}$ συγκλίνει: $\forall x \geq 5 \Rightarrow x^2+4x \geq x^2 \Rightarrow \forall x \geq 5 \Rightarrow \frac{1}{x^2+4x} \leq \frac{dx}{x^2}$ και αρα

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x} \leq \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < +\infty.$$

Εναλλακτικά,

$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x} &= \frac{1}{4}\lim_{\ell\to+\infty}\int_5^{\ell}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+4}\right)dx = \frac{1}{4}\lim_{\ell\to+\infty}\left[\ln\left|\frac{x}{x+4}\right|\right]_2^{\ell} \\ &= \underbrace{\frac{1}{4}\lim_{\ell\to+\infty}\left[\ln\left|\frac{\ell}{\ell+4}\right|\right]}_{=0} - \frac{1}{4}\cdot\ln(1/3) \\ &= \frac{1}{4}\ln 3\end{aligned}$$

Τέλος, ας δούμε ακόμη ενα κριτήριο σύγκλισης για τα γενικευμένα ολοκληρώματα Α΄ είδους:

Θεώρημα 2.1.2. (Οριακό κριτήριο Σύγκρισης για γενικευμένα ολοκληρώματα Α΄ Είδους)
Έστω $a \in \mathbb{R}$ και έστω $f \in C([a,+\infty)$ τέτοιες ώστε να ισχύει $f(x) \geq g(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,+\infty)$. Αν το όριο $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ υπάρχει και είναι > 0, τότε $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \sim \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

Απόδειξη. Αφήνεται στον αναγνώστη (εφαρμογή του κριτηρίου παρεμβολής και του ορισμού σύγκλισης του ορίου). ☐

2.2 Γενικευμένα Ολοκληρώματα Β΄ Είδους

Ορισμός 2.2.1.

Έστω $f \in C((a,b))\,(a<b)$. Αν ισχύει $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ ή/και $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$, τότε καλούμε Γενικευμένο Ολοκλήρωμα της f από το a στο b το όριο $\lim_{\ell\to a^+}\int_\ell^b f(x)\,dx$ αν ισχύει η πρώτη από τις δυο πιο πάνω συνθήκες και $\lim_{\ell\to b^-}\int_a^{\ell} f(x)\,dx$ αν ισχύει η δεύτερη ή $\lim_{\ell\to a^+}\lim_{k\to b^-}\int_\ell^k f(x)\,dx$ αν ισχύουν και οι δυο. Σε κάθε περίπτωση, αν το όριο υπάρχει, τότε λέμε ότι το ολοκλήρωμα της f συγκλίνει ενώ αν δεν υπάρχει, τότε λέμε ότι το το ολοκλήρωμα της f αποκλίνει. Τέλος, αν το όριο αυτό απειρίζεται (δηλ. είναι ίσο με $+\infty$ ή $-\infty$), τότε λέμε ότι το ολοκλήρωμα απειρίζεται θετικά ή απειρίζεται αρνητικά αντίστοιχα.

Σημείωση: στο τελευταίο όριο δεν παίζει ρόλο η σειρά των ορίων.

Παρατήρηση 2.2.1. *Σαφώς υπάρχουν και συνδυασμοί των δυο πιο πάνω ειδών γενικευμένων ολοκληρωμάτων, όπως για παράδειγμα:*

$$\int_{-1}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3} = \int_{-1}^{0}\frac{dx}{1+x^3} + \int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3} = \lim_{\ell\to-1^+}\int_\ell^0\frac{dx}{1+x^3} + \lim_{k\to+\infty}\int_0^k\frac{dx}{1+x^3}$$

Το επόμενο κριτήριο σύγκλισης γενικευμένων ολοκληρωμάτων Β΄ Είδους είναι πιο ισχυρό από το αντίστοιχο για αυτά του Α΄ είδους, αφού (υπό συγκεκριμένες υποθέσεις) *δεν απαιτεί οι συναρτήσεις να είναι θετικές. ούτε να έχουν κάποια διάταξη μεταξύ τους.*

Θεώρημα 2.2.1. *(Οριακό κριτήριο Σύγκρισης για γενικευμένα ολοκληρώματα Β΄ Είδους)* *Έστω* $a, b \in \mathbb{R}$ *με* $a < b$.. *Έστω* $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ *δυο συνεχείς συναρτήσεις με* $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b)$ *Αν το όριο* $\lim\limits_{x \to b^-} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *υπάρχει (είναι πραγματικός αριθμός) και είναι* > 0, *τότε*

$$\int_a^b f(x)\,dx \sim \int_a^b g(x)\,dx.$$

2.2.1 Ασκήσεις

1. Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τα παρακάτω (γενικευμένα) ολοκληρώματα:

(i) $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$ **(ii)** $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

(iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}}dx$ **(iv)** $\displaystyle\int_0^{9} \frac{dx}{\sqrt{9-x}}$

(v) $\displaystyle\int_{-3}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{9-x^2}}$ **(vi)** $\displaystyle\int_0^{2} \frac{dx}{(x-2)^{2/3}}$

(vii) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

και

(viii) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+4)\sqrt{x}}$

2. Να δείξετε ότι τα παρακάτω (γενικευμένα) ολοκληρώματα συγκλίνουν απόλυτα για $p > 1$ και απλά για $p > 0$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p}\,dx \quad \text{και} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,dx$$

3. Χρησιμοποιώντας ως δεδομένο ότι[1] $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, να υπολογίσετε τα παρακάτω (γενικευμένα) ολοκληρώματα:

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx \quad \text{και} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2x^2}\,dx$$

$(a > 0)$

4. Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση το πιο κάτω (γενικευμένο) ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 \ln x\,dx.$$

[1] Ένας τρόπος υπολογισμού του ολοκληρώματος $\int\limits_{x=-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ είναι με χρήση πολικών συντεταγμένων:

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(t^2+s^2)}dtds \overset{\text{Πολικές}}{=} \int\limits_{\theta=0}^{2\pi}\left(\int\limits_{r=0}^{\infty} e^{-r^2}rdr\right)d\theta = 2\pi\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-r^2}\Big|_0^{\infty} = \pi$$

$$\Rightarrow \iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(t^2+s^2)}dtds = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-(t^2+s^2)}dtds = \pi$$

$$\Rightarrow \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}ds\right) = \pi \Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$$

Τώρα, αφού η συνάρτηση $x \mapsto e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ είναι άρτια, τότε $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ και αρα

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$