1.6 Δραστηριότητες σελ. 44 - Κυρτότητα-Σημεία καμπής Συνάρτησης

Άσκηση 1

Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής:

(α) $f(x) = x^3 + 1,\ x \in \mathbb{R}$ **(β)** $h(x) = x^3 - x^2 - x + 1,\ x \in \mathbb{R}$

(γ) $k(x) = -x^3 + 3x^2 - 5,\ x \in \mathbb{R}$ **(δ)** $p(x) = x^4 - 24x^2 + 4,\ x \in \mathbb{R}$

Λύση

(α) $f(x) = x^3 + 1,\ x \in \mathbb{R}$

Η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο π.ο. της, δηλ. στο $\mathbb{R}$. Είναι

$$\begin{aligned} & f'(x) = (x^3+1)' = 3x^2 \\ \Longrightarrow\ & f''(x) = (3x^2)' \quad = 6x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Είναι $f''(x) = 0 \iff x = 0$ και αρα για $x = 0$ έχουμε υποψήφιο Σημείο Καμπής (Σ.Κ.). Κάνουμε λοιπόν τον πίνακα μεταβολών της f'' :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	$\boxed{0}$	$+$	
$f(x)$		$\frown$	Σ.Κ. $(0,1)$	$\smile$	

Αφού $f''(x) < 0,\ \forall x \in (-\infty, 0)$ έπεται ότι η f είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω) στο διάστημα αυτό και αφού $f''(x) > 0,\ \forall x \in (0, +\infty)$ έπεται ότι η f είναι κυρτή (στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω) στο διάστημα αυτό. Έτσι το σημείο $(0, f(0)) = (0,1)$ είναι Σ.Κ. του γραφήματος της f.

(β) $h(x) = x^3 - x^2 - x + 1,\ x \in \mathbb{R}$

Η συνάρτηση h είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο π.ο. της, δηλ. στο $\mathbb{R}$. Είναι

$$\begin{aligned} & h'(x) = (x^3 - x^2 - x + 1)' = 3x^2 - 2x - 1 \\ \Longrightarrow\ & h''(x) = (3x^2 - 2x - 1)' \quad = 6x - 2 = 2(3x - 1), \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Είναι $h''(x) = 0 \iff 3x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{3}$ και αρα για $x = \frac{1}{3}$ έχουμε υποψήφιο Σημείο Καμπής (Σ.Κ.). Κάνουμε λοιπόν τον πίνακα μεταβολών της h'' :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$h''(x)$		$-$	$\boxed{0}$	$+$	
$h(x)$		$\frown$	Σ.Κ. $(\frac{1}{3}, \frac{16}{27})$	$\smile$	

Αφού $h''(x) < 0, \forall x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ έπεται ότι η h είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω) στο διάστημα αυτό και αφού $h''(x) > 0, \forall x \in \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ έπεται ότι η h είναι κυρτή (στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω) στο διάστημα αυτό. Έτσι το σημείο $\left(\frac{1}{3}, f\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{16}{27}\right)$ είναι Σ.Κ. του γραφήματος της h. Αυτό όμως είναι και το μοναδικό Σ.Κ. που έχει το γράφημα της συνάρτησης h.

(γ) $k(x) = -x^3 + 3x^2 - 5,\ x \in \mathbb{R}$
Η συνάρτηση k είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο π.ο. της, δηλ. στο $\mathbb{R}$. Είναι

$$\begin{aligned} & k'(x) = (-x^3 + 3x^2 - 5)' = -3x^2 + 6x \\ \Longrightarrow\ & k''(x) = (-3x^2 + 6x)' \quad = -6x + 6 = 6(1 - x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Είναι $k''(x) = 0 \iff 1 - x = 0 \iff x = 1$ και αρα για $x = 1$ έχουμε υποψήφιο Σημείο Καμπής (Σ.Κ.). Κάνουμε λοιπόν τον πίνακα μεταβολών της k'' :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$k''(x)$		$+$	$\boxed{0}$	$-$	
$k(x)$			Σ.Κ. $(1, -3)$		

Αφού $k''(x) > 0, \forall x \in (-\infty, 1)$ έπεται ότι η k είναι κυρτή (στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω) στο διάστημα αυτό και αφού $k''(x) < 0, \forall x \in (1, +\infty)$ έπεται ότι η k είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω) στο διάστημα αυτό. Έτσι το σημείο $(1, k(1)) = (1, -3)$ είναι Σ.Κ. του γραφήματος της k. Αυτό όμως είναι και το μοναδικό Σ.Κ. που έχει το γράφημα της συνάρτησης k.

