

Ασκήσεις που δόθηκαν σε τελικές εξετάσεις+διαγωνίσματα

❶ Να βρείτε τα πιο κάτω αναπτύγματα (κάνοντας χρήση ταυτοτήτων):

(α) $(x + 2)(x - 2)$ (β) $(x + 7)(x - 7)$ (γ) $(x - 5)(x + 5)$

(δ) $(2\alpha - 3)(2\alpha + 3)$ (ε) $(2\psi + 3)(2\psi - 3)$ (στ) $(3 - 2x)(3 + 2x)$

(ζ) $(7 + x)(7 - x)$ (η) $(\beta - 3)(\beta + 3)$ (θ) $(3\chi - \psi)(\psi + 3\chi)$

(ι) $(x + 1)^2$ (ια) $(x - 3)^2$ (ιβ) $(x + 5)^2$

(ιγ) $(2x + 3)^2$ (ιδ) $(\beta + 3)^2$ (ιε) $(2x - 5)^2$

(ιοστ) $(3x^2 + y\omega)^2$ (ιζ) $(4\alpha + \beta^3)(\beta^3 - 4\alpha)$ (ιη) $(\beta - \sqrt{5})(\beta + \sqrt{5})$

(ιθ) $\left(\alpha - \frac{4}{\alpha}\right)^2$ (ικ) $\left(\frac{\alpha}{5} + \beta\right)^2$ (ιλ) $\left(\frac{x - 4}{3}\right)^2$

[Απάντηση]

ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ
ΚΕΝΤΡΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

- 2 Αν x, y πραγματικοί αριθμοί ($x, y \neq 0$) τέτοιοι ώστε $x \cdot y = 1$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της πιο κάτω παράστασης:

$$A = (5x - y)^2 - (5x - 3)(5x + 3) - (y + 2)^2 + 4y$$

[Απάντηση]

- 3 Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $\alpha + \beta = -3$ και $\alpha \cdot \beta = 4$. Να υπολογίσετε τις τιμές των πιο κάτω παραστάσεων:

$$(α) \quad A = \alpha^2 + \beta^2 \quad (β) \quad B = (1 + 3\alpha)^2 + (1 + 3\beta)^2 + 5(\alpha + \beta)$$

[Απάντηση]

- 4 Να **αποδείξετε** τις πιο κάτω ταυτότητες:

$$(α) \quad (2x - 3y)^2 = (3x + 2y)^2 - 3y(8x + 5y) - 5(x - 2y)(x + 2y)$$

$$(β) \quad (\alpha - 2\beta)^2 - (2\beta - 3\alpha)(2\beta + 3\alpha) = 10\alpha^2 - 4\alpha\beta$$

$$(γ) \quad (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)(\alpha^4 + \beta^4)(\alpha^2 + \beta^2) = \alpha^8 - \beta^8$$

- (δ) Χρησιμοποιώντας το **αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος**, να υπολογίσετε (χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής) την αριθμητική τιμή της πιο κάτω παράστασης:

$$A = 8 \cdot 12 \cdot 10016 \cdot 104$$

[Απάντηση]

- 5 Να αντιστοιχίσετε τα αναπτύγματα της 1ης στήλης με τα γινόμενα της 2ης :

1η στήλη	2η στήλη
$\alpha^2 + \beta^2$	$(\alpha + \beta)^2$
$\alpha^2 - \beta^2$	$(\alpha + \beta)^3$
$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$	κανένα
$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$	$(\alpha - \beta)^3$
$\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$	$(\alpha - \beta)^2$
$\alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$	$(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$

- 6 Να σημειώσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό :

Η ισότητα $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2$ είναι ταυτότητα	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
Αν $\alpha + \beta = 3$, τότε $(\alpha + \beta)^2 = 9$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
$(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
Η ισότητα $(\alpha + \beta)(\beta - \alpha) = \alpha^2 - \beta^2$ είναι ταυτότητα	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

- 7 Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $x + \frac{1}{x} = 6$. Να υπολογίσετε την

αριθμητική τιμή της πιο κάτω παράστασης:

$$A = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

[Απάντηση]

- 8 Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $\alpha^2 + \beta^2 = 14$ και $\alpha - \beta = 2$. Να υπολογίσετε τις τιμές των πιο κάτω παραστάσεων:

(α) $A = \alpha \cdot \beta$ (β) $B = (\alpha + \beta)^2$ (γ) $\Gamma = \alpha^3 - \beta^3$

[Απάντηση]



- 9 Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $\alpha + \beta = -6$ και $\alpha \cdot \beta = -27$. Να υπολογίσετε τις τιμές των πιο κάτω παραστάσεων:

(α) $A = \alpha^2 + \beta^2$ (β) $B = \alpha^3 - \beta^3$

[Απάντηση]

- 10 (α) Να αποδείξετε την πιο κάτω ταυτότητα:

$$(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$$

- (β) Χρησιμοποιώντας την πιο πάνω ταυτότητα, να αποδείξετε ότι η πιο κάτω παράσταση είναι ένας θετικός αριθμός:

$$\left(\frac{2020}{2021} + \frac{2021}{2020}\right)^2 - \left(\frac{2020}{2021} - \frac{2021}{2020}\right)^2$$

[Απάντηση]

- 11 Να βρείτε τα πιο κάτω αναπτύγματα (κάνοντας χρήση ταυτοτήτων):

(α)	$(2x + 5)^2$	(β)	$(2\beta + 1)^3$	(γ)	$(\alpha - \omega)^3$
(δ)	$(5\psi - 2\chi)(5\psi + 2\chi)$	(ε)	$\left(3x^2 - \frac{1}{3}\right)\left(3x^2 + \frac{1}{3}\right)$	(στ)	$(4x - 5y)^2$
(ζ)	$(a^5 - 3\beta)(a^5 + 3\beta)$	(η)	$(4 - 3\alpha)^2$	(θ)	$\left(\frac{x - y}{4}\right)^2$
(ι)	$(2 - \sqrt{5})(2 + \sqrt{5})$	(ια)	$(5x - 2y)(5x + 2y)(25x^2 - 4y^2)$		
(ιβ)	$(4x^2 + y^2)(2x - y)(2x + y)$				

[Απάντηση]

12 Να συμπληρώσετε τα τετράγωνα, ώστε να ισχύουν οι ισότητες:

(α) $\left(\frac{x}{2} + \square\right)^2 = 25y^2 + \square + \frac{x^2}{4}$

(β) $(\square + \square)^2 = 9\beta^2 + 12\alpha\beta + \square$

(γ) $(\square + \square)^3 = x^9 + 3\square + \square + 8$

ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ
ΚΕΝΤΡΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