Στοιχειώδης Θεωρία Γραμμικής Άλγεβρας

Ιωακείμ Ι. Ιωάννης

Κεφάλαιο 1

Πίνακες και ορίζουσα πίνακα

Στα παρακάτω, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$.

1.1 Γενικά περί πινάκων

Ένας **πίνακας** είναι μια ορθογώνια διάταξη αριθμών, συμβόλων, ή εκφράσεων, διατεταγμένων σε σειρές και στήλες.Τα μεμονωμένα στοιχεία σε ένα πίνακα ονομάζονται **στοιχεία** του. Ενας πίνακας A n γραμμών και m στηλών (συντομογραφικά ενας $n \times m$ πίνακας) θα είναι της μορφής

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Γράφοντας $A = (a_{ij})_{i=1,\dots,n}^{j=1,\dots,m}$ θα εννοούμε το πιο πάνω. Ένα παράδειγμα πίνακα 3 γραμμών και 4 στηλών είναι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & -8 & 10 \\ -3 & 0 & 7 & 2 \end{bmatrix}.$$

Οι πίνακες ίδιων διαστάσεων (οι οποίοι καλούνται τετράγωνοι πίνακες) μπορούν να προστεθούν ή αφαιρεθούν στοιχείο προς στοιχείο. Δηλ. αν $A = (a_{ij})_{i=1,\dots,n}^{j=1,\dots,m}$ και $B = (b_{ij})_{i=1,\dots,n}^{j=1,\dots,m}$, τότε $A + B = (c_{ij})_{i=1,\dots,n}^{j=1,\dots,m}$ όπου $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ και $A - B = (d_{ij})$, όπου $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.
Για παράδειγμα, αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 1 & -4 & 2 \\ -3 & 1 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & -6 \\ -4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

τότε

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 3 & -9 & -4 \\ -7 & 1 & 13 \end{bmatrix} = B + A$$

και

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -8 \\ -1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Ο **βαθμωτός πολλαπλασιασμός** λA ενός πίνακα $A = (a_{ij})_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,m}$ και ενός αριθμού $\lambda \in \mathbb{F}$ είναι ο πίνακας $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,m}$ δηλ. ο πίνακας με στοιχεία που δίνονται πολλαπλασιάζοντας κάθε στοιχείο του A με το λ. Για παράδειγμα,

$$5\begin{bmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 1 & -4 & 2 \\ -3 & 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -10 & -35 \\ 5 & -20 & 10 \\ -15 & 5 & 30 \end{bmatrix}$$

$$2i\begin{bmatrix} i & 2 & -3 \\ 3i & -5 & 6 \\ -2 & 2i+1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4i & -6i \\ -6 & -10i & 12i \\ -4i & 2i-4 & 6i \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιασμός πινάκων έχει νόημα μόνο όταν ο αριθμός των στηλών του πρώτου ισούται με τον αριθμό των γραμμών του δευτέρου και ορίζεται ως εξής: αν $A = (a_{ij})_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,m}$ και $B = (b_{ij})_{i=1,\ldots,m}^{j=1,\ldots,p}$, τότε το γινόμενο AB των A και B είναι ο πίνακας $C = (c_{ij})_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,p}$ με

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{im} \cdot b_{mj}$$

για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$ και $j = 1, 2, \ldots, p$.

Για παράδειγμα, αν

$$A = (a_{ij})_{i=1,2,3}^{j=1,2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = (b_{ij})_{i=1,2}^{j=1,2,3} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

τότε ο πίνακας $C = AB = (c_{ij})_{i=1,2,3}^{j=1,2,3}$ έχει στοιχεία

$$\begin{aligned}
c_{11} &= a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} \\
c_{12} &= a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\
c_{13} &= a_{11} \cdot b_{13} + a_{12} \cdot b_{23} \\
c_{21} &= a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} \\
c_{22} &= a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \\
c_{23} &= a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23} \\
c_{31} &= a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} \\
c_{32} &= a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22} \\
c_{33} &= a_{31} \cdot b_{13} + a_{32} \cdot b_{23}
\end{aligned}$$

Ισχύει η **επιμεριστική ιδιότητα** στον πολλαπλασιασμό πινάκων: αν A, B, C, D είναι $n \times m$, $m \times p$, $m \times p$, $p \times q$ πίνακες αντίστοιχα, τότε $A(B+C) = AB+AC$ και $(B+C)D = BC+CD$. Για πίνακες A, B, C, τα γινόμενα $(AB)C$ και $A(BC)$ ορίζονται αν και μόνο αν το πλήθος των στηλών του πίνακα A ισούται με το πλήθος των γραμμών του πίνακα B και το πλήθος των στηλών του πίνακα B ισούται με το πλήθος των γραμμών του πίνακα C. Στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι $(AB)C = A(BC)$, δηλ. ισχύει η μεταθετική ιδιότητα.
Αν A, B δυο $n \times n$ πίνακες, τότε ορίζονται τα γινόμενα AB και BA αλλά εν γένει δεν ισούνται (βρείτε ενα αντι-παράδειγμα).