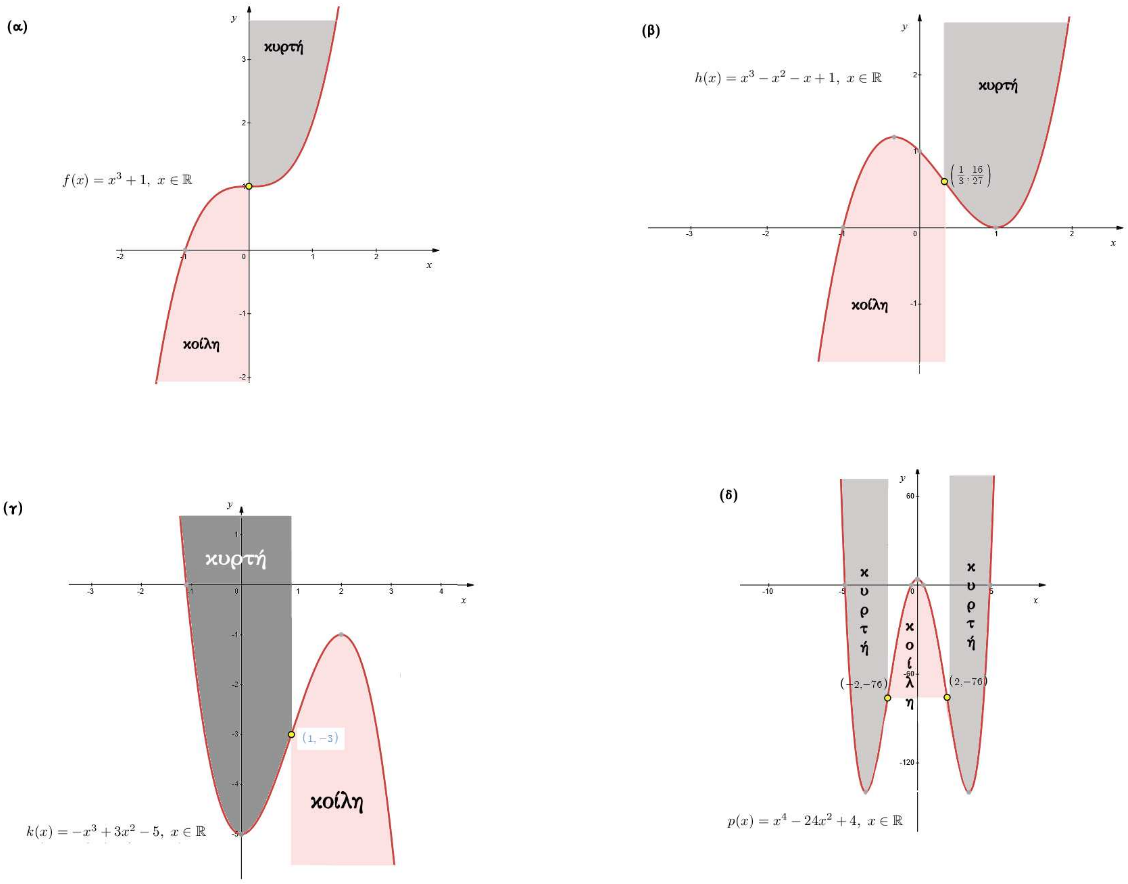
(δ) $p(x) = x^4 - 24x^2 + 4,\ x \in \mathbb{R}$
Η συνάρτηση p είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο π.ο. της, δηλ. στο $\mathbb{R}$. Είναι

