Η ισοπεριμετρική ανισότητα

Ξέρουμε ότι αν C κύκλος με ακτίνα $\rho > 0$, τότε το μήκος του $L(C)$ και το εμβαδόν του $A(C)$ συνδέονται με την ακόλουθη σχέση: $L^2(C) = 4\pi A(C)$. Θα αποδείξουμε ότι κάθε άλλη απλή κλειστή καμπύλη $\widetilde{C}$ έχει μεγαλύτερο μήκος από το μήκος του κύκλου ο οποίος έχει το ίδιο εμβαδόν με το χωρίο που περιέχεται στο εσωτερικό της καμπύλης. Ισοδύναμα, αν μια καμπύλη $\widetilde{C}$ δεν είναι κύκλος, τότε το εμβαδόν που περικλείεται στο εσωτερικό της είναι μικρότερο από το εμβαδόν του κύκλου C ο οποίος έχει το ίδιο μήκος με αυτήν.
(Πλήρης) απόδειξη δόθηκε πρώτα από τον Weierstrass το 1870 (ο οποίος μάλιστα έδειξε ότι η απόδειξη του Jakob Steiner (1838) δεν ήταν πλήρης-απέδειξε μόνο τη μοναδικότητα της λύσης), αλλά και από τον Hurwitz με χρήση σειρών Fourier αλλά και από τον E. Schmidt (1938). Θα δούμε την απόδειξη του τελευταίου, αφού χρησιμοποιεί απλά εργαλεία της Θεωρίας των καμπύλων στο επίπεδο και το Θεώρημα του Green.
Υπενθυμίσεις:

Θεώρημα 0.1. *[Green] Έστω C μια θετικά προσανατολισμένη κανονική απλή κλειστή καμπύλη στο επίπεδο. Έστω D το χωρίο που φράσσεται από τη C. Αν $F = (P, Q)$, όπου $P, Q : U \to \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους και $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό τέτοιο ώστε να περιέχει το D, τότε*

$$\int_\gamma F \cdot dC = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy. \tag{1}$$

Πρόταση 0.1. *[Ισοπεριμετρική ανισότητα] Έστω μία απλή κλειστή καμπύλη με μήκος L και έστω A το εμβαδόν της επιφάνειας που φράσσει. Τότε*

$$A \leq \frac{L^2}{4\pi}.$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν η καμπύλη είναι κύκλος.

Υπενθύμιση: ανισότητα Αριθμητικού-Γεωμετρικού μέσου:
Για $a, b \in \mathbb{R}_+$ ισχύει

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \tag{2}$$

με την ισότητα μόνο για $a = b$.

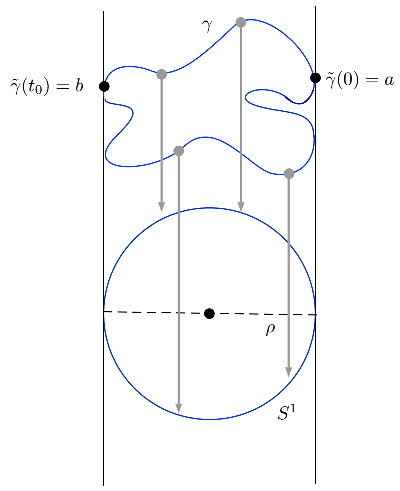
Λήμμα 0.1. *Έστω γ μια θετικά προσανατολισμένη απλή κλειστή καμπύλη με παραμέτρηση $c(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$. Αν $E(D)$ το εμβαδόν του χωρίου D που περικλείεται στο εσωτερικό της γ, τότε*

$$E(D) = \int_{[a,b]} x(t)y'(t)\, dt = -\int_{[a,b]} y(t)x'(t)\, dt = \frac{1}{2}\int_{[a,b]} (y(t)x'(t) - x(t)y'(t))\, dt \tag{3}$$

Απόδειξη. Έστω $F = (0, x)$. Τότε, $\int_\gamma F \cdot dC = \int_{[a,b]} (0, x(t)) \cdot (x'(t), y'(t))\, dt = \int_{[a,b]} x(t)y'(t)\, dt$. Αλλά, από την (1) έχουμε ότι $\int_\gamma F \cdot dC = \iint_D \left(\frac{\partial x}{\partial x} - 0\right) dxdy = \iint_D dxdy = E(D)$. Συνεπώς, $E(D) = \int_{[a,b]} x(t)y'(t)\, dt$. Ομοίως, για $F = (-y, 0)$, λαμβάνουμε τη δεύτερη ισότητα (ή πιο απλά, με ολοκλήρωση κατά μέρη). Η τρίτη ισότητα προκύπτει εύκολα από τη δεύτερη. ☐

Απόδειξη. (της Πρότασης (0.1))