Ο $n \times n$ πίνακας του οποίου τα στοιχεία στη διαγώνιο είναι ίσα με τη μονάδα και ολα τα υπόλοιπα είναι μηδέν λέγεται **μοναδιαίος πίνακας** και συμβολίζεται με $I_{n\times n}$, δηλ.

$$I_{n\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Για κάθε $n \times m$ πίνακα A ισχύει

$$I_{n\times n}A = AI_{m\times m} = A.$$

Ο χώρος των $n \times m$ πινάκων με στοιχεία στο $\mathbb{F}$ συμβολίζεται με $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{F})$. Ο χώρος $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ εφοδιασμένος με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού πινάκων είναι **δακτύλιος** με μοναδιαίο στοιχείο τον πίνακα $I_{n\times n}$.

Άσκηση 1.1.1. *Έστω $A, B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{F})$. Δείξτε ότι $AB = BA$ αν και μόνο αν $A = \lambda I_{n\times n}$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{F}$.*

Ορισμός 1.1.1. *Λέμε ότι ένας πίνακας είναι σε **κλιμακωτή μορφή** αν:*

1. *Οι μη μηδενικές γραμμές του προηγούνται των μηδενικών γραμμών του.*
2. *Το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο (ηγετικό στοιχείο) κάθε γραμμής είναι σε δεξιότερη θέση από το αντίστοιχο μη μηδενικό στοιχείο της προηγούμενης γραμμής.*

*Επιπλέον λέμε ότι είναι σε **ανηγμένη** κλιμακωτή μορφή αν εκτός από αυτά ισχύουν τα εξής:*

1. *Το ηγετικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής είναι το 1.*
2. *Κάθε στήλη που περιέχει το ηγετικό στοιχείο 1 μιας γραμμής έχει όλα τα υπόλοιπα μηδενικά.*

Παραδείγματα 1.1.1.

Ο πίνακας

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

είναι ανηγμένος κλιμακωτός, ο πίνακας

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

είναι κλιμακωτός, ενω ο πίνακας

$$C := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

δεν είναι κλιμακωτός.

Ορισμός 1.1.2. *Έστω A και B $n \times m$ και $n \times k$ πίνακες αντίστοιχα. Ο* ***επαυξημένος*** *πίνακας $[A|B]$ είναι ο $n \times (m+k)$ πίνακας $[A\,B]$.*

Παραδείγματα 1.1.2.

Έστω οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ Τότε, ο αντίστοιχος επαυξημένος πίνακας είναι ο

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών

Έστω πίνακας $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n}$. Στοιχειώδεις μετασχηματισμός γραμμών ονομάζεται η εφαρμογή στον πίνακα ενός συνδυασμού των πιο κάτω διαδικασιών[1]:

1. Πολλαπλασιασμός και των δύο μελών μιας γραμμής με μια μη μηδενική σταθερά: Πολλαπλασιάζουμε την $i-$γραμμή με μια σταθερά $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{22} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \xrightarrow{r_i \to \lambda r_i} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{22} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} + \lambda a_{j1} & a_{i2} + \lambda a_{j2} & \dots & a_{in} + \lambda a_{jn} \\ \vdots & & & \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

2. Αντικατάσταση μιας γραμμής με το άθροισμα αυτής με ενα πολλαπλάσιο μιας άλλης γραμμής: Πολλαπλασιάζουμε την $i-$γραμμή με μια σταθερά $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{22} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_i + \lambda r_j} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{22} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

[1] Σημείωση: Κάθε εφαρμογή γραμμοπράξης συμβολίζεται με ενα τόξο με την αντίστοιχη πράξη από πάνω του. Για παράδειγμα, το

$$\xrightarrow{r_2 \to r_2 - 3r_1}$$

σημαίνει ότι αφαιρέσαμε από τη γραμμή r_2 το τριπλάσιο της γραμμής r_1

Ορισμός 1.1.3. *Ένας πίνακας της μορφής*

$$L = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

λέγεται κάτω τριγωνικός (ή αριστερά τριγωνικός). Ένας πίνακας της μορφής

$$U = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

λέγεται άνω τριγωνικός (ή δεξιά τριγωνικός).
Ένας $n \times n$ πίνακας λέγεται ***διαγώνιος*** *αν όλα τα στοιχεία του πλην της διαγωνίου είναι ίσα με μηδέν.*

Δηλ. ένας πίνακας $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ λέγεται άνω τριγωνικός αν

$$\forall a_{ij} \text{ με } i < j \implies a_{ij} = 0$$

και κάτω τριγωνικός αν

$$\forall a_{ij} \text{ με } i > j \implies a_{ij} = 0.$$

Ένας διαγώνιος πίνακας είναι ταυτόχρονα άνω και κάτω τριγωνκός.

Θεώρημα 1.1.1. *Κάθε πίνακας $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{F})$ είναι γραμμοισοδύναμος με έναν ανω ή κάτω τριγωνικό πίνακα.*

Ασκήσεις 1.1.1.

1. Βρείτε όλους τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha,\ \beta,\ k$ ώστε να ισχύει $A^2 - \beta A + 10 I_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 5 & \alpha \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

.

2. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 0 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε έναν πίνακα B με θετικά διαγώνια στοιχεία τέτοιο ώστε $A^2 = B$.

3. Έστω
$$A = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix},$$
όπου $b < 0$. Αν $A^2 = I_{2\times 2}$, βρείτε τα a, b.

4. Έστω A, B πίνακες με $A^2 = \mathbf{0}$ και $AB = BA$. Αν $M = A + B$, δείξτε οτι $M^{k+1} = B^k(B + (k+1)A)$, για κάθε φυσικό αριθμό k.

5. Αν οι $n \times n$ πίνακες $A = (\alpha_{ij})$ και $B = (\beta_{ij})$ είναι διαγώνιοι, τότε ο πίνακας $C = AB = (\gamma_{ij})$ είναι επίσης διαγώνιος με $\gamma_{ii} = \alpha_{ii}\beta_{ii},\ 1 \leq i \leq n$.

6. Αν A, B είναι άνω τριγωνικοί τετραγωνικοί πίνακες, δείξτε οτι και ο AB είναι άνω τριγωνικός. Επίσης δείξτε οτι αν $A = (\alpha_{ij})_{n\times n}$ και $B = (\beta_{ij})_{n\times n}$ είναι οι άνω τριγωνικοί πίνακες και $AB = (\gamma_{ij})$, τότε $\gamma_{ii} = \alpha_{ii}\beta_{ii},\ 1 \leq i \leq n$.

7. Ποιοί από τους πιο κάτω πίνακες είναι κλιμακωτή μορφή και ποιοί σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1.1.1 Ο ανάστροφος ενός πίνακα

Ορισμός 1.1.4. *Έστω $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{F})$. Ο* ***ανάστροφος*** *του A είναι ο πίνακας $B = (b_{i,j})$ με $b_{i,j} = a_{j,i}$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $j \in \{1, 2, \dots, m\}$. και συμβολίζεται με A^T ή με A^t.*

Με άλλα λόγια, ο ανάστροφος ενός πίνακα A προκύπτει από τον A αν εναλλάξουμε τις στήλες με τις γραμμές του.[2]. Για παράδειγμα, αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$, τότε $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$.

Πρόταση 1.1.1. *Έστω $A, B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{F})$, $C \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{F})$ και $\lambda \in \mathbb{F}$. Τότε*

1. $(A^T)^T = A$.
2. $(A \pm \lambda B)^T = A^T \pm \lambda B^T$.
3. $(AC)^T = C^T A^T$.

Απόδειξη. Άσκηση $\square$

[2] Ο ανάστροφος ενός πίνακα εισήχθηκε το 1858 από τον Μαθηματικό Arthur Cayley

1.1.2 Ορίζουσα πίνακα

Κίνητρο: Έστω $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$ μη μηδενικό. Έστω $y = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$ συγγραμμικό με το x, δηλ. υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}_*$ τέτοιο ώστε $x = \lambda y$. Ισοδύναμα, $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$, δηλ.

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0. \tag{1.1}$$

Αντίστροφα, αν ισχύει η (1.1), τότε τα διανύσματα x και y είναι συγγραμμικά (δηλ. γρ. εξαρτημένα). Συνεπώς, η (1.1) αποτελεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για τη συγγραμμικότητα δυο διανυσμάτων στο επίπεδο. Συμβολίζουμε την ποσότητα στο αριστερό μέλος της (1.1) ως

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \tag{1.2}$$

και αν A ο πίνακας που έχει στήλες τα διανύσματα x και y, τότε με $\det(A)$ συμβολίζουμε την ποσότητα (1.7) και θα την καλούμε **την ορίζουσα του πίνακα** A.
Μας είναι γνωστό ότι αν για τις ευθείες (e_1) : $x_1 x + x_2 y = c_1$ και (e_2) : $y_1 x + y_2 y = c_2$ με $x_1, x_2, y_1, y_2 \neq 0$ ισχύει $x_1/y_1 \neq x_2/y_2$, τότε οι ευθείες αυτές τέμνονται, δηλ. έχουν ένα κοινό σημείο. Η τελευταία είναι ισοδύναμη με την

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{1.3}$$

Συνεπώς, μια αναγκαία συνθήκη για να τέμνονται οι δύο ευθείες (και ισοδύναμα αν το σύστημα των εξισώσεων των δυο ευθειών έχει μοναδική λύση) είναι η (1.8). Η συνθήκη αυτή είναι και ικανή.
Επίσης, παρατηρήστε ότι αν $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$, τότε

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

(δηλ. αν $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, τότε $\det(A) = \det(A^T)$) και

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} y_1 & x_1 \\ y_2 & x_2 \end{vmatrix}$$

Η ορίζουσα ενός 2×2 πίνακα με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς, είναι ενα πολύ βοηθητικό εργαλείο για τη μελέτη γρ. ανεξαρτησίας διανυσμάτων στο επίπεδο και στην επίλυση συστήματος δυο ευθειών. Ορίζοντας την ορίζουσα ενός $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,3} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ πίνακα με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς ως

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{31}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \tag{1.4}$$

λαμβάνουμε τις 'καλές' ιδιότητες που παρατηρήσαμε στην περίπτωση της διάστασης 2. Για απομνημόνευση του πιο πάνω ορισμού, παρατηρήστε

$$\begin{aligned}
\det(A) &\equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&:= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{31}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{31}(a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}) \\
&= (-1)^{1+1}a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{3+1}a_{31} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{13} \\ a_{22} & a_{32} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Μπορούμε να ορίσουμε ως **απεικόνιση** ορίζουσα, μια απεικόνιση η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες που είδαμε:

Ορισμός 1.1.5. *Μια απεικόνιση $D : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ λέγεται* απεικόνιση ορίζουσας *αν ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:*