$$\begin{aligned} & p'(x) = (x^4 - 24x^2 + 4)' = 4x^3 - 24 \\ \Longrightarrow\ & p''(x) = (4x^3 - 48x)' \quad = 12x^2 - 48 = 12(x^2 - 4) = 12(x - 2)(x + 2), \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Είναι $p''(x) = 0 \iff (x - 2)(x + 2) = 0 \iff x = \pm 2$ και αρα για $x = \pm 2$ έχουμε υποψήφια Σημεία Καμπής (Σ.Κ.). Κάνουμε λοιπόν τον πίνακα μεταβολών της p'' :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$p''(x)$		$+$	$\boxed{0}$	$-$	$\boxed{0}$	$+$	
$p(x)$			Σ.Κ. $(-2, -76)$		Σ.Κ. $(2, -76)$		

Αφού $p''(x) > 0, \forall x \in (-\infty, -2)$ αλλά και $\forall x \in (2, +\infty)$ έπεται ότι η p είναι κυρτή (στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω) σε κάθε ένα από τα διαστήματα αυτά.
Αφού $p''(x) < 0, \forall x \in (-2, 2)$, έπεται ότι η k είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω) στο διάστημα αυτό.
Έτσι τα σημεία $(-2, p(-2)) = (-2, -76)$ και $(2, p(2)) = (2, -76)$ είναι Σ.Κ. του γραφήματος της p.



Σχήμα 1.7: Άσκηση 1/σελ.44

Αυτά είναι και τα μοναδικά Σ.Κ. του γραφήματος της p.
Παραθέτουμε τα γραφήματα των συναρτήσεων της πιο πάνω άσκησης για λόγους εποπτείας και μόνο, αφού δεν έχουμε διδαχθεί ακόμα πώς να χαράσσουμε γραφήματα συναρτήσεων (πέραν από τα βασικά).

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι:

$$f''(x) = x(x-1)(x-2)^2(x-3)^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε για ποιές τιμές του x η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει σημεία καμπής.

Λύση

Η συνάρτηση f'' ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$. Συνεπώς, για να βρούμε τα Σ.Κ. του γραφήματος της f, θα ψάξουμε στα σημεία τα οποία αποτελούν λύσεις της εξίσωσης $f'' = 0$.

Έχουμε

$$f''(x) = 0 \iff x(x-1)(x-2)^2(x-3)^2 = 0 \iff x = 0, 1, 2, 3$$

Οι ρίζες $x_1 = 1$ και $x_2 = 1$ έχουν πολλαπλότητα 1 ενώ οι ρίζες $x_3 = 2$ και $x_4 = 3$ έχουν πολλαπλότητα 2 και 3 αντίστοιχα. Κάνουμε τον πίνακα μεταβολών της f'' :

x	$-\infty$	0		1		2		3	$+\infty$
x	$-$	$\boxed{0}$	$+$		$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	$\boxed{0}$	$+$		$+$		$+$
$(x-2)^2$	$+$		$+$		$+$	$\boxed{0}$	$+$		$+$
$(x-3)^3$	$-$		$-$		$-$		$-$	$\boxed{0}$	$+$
$f''(x)$	$-$		$+$		$-$		$-$		$+$
$f(x)$		Σ.Κ. $(0, f(0))$		Σ.Κ. $(1, f(1))$				Σ.Κ. $(3, f(3))$	

• Αφού $f'' < 0$ στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(1, 3)$, έπεται ότι η συνάρτηση είναι **κοίλη** (στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω) σε κάθε ενα από τα διαστήματα αυτά.

• Αφού $f'' > 0$ στα διαστήματα $(0, 1)$ και $(3, +\infty)$, έπεται ότι η συνάρτηση είναι **κυρτή** (στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω) σε κάθε ενα από τα διαστήματα αυτά.

Από τα πιο πάνω, έπεται επίσης ότι το γράφημα της f παρουσιάζει **καμπή** στα $(0, f(0))$, $(1, f(1))$ και $(3, f(3))$.

Άσκηση 3

Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις ως Ