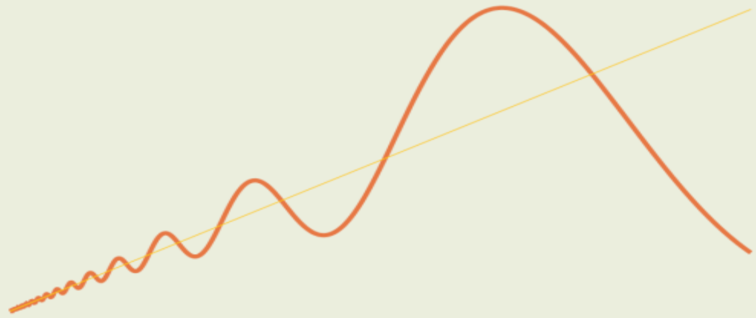
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Μέρος I

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ακρότατες τιμές & Μονοτονία Συνάρτησης

Παράγραφος 1 - Μονοτονία, ακρότατα, συμπεριφορά συνάρτησης στα άκρα του πεδίου ορισμού της

Αντικειμενικοί στόχοι: Να καταλάβει ο μαθητής πως η συνέχεια 'περνά' μέσα στις διάφορες ανισώσεις και τη σύνδεση μεταξύ 1-1 και μονοτονίας συνάρτησης. Γι'αυτό: προσοχή στα επιχειρήματα τύπου 'με την ισότητα μόνο για...'

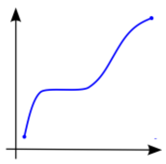
ΘΕΩΡΙΑ

Ορισμός (Μονοτονία Συνάρτησης)

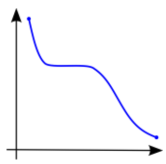
Μια συνάρτηση $f: A \to B$ θα λέγεται

- **αύξουσα** αν $\forall x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \leq x_2$ ισχύει $f(x_1) \leq f(x_2)$
- **φθίνουσα** αν $\forall x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \leq x_2$ ισχύει $f(x_1) \geq f(x_2)$
- **γνησίως αύξουσα** αν $\forall x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$
- **γνησίως φθίνουσα** αν $\forall x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$

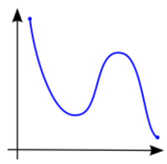
Μια συνάρτηση $f: A \to B$ θα λέγεται **μονότονη** αν είναι είτε αύξουσα είτε φθίνουσα και **γνησίως μονότονη** αν είναι είτε γνησίως αύξουσα είτε γνησίως φθίνουσα.



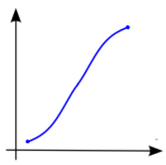
Μονότονη συνάρτηση
(Αύξουσα)



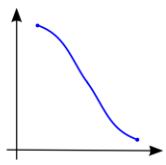
Μονότονη συνάρτηση
(Φθίνουσα)



Μη μονότονη συνάρτηση



Γνησίως Μονότονη συνάρτηση
(Γνησίως Αύξουσα)



Γνησίως Μονότονη συνάρτηση
(Γνησίως Φθίνουσα)

Ορισμός [Διαστήματα μονοτονίας]

Αν το **σύνολο** A είναι διάστημα, τότε λέμε ότι η συνάρτηση είναι μονότονη στο A. Αν το A είναι το μεγαλύτερο δυνατό διάστημα στο οποίο η συνάρτηση είναι μονότονη, τότε λέμε ότι το A είναι **διάστημα μονοτονίας της συνάρτησης.**

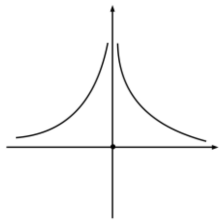
Ορισμός [Ακρότατο Συνάρτησης]

Εστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε μια δ-ανοικτή περιοχή ενός σημείου x_0. Λέμε ότι η συνάρτηση έχει **τοπικό (ή σχετικό) μέγιστο** στο σημείο x_0 αν για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}$ ισχύει $f(x) \leq f(x_0)$. Στην περίπτωση που η ανίσωση αυτή ισχύει αυστηρά, τότε λέμε ότι η συνάρτηση έχει **αυστηρό** τοπικό μέγιστο στο σημείο x_0. Ομοίως, λέμε ότι η συνάρτηση έχει **τοπικό (ή σχετικό) ελάχιστο** στο σημείο x_0 αν για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}$ ισχύει $f(x) \geq f(x_0)$. Στην περίπτωση που η ανίσωση αυτή ισχύει αυστηρά, τότε λέμε ότι η συνάρτηση έχει **αυστηρό τοπικό ελάχιστο** στο σημείο x_0.

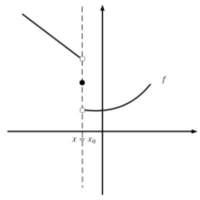
Παρατήρηση

Αν σε μια αρκετά μικρή περιοχή ενός σημείου του γραφήματος μιας συνάρτησης αλλάζει η μονοτονία, τότε αυτό είναι τοπικό ακρότατο.

Παράδειγμα



(α)



(β)

Η συνάρτηση f στο **(α)** έχει *τοπικό* ελάχιστο (στο σημείο $x = 0$). Πράγματι, αν $\varepsilon > 0$ (αρκετά μικρό), έχουμε ότι

$$0 = f(0) < f(x), \forall x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

Αλλά η συνάρτηση δεν έχει τοπικό μέγιστο.

Η συνάρτηση f στο **(β)** δεν έχει ούτε τοπικό ελάχιστο αλλά ούτε και τοπικό μέγιστο. Πράγματι, αν $\varepsilon > 0$ (τυχαίο), έχουμε ότι

$$f(x_0) > f(x), \forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon) \quad \varepsilon\nu\omega \qquad f(x_0) < f(x), \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$$

Ορισμός ακροτάτου του σχολικού βιβλίου

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ παρουσιάζει στο $x_0 \in \Delta$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) \geq f(x), \forall x \in \Delta \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Το $f(x_0)$ λέγεται τοπικό μέγιστο της f.

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ παρουσιάζει στο $x_0 \in \Delta$ τοπικό ελάχιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) \leq f(x), \forall x \in \Delta \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Το $f(x_0)$ λέγεται τοπικό ελάχιστο της f.

✓ Τα τοπικά ελάχιστα και τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης f, αν υπάρχουν, λέγονται τοπικά ακρότατα της συνάρτησης.

✓ Το μέγιστο (ελάχιστο) μιας συνάρτησης είναι και τοπικό μέγιστο (τοπικό ελάχιστο) της συνάρτησης .

✓ Μια συνάρτηση f είναι δυνατόν να εμφανίζει τοπικά ακρότατα, αλλά να μην εμφανίζει ακρότατα στο πεδίο ορισμού της.

Α. Παραδείγματα των δεικτών

Μονοτονία συνάρτησης

❶ Να βρείτε ποιες από τις πιο κάτω συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες και ποιές γνησίως φθίνουσες:

(α) $f_1(x) = \sqrt{2-x}$ **(β)** $f_2(x) = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{x}} + 3$ **(γ)** $\mathrm{f}_3(\mathrm{x}) = -(x+1)^2 + 4,\ x \leq -1$

(δ) $f_4(x) = \log(x-3) - 1$

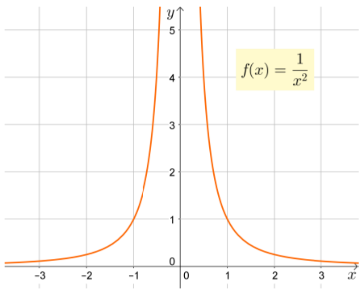
❷ Να δείξετε ότι:

(α) αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα $\Delta \subseteq \mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση $-f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