1. *Η D είναι γραμμική απεικόνιση ως προς κάθε γραμμή:*

$$\text{αν } A := \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}, \text{ τότε } D \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{i-1} \\ \lambda A_i \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \lambda D \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_i \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{F}$$

και αν $A_i = X + Y$, τότε

$$D \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{i-1} \\ X+Y \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{i-1} \\ X \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + D \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{i-1} \\ Y \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}.$$

2. *Αν δύο γραμμές του A είναι ίσες, τότε $D(A) = 0$.*

3. *$D(I_{n\times n}) = 1$.*

Από τις ιδιότητες 1.-3. έπονται εύκολα (άσκηση) οι ακόλουθες:

1.

$$\text{Αν } A := \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}, \text{ και } A_i = \sum_{k=1}^{\mu} \lambda_k B_k, \ (\lambda_k \in \mathbb{F}), \text{ τότε}$$

$$D(A) = D \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{i-1} \\ \sum_{k=1}^{\mu} \lambda_k B_k \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{\mu} \lambda_k D \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{i-1} \\ B_k \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}.$$

2. Έστω

$$A := \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_i \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad A' := \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{i-1} \\ A_j \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ A_{j-1} \\ A_i \\ A_{j+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix},$$

τότε $D(A) = D(A')$, δηλαδή αν ο A' προκύπτει από τον A με εναλλαγή δύο γραμμών, τότε $D(A) = -D(A')$.

3. Έστω

$$A := \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_i \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad A' := \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_i + \lambda A_k \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{F}, \quad i \neq k,$$

τότε $D(A) = D(A')$, δηλ, αν προσθέσω σε μια γραμμή ένα πολλαπλάσιο μιας άλλης, τότε η ορίζουσα δεν αλλάζει.

4. Αν $A := \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$ όπου $A_1,\ A_2, \ldots, A_n$ γραμμικά εξαρτημένα στοιχεία του $\mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{F})$, τότε $D(A) = 0$.

Παραδείγματα 1.1.3. *1. Η απεικόνιση $f : \mathcal{M}_{1\times 1}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ με $x \mapsto f(x) = x$ είναι απεικόνιση ορίζουσας.*

2. Η απεικόνιση $\phi : \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ με

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \mapsto \phi(A) := a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

είναι απεικόνιση ορίζουσας.

Αρκετά συγγράμματα 'ορίζουν' την ορίζουσα συνάρτηση $\det(A)$ ενός $n \times n$ πίνακα A αναδρομικά ως εξής:

(i) Αν $A = [a]$ ενας 1×1 πίνακας, τότε $\det(A) = a$.

(ii) Αν $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, ενας 2×2 πίνακας, τότε

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

(iii) Αν $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ ενας $n \times n$ πίνακας, τότε

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} \det(A_{1k})$$

όπου A_{1k} είναι ο $(k-1) \times (k-1)$ πίνακας που προκύπτει από τον πίνακα A αν αφαιρέσουμε την πρώτη γραμμή και την k στήλη του. Οι πίνακες αυτοί λέγονται οι **συμπαράγοντες** του πίνακα A και η ορίζουσα του κάθε ενός από αυτούς λέγεται **υποορίζουσα** του A. Το πιο πάνω ανάπτυγμα λέγεται το **ανάπτυγμα κατά Laplace της ορίζουσα του πίνακα** A **ως προς την πρώτη στήλη**. Μπορούμε να θεωρήσουμε ανάπτυγμα ως προς οποιαδήποτε γραμμή ή στήλη.

Αντιλαμβανόμαστε ότι ο τρόπος αυτός δεν Μπορεί να αποτελέσει εναν καλό ορισμό για την ορίζουσα ενός πίνακα. Για να βρούμε συγκεκριμένο τύπο υπολογισμού της ορίζουσας πίνακα ο οποίος να διατηρεί τις ιδιότητες που αναφέρθηκαν πιο πάνω, χρειαζόμαστε συνδυαστικά επιχειρήματα και αυτό θα γίνει μέσα από την έννοια της μετάθεσης:

Ορισμός 1.1.6. *Έστω $n \in \mathbb{N}$. Μετάθεση του συνόλου $\{1, 2, \ldots, n\}$ λέγεται οποιαδήποτε απεικόνιση $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ 1-1 και επί. Με S_n συμβολίζουμε το σύνολο όλων των μεταθέσεων $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Κάθε $\sigma \in S_n$ μπορεί να παρασταθεί ως διατεταγμένο ζεύγος στοιχείων του συνόλου $\{1, 2, \ldots, n\}$. Για παράδειγμα, η $\sigma \in S_3$ με $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 1$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως $\sigma(1, 2, 3) = (2, 3, 1)$.

Παρατήρηση 1.1.1.

1. Με id συμβολίζουμε την ταυτοτική μετάθεση, δηλ. τη μετάθεση για την οποία $id(i) = i, \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

2. Αποδεικνύεται οτι ο πληθάριθμος του συνόλου S_n είναι $n!$. Για παράδειγμα,η $S_2 = \{id, \sigma_1\}$, όπου $\sigma_1(1, 2) = (2, 1)$.

3. Για κάθε $\sigma \in S_n$, έχουμε οτι $\{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\} = \{1, 2, \ldots, n\}$.