Έστω γ μια απλή κλειστή καμπύλη με μήκος L και έστω A το εμβαδόν της επιφάνειας που φράσσει. Αναπαραμετρούμε την καμπύλη γ με μήκος τόξου:$\tilde{\gamma}$ με παραμέτρηση $\tilde{c}(t) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$, $t \in [0, L]$. Θεωρούμε δυο κατακόρυφες ευθείες οι οποίες εφάπτονται της καμπύλης $\tilde{\gamma}$ και έστω a ενα σημείο επαφής της καμπύλης με τη μια ευθεία και b ενα σημείο επαφής της με την άλλη ευθεία. Έστω επίσης ότι $a = \tilde{c}(0)$ και $b = \tilde{c}(t_o)$ για κάποιο $t_0 \in [0, L]$. Τότε το ίχνος της $\tilde{\gamma}$ χωρίζεται σε δυο τόξα με αντίθετο προσανατολισμό (το $\tilde{\gamma}_1$ από το a στο b και το $\tilde{\gamma}_2$ από το b στο a). Ακολούθως, θεωρούμε εναν κύκλο S^1 ο οποίος εφάπτεται μεταξύ των δυο γραμμών. Η ακτίνα ρ του κύκλου είναι το μισό της απόστασης των ευθειών. Προβάλουμε τα σημεία του τόξου $\tilde{\gamma}_1$ στο άνω ημικύκλιο



του S^1 και αντίστοιχα του τόξου $\tilde{\gamma}_1$ στο κάτω ημικύκλιο, μέσω της παραμέτρησης

$$\alpha(t) = (\tilde{x}(t), \eta(t)) = \begin{cases} (\tilde{x}(t), \sqrt{\rho^2 - (\tilde{x}(t))^2}), & \text{αν } t \in [0, t_0] \\ (\tilde{x}(t), -\sqrt{\rho^2 - (\tilde{x}(t))^2}), & \text{αν } t \in [t_0, L] \end{cases}$$

Η α δεν είναι αναγκαστικά κανονική παραμέτρηση για τον S^1 αλλά διατρέχει τα σημεία του κύκλου μια φορά. Τότε,

$$E(S^1) = \pi\rho^2 = -\int_{[0,L]} \eta(t) d\tilde{x}(t) = -\int_{[0,L]} \sqrt{\rho^2 - (\tilde{x}(t))^2}\tilde{x}'(t)\, dt$$

Από την (1) έχουμε ότι $A = \int_{[0,L]} \tilde{x}(t)\tilde{y}'(t)\, dt$. Συνεπώς, αν $u(t) = (\tilde{x}(t), \eta(t))$ και $v(t) = (\tilde{y}'(t), -\tilde{x}'(t))$, τότε για κάθε $\in [0, L]$

$$\langle u(t), v(t)\rangle \leq |\langle u(t), v(t)\rangle| \overset{C-S}{\leq} \|u(t)\| \underbrace{\|v(t)\|}_{=1} = \|u(t)\| = \rho$$

και αρα

$$A + \pi\rho^2 = \int_{[0,L]} \langle u(t), v(t)\rangle\, dt \leq \int_{[0,L]} \rho\, dt = L\rho. \tag{4}$$

Από την (2) έχουμε

$$\frac{A + \pi\rho^2}{2} \geq \sqrt{A\pi\rho^2} \tag{5}$$

Από τις (4) και (5) παίρνουμε ότι $A \leq \frac{L^2}{4\pi}$.
Μένει να δείξουμε ότι η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν η καμπύλη είναι κύκλος.
Θα πρέπει να έχουμε ισότητα στην (5), δηλ. $A = \pi\rho^2 \implies$ η ρ καθορίζεται από το εμβαδόν $A \implies L(\tilde{\gamma}) = 2\rho$. Επίσης, πρέπει να ισχύει η ισότητα στην C-S, δηλ. τα διανύσματα $u(t)$ και $v(t)$ να είναι συγγραμμικά και τότε αφού $\|v(t)\| = 1$, θα έχουμε $\tilde{x}(t) = \pm\rho y'(t)$, και $\eta(t) = \mp\rho x'(t)$. Η $\tilde{\gamma}$ βρίσκεται σε τετράγωνο πλευράς 2ρ. Μεταφέρουμε τον κύκλο S^1 ώστε το κέντρο του να συμπέσει με το κέντρο του τετραγώνου. Τότε, κάθε σημείο $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ της καμπύλης $\tilde{\gamma}$ προβάλλεται στο σημείο $(\pm\sqrt{\rho^2 - \tilde{y}^2(t)}, \tilde{y}(t))$ του κύκλου. Επαναλαμβάνουμε το πιο πάνω αλλά κατα την οριζόντια κατεύθυνση και παίρνουμε $\rho^2 - \tilde{y}(t) = \pm\rho\tilde{y}'(t)$ και $\tilde{y}(t) = \mp\rho\tilde{x}'(t)$. Έπεται ότι $\tilde{x}^2(t) + \tilde{y}^2(t) = \rho^2$. $\square$