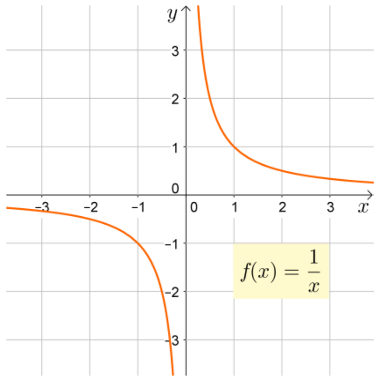
(β) Αν δύο συναρτήσεις f και g είναι γνησίως αύξουσες σε ένα διάστημα $\Delta \subseteq \mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

❸ Να βρείτε ποιες από τις πιο κάτω συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες και ποιες γνησίως φθίνουσες:

(α)



(β)



❹ Μια συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα

$$f(3-x) + f(x+5) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

και είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

(α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

(β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2 + 2x - 4) < 0$.

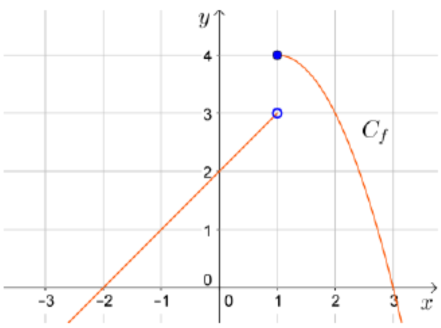
❺ *Ακρότατα συνάρτησης*

Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f με τύπο

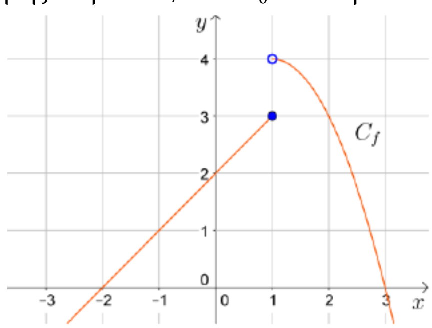
$$\mathrm{f(x) = x^4 - 2x^2 + 3, x \in \mathbb{R}}$$

❻ Να εξετάσετε σε ποιες από τις πιο κάτω περιπτώσεις η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x_0 = 1$ ακρότατο.

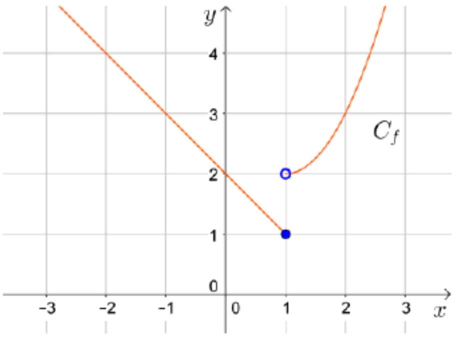
(α)



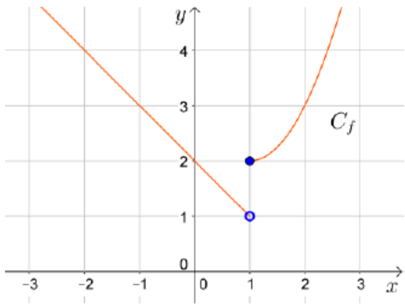
(β)



(γ)



(δ)



❼ Να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις των πιο κάτω συναρτήσεων. Στη συνέχεια, να βρείτε τα ακρότατα και τα τοπικά ακρότατα των συναρτήσεων σε κάθε περίπτωση:

(α) $f_1(x) = 2x + 3,\ x \in [-1,2]$ **(β)** $f_2(x) = -x + 1,\ x \in \mathbb{R}$

(γ) $f_3(x) = -3x,\ x \in (1,3]$ **(δ)** $f_4(x) = x^2,\ x \in [-1,2]$

(ε) $f_5(x) = |4 - x^2|,\ x \in [-3,3]$ **(στ)** $f_6(x) = \eta\mu x,\ x \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$