4. Κάθε $\sigma \in S_n$ μπορεί να γραφτεί ως σύνθεση (λέμε γινόμενο) δύο ή περισσοτέρων μεταθέσεων. Για παράδειγμα, η $\sigma \in S_3$ της πρώτης παρατήρησης μπορεί να γραφτεί ως $\sigma_1 \circ \sigma_2$, όπου $\sigma_2(1, 2, 3) = (1, 3, 2)$ και $\sigma_2(1, 2, 3) = (3, 2, 1)$.

Ορισμός 1.1.7. *Αν η $\sigma \in S_n$ γράφεται ως σύνθεση άρτιου το πλήθος μεταθέσεων, τότε λέγεται άρτια και στην αντίθετη περίπτωση λέγεται περιττή. Η απεικόνιση $\mathrm{sgn} : S_n \to \{\pm 1\}$ με*

$$\mathrm{sgn}(\sigma) := \begin{cases} +1, & \text{αν η } \sigma \text{ είναι άρτια} \\ -1, & \text{αν η } \sigma \text{ είναι περιττή} \end{cases}$$

λέγεται πρόσημο της (μετάθεσης).

Ορισμός 1.1.8 (Ορίζουσας). *Έστω* $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$*. Ορίζουσα του πίνακα* A *λέγεται ο αριθμός*

$$\sum_{\sigma\in S_n}\left(\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{k=1}^{n}a_{k,\sigma(k)}\right)=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\,a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}\cdots a_{n,\sigma(n)} \tag{1.5}$$

ο οποίος συμβολίζεται με $\det(A)$*.*

Παρατήρηση 1.1.2.

1. Αν id είναι η ταυτοτική μετάθεση, τότε $\operatorname{sgn}(\mathrm{id}) = 1$. Έτσι, ο τύπος (1.5) γίνεται

$$\det(A)=\sum_{\sigma\in S_n}\left(\operatorname{sgn}(\mathrm{id})\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{k=1}^{n}a_{k,\sigma(k)}\right).$$

2. Για κάθε $\sigma \in S_n$, έχουμε οτι $\{\sigma(1),\ldots,\sigma(n)\} = \{1,2,\ldots,n\}$.

Λήμμα 1.1.1. *Για κάθε* $\sigma,\lambda \in S_n$*, έχουμε οτι*

$$\operatorname{sgn}(\sigma\circ\lambda)=\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot\operatorname{sgn}(\lambda). \tag{1.6}$$

Η πιο πάνω ιδιότητα μας επιτρέπει να αποδείξουμε την

Πρόταση 1.1.2. *Έστω* $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *και έστω* $\lambda \in S_n$ *σταθεροποιημένη. Τότε,*

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}) &= \sum_{\mu\in S_n}\left(\operatorname{sgn}(\mu)\operatorname{sgn}(\lambda)\prod_{k=1}^{n}a_{\lambda(k)\mu(k)}\right)\\ &= \sum_{\mu\in S_n}\left(\operatorname{sgn}(\mu)\operatorname{sgn}(\lambda)\prod_{k=1}^{n}a_{\mu(k)\lambda(k)}\right)\end{aligned}$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε μόνο την πρώτη ισότητα. Η δεύτερη εξάγεται με παρόμοιο επιχείρημα. Έστω $\lambda \in S_n$ τέτοια ώστε $\lambda\circ\sigma = \mu$. τότε,

$$\prod_{k=1}^{n}a_{\lambda(k)\mu(k)}=\prod_{k=1}^{n}a_{\lambda(k),\lambda\circ\sigma(k)}=\prod_{k=1}^{n}a_{k,\sigma(k)} \tag{1.7}$$

(όπου $\prod$ δηλώνει το γινόμενο)
όπου η τελευταία ισότητα έπεται από τη μεταθετικότητα του πολλαπλασιασμού (η οποία μας επιτρέπει να κάνουμε αναδιάταξη των στοιχείων $a_{i,j}$ στο γίνομενο). Επίσης, από την προηγούμενη Πρόταση έχουμε οτι

$$\operatorname{sgn}(\mu)=\operatorname{sgn}(\lambda\circ\sigma)=\operatorname{sgn}(\lambda)\cdot\operatorname{sgn}(\nu). \tag{1.8}$$

Από τις (1.5) – (1.8) έπεται το ζητούμενο. □

Παραδείγματα 1.1.4. *1. Αν* $A = (a_{1,1})$ *ένας* 1×1 *πίνακας, τότε,*

$$\det(A)=\det(a_{11})=\operatorname{sgn}(1)\,a_{11}=a_{11}$$

2. *Αν* $A=(a_{i,j})_{i,j=1}^{2}$ 2×2 *πίνακας, τότε*

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{\sigma\in S_2}\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{k=1,2}a_{k,\sigma(k)}\\ &= \operatorname{sgn}(1,2)\,a_{11}a_{22}+\operatorname{sgn}(2,1)\,a_{12}a_{21}\\ &= a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\end{aligned}$$

η οποία συμφωνεί με την (1.1).

3. *Αν* $A=(a_{i,j})_{i,j=1}^{3}$ 3×3 *πίνακας, τότε*

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{\sigma\in S_3}\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{k=1,2,3}a_{k,\sigma(k)}\\ &= \operatorname{sgn}(1,2,3)\,a_{11}a_{22}a_{33}+\operatorname{sgn}(1,3,2)\,a_{11}a_{23}a_{32}\\ &\quad+\operatorname{sgn}(2,1,3)\,a_{12}a_{21}a_{33}+\operatorname{sgn}(2,3,1)\,a_{12}a_{23}a_{31}\\ &\quad+\operatorname{sgn}(3,1,2)\,a_{13}a_{21}a_{32}+\operatorname{sgn}(3,2,1)\,a_{13}a_{22}a_{31}\\ &= a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\\ &\quad -a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}\\ &\quad +a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}.\end{aligned}$$

η οποία συμφωνεί με την (1.4).
Η τελευταία σχέση μπορεί να γραφτεί και ως

$$\det(A)=\frac{1}{6}\sum_{i,j,k,r,s,t\in\{1,2,3\}}\operatorname{sgn}(i,j,k)\operatorname{sgn}(r,s,t)a_{i,r}a_{j,s}a_{k,t}.$$

Αν $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$, γράφουμε $\det(A)=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$.

Θεώρημα 1.1.2. *Έστω* $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ *και* $B=(b_{ij})_{i,j=1}^{n}$ *πίνακες με στοιχεία στο* $\mathbb{R}$. *Τότε,*

$$det(AB)=det(A)det(B).$$

Απόδειξη. Θέτουμε $C:=AB$. Ξέρουμε οτι, μέσω πεπερασμένου το πλήθος γραμμοπράξεων $\hat{E}_1,\ldots,\hat{E}_{m'}$, ο A είναι ισοδύναμος με έναν άνω τριγωνικό πίνακα A'. Έστω C' ο πίνακας που προκύπτει αν στο C εφαρμόσουμε τους μετασχηματισμούς $\hat{E}_1,\ldots,\hat{E}_{m'}$. Τότε, μπορούμε εύκολα να δούμε οτι $C'=A'B$. Όμως, από τον τύπο (1.5) της ορίζουσας, προκύπτει οτι (λόγω των μετασχηματισμών $\hat{E}_i$) υπάρχει $a\in R$ τέτοιοι ώστε $a\det(A')=\det(A)$ και $a\det(C')=det(C)$. Τώρα, είναι $(C')^t=(A'B)^t=B^t\,(A')^t$. Ο πίνακας B^t μέσω πεπερασμένου το πλήθος γραμμοπράξεων $\hat{K}_1,\ldots,\hat{K}_{m''}$, ο A είναι ισοδύναμος με έναν κάτω τριγωνικό πίνακα $(B^t)'$. Έστω C'' ο πίνακας που προκύπτει από τον $(C')^t$ όταν σε αυτόν εφαρμόσουμε τους μετασχηματισμούς $K_1,\ldots,K_{m''}$. Τότε,

$$C''=\left(B^t\right)'\left(A'\right)^t.$$

Όπως και πρίν, υπάρχει $b\in R$ τέτοιος ώστε $b\det\left(\left(B^t\right)'\right)=\det\left(B^t\right)$ και $b\det(C'')=\det((C')^t)$. Ο $(A')^t$ είναι ένας κάτω τριγωνικός πίνακας και ο $(B^t)'(A')^t$ είναι ένας κάτω τριγωνικός πίνακας του οποίου τα διαγώνια στοιχεία είναι τα γινόμενα των διαγωνίων στοιχείων των $(B^t)'$ και $(A')^t$. Τέλος, είναι

$$\det\left((B^t)'\,(A')^t\right) = \det\left((B^t)'\right)\det\left((A')^t\right).$$

Έτσι,

$$\begin{aligned}
\det(C) &= a\det(C') \\
&= a\det((C')^t) \\
&= ab\det(C'') \\
&= ab\det((B^t)'(A')^t) \\
&= ab\det((B^t)')det((A')^t) \\
&= ab\det((A')^t)b\det((B^t)') \\
&= ab\det(A')det(B^t) \\
&= \det(A)det(B).
\end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 1.1.3. *Έπεται (επαγωγικά) ότι για κάθε φυσικό αριθμό k και $n \times n$ πίνακα A, τότε*

$$\det(A^k) = (\det(A))^k.$$

Άσκηση 1.1.2. *Ισχύει ότι αν A, B δυο $n \times n$ μη-μηδενικοί πίνακες με $AB = 0_{n\times n}$, τότε* $\det(A) = \det(B) = 0$;

Άσκηση 1.1.3. *Δείξτε ότι η ορίζουσα κάθε άνω ή κάτω τριγωνικού πίνακα είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της διαγωνίου του.*

Θα δούμε τώρα μερικές πολύ σημαντικές ιδιότητες που έχει η ορίζουσα ενός πίνακα και οι οποίες θα μας διευκολύνουν στους υπολογισμούς:

Πρόταση 1.1.3. *Ισχύουν τα πιο κάτω:*

1. *Η εναλλαγή δυο γραμμών ή στηλών σε μια ορίζουσα αλλάζει το πρόσημό της.*
2. *Προσθέτωντας ενα πολλαπλάσιο μιας γραμμής (αντ. στήλης) σε μια άλλη γραμμή (αντ. στήλη) δεν αλλάζει το αποτέλεσμα της ορίζουσας.*
3. *Πολλαπλασιασμός μιας γραμμής/στήλης με ενα $\lambda \in \mathbb{F}$ ισοδυναμεί με πολλπλασιασμό της ορίζουσας με τον αριθμό αυτό.*
4. *Αν δυο γραμμές ή στήλες ενός πίνακα είναι ίσες, τότε η ορίζουσά του είναι 0.*

Απόδειξη. Άσκηση □

Παρατήρηση 1.1.4. *Έπεται ότι αν $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ και $\lambda \in \mathbb{F}$, τότε*

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A).$$

Επίσης, πρέπει να σημειώσουμε ότι δεν ισχύει εν γένει ότι

$$\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$$

για $A, B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{F})$.

Παραδείγματα 1.1.5.

1. Να υπολογιστεί η ορίζουσα του πιο κάτω πίνακα:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$
Λύση Θα αναπτύξουμε την $\det(A)$ ως προς την πρώτη στήλη:
$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{k=1}^{3}(-1)^{k+1}a_{k1}detA_{k1} \\ &= (-1)^{1+1}1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}0\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &\quad +(-1)^{3+1}0\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2-6=-4. \end{aligned}$$

2. Να υπολογιστεί η ορίζουσα του πιο κάτω πίνακα:
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$
Λύση Ο πίνακας B είναι άνω τριγωνικός, άρα η ορίζουσά του είναι το γινόμενο των στοιχείων της διαγωνίου του:
$$\det(B) = 1\cdot 5\cdot(-1)\cdot 7 = -35.$$

3. Να υπολογιστεί η ορίζουσα του πιο κάτω πίνακα:
$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
Λύση Θα αναπτύξουμε ως προς την τρίτη στήλη:
$$\begin{aligned} \det(\Gamma) &= \sum_{k=1}^{3}(-1)^{k+1}a_{k3}\det(A_{k3}) \\ &= (-1)^{1+3}0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &\quad +(-1)^{3+3}(-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1. \end{aligned}$$
Διαφορετικά:
$$\begin{aligned} \det(\Gamma) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \overset{r_2\to r_2+r_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \overset{r_3\to r_3-r_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} \\ &\overset{\text{ως προς την 1η στήλη}}{=} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1. \end{aligned}$$

4. Να υπολογιστεί η ορίζουσα του πιο κάτω πίνακα:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Λύση Ο πίνακας Δ είναι άνω τριγωνικός, άρα $\det(\Delta) = 2 \cdot 3 \cdot 6 = 36$.

5. Να υπολογιστεί η ορίζουσα του πιο κάτω πίνακα:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 7 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Λύση Έχουμε:

$$\begin{aligned} \det(\Sigma) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 7 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \overset{r_2 \to r_2 + r_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \overset{r_3 \to r_3 + r_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &\overset{\text{ως προς την 1η στήλη}}{=} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2. \end{aligned}$$

6. Να υπολογιστεί η ορίζουσα του πιο κάτω πίνακα:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -5 & 0 & 10 \\ -9 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

Λύση Έχουμε:

$$\begin{aligned} \det(\Pi) &= \begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -5 & 0 & 10 \\ -9 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 30 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot 30 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 60 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -11 \end{vmatrix} \\ &\overset{\text{ως προς την 1η στήλη}}{=} -660. \end{aligned}$$

7. Να υπολογιστεί η ορίζουσα

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \beta\gamma & \gamma\alpha & \alpha\beta \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

και να δειχθεί οτι αν $\Delta = 0$, και $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$, τότε $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

Λύση

$$
\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \beta\gamma & \gamma\alpha & \alpha\beta \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_1 \to r_1 - r_2}{=} \begin{vmatrix} \alpha^2-\beta^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \beta\gamma-\gamma\alpha & \gamma\alpha & \alpha\beta \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&\overset{r_2 \to r_2 - r_3}{=} \begin{vmatrix} \alpha^2-\beta^2 & \beta^2-\gamma^2 & \gamma^2 \\ \beta\gamma-\gamma\alpha & \gamma\alpha-\alpha\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha^2-\beta^2 & \beta^2-\gamma^2 \\ \beta\gamma-\gamma\alpha & \gamma\alpha-\alpha\beta \end{vmatrix} \\
&= (\alpha^2-\beta^2)(\gamma\alpha-\alpha\beta)-(\beta^2-\gamma^2)(\beta\gamma-\gamma\alpha) \\
&= \alpha(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)(\gamma-\beta)-\gamma(\beta-\gamma)(\beta+\gamma)(\beta-\alpha) \\
&= (\alpha-\beta)(\gamma-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha+\beta+\gamma).
\end{aligned}
$$

Άρα, αν $\Delta = 0$, και $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$, έπεται οτι $\alpha+\beta+\gamma = 0$.

Ασκήσεις 1.1.2.

1. Να λυθεί ως προς τον άγνωστο x η εξίσωση
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Έστω $a \in \mathbb{R}$ και
$$A = \begin{bmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a & a & a & & x \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}).$$
Δείξτε ότι
$$\det(A) = (x-a)^{n-1}[x+(n-1)a].$$

3. Έστω $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ αντισυμμετρικός (δηλ. $A^T = -A$). Αν $n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}$, δείξτε οτι $\det(A) = 0$. [Υπόδειξη: $\det(-A) = (-1)^n \det(A)$].

1.1.3 Ο αντίστροφος ενός πίνακα

Ορισμός 1.1.9. *Ένας $n \times n$ πίνακας A λέγεται* ***αντιστρέψιμος*** *αν υπάρχει ένας πίνακας B τέτοιος ώστε*
$$AB = BA = I_{n\times n} \tag{1.9}$$
Στην περίπτωση που υπάρχει τέτοιος πίνακας, τότε λέγεται ***ο αντίστροφος του*** *A και συμβολίζεται με A^{-1}. Στην περίπτωση που δεν υπάρχει τέτοιος πίνακας, λέμε ότι ο A είναι* ***μη-αντιστρέψιμος****.*

Το επόμενο Θεώρημα μας λέει οτι κάθε πίνακας μπορεί να πάρει (μέσω γραμμοπράξεων) τη μορφή ανηγμένου κλιμακωτού πίνακα.

Θεώρημα 1.1.3. *Κάθε πίνακας $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{F})$ είναι γραμμοισοδύναμος με έναν ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα.*

Πόρισμα 1.1.1.
1. *Έστω $A, B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{F})$ δύο γραμμοισοδύναμοι πίνακες. Τότε, ο A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν ο B είναι αντιστρέψιμος.*
2. *Έστω $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας. Τότε, ο A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν ο $A = I_{n\times n}$.*

Θεώρημα 1.1.4. *Έστω $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$. Τότε, ο A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν* $\det(A) \neq 0$.

Απόδειξη. Έστω οτι ο A είναι αντιστρέψιμος. Τότε, από το Πόρισμα (1.1.1), έχουμε οτι αυτός είναι γραμμοσιοδύναμος με τον $I_{n\times n}$. Έτσι, $\det(A) = \det(I_{n\times n}) = 1 \neq 0$. Αντίστροφα, έστω οτι $\det(A) \neq 0$. Ξέρουμε οτι ο A είναι γραμμοσιοδύναμος με έναν ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα E. Ο E είναι άνω τριγωνικός και μαλιστα $\det(E) = 1 \neq 0$. Αλλά, αφού ο E προκύπτει από τον A με πεπερασμένο το πλήθος γραμμοπράξεις, έπεται οτι $\det(A) = c\det(E)$, για κάποιο $c \neq 0$. □

Υπολογισμός ορίζουσας 2×2 πίνακα

Έστω $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ αντιστρέψιμος. Τότε, υπάρχει $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ τέτοιος ώστε $AB = BA = I_{2\times 2}$. Τότε

$$BA = I_{2\times 2} \iff \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} & a_{12}b_{11} + a_{22}b_{b21} \\ a_{11}b_{21} + a_{21}b_{22} & a_{12}b_{21} + a_{22}b_{b22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και εξισώνοντας στοιχείο με στοιχείο στους δυο πάνω πίνακας και κατόπιν αναδιάταξης των όρων έχουμε (άσκηση)

$$b_{11} = \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{a_{22}}{\det(A)}, \quad b_{12} = \frac{a_{12}}{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}} = -\frac{a_{12}}{\det(A)},$$

$$b_{21} = \frac{a_{21}}{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}} = -\frac{a_{21}}{\det(A)}, \quad b_{22} = \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{a_{11}}{\det(A)}.$$

Εύκολα βλέπουμε ότι για τα πιο πάνω $B_{i,j}$, $i, j = 1, 2$ έχουμε ότι και $AB = I_{2\times 2}$. Συνεπώς,

$$B = A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}}{\det(A)} & -\frac{a_{12}}{\det(A)} \\ -\frac{a_{21}}{\det(A)} & \frac{a_{11}}{\det(A)} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

Ο πίνακας $\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$ λέγεται **ο προσαρτημένος (adjugate)** του πίνακα A και συμβολίζεται με $\mathrm{adj}(A)$. Ουσιαστικά είναι ο πίνακας που έχει ως στοιχεία τους συμπαράγοντες A_i, $i = 1, 2, 3, 4$ του πίνακα A με αντίστοιχα πρόσημα $(-1)^i$.

Υπολογισμός ορίζουσας 3×3 πίνακα

Με τον ίδιο τρόπο όπως πιο πάνω, αν $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{3} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ αντιστρέψιμος, τότε

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) \tag{1.11}$$

όπου

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} +A_{11} & -A_{12} & +A_{13} \\ -A_{21} & +A_{22} & -A_{23} \\ +A_{31} & -A_{32} & +A_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ \\ -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ \\ +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

Παραδείγματα 1.1.6.

Έστω ο 3×3 πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Έχουμε

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

και άρα ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Θα βρούμε τον A^{-1}.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) = \operatorname{adj}(A).$$

Είναι

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ασκήσεις 1.1.3.

1. Να βρείτε τον αντίστροφο του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$.

2. Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και $AB = AC$, τότε $B = C$.

3. Να ελέγξετε αν ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος και στην περίπτωση που είναι, να βρείτε τον A^{-1}.

4. Αν ο πίνακας $A = (\alpha_{ij})_{n\times n}$ είναι διαγώνιος με $\alpha_{ii} \neq 0$ για $i = 1, 2, \ldots, n$, δείξτε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}^{-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_{22}^{-1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33}^{-1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & \alpha_{nn}^{-1} \end{bmatrix}.$$

5. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος τέτοιος ώστε $A^2 = A$. Δείξτε οτι $\det(A) = 1$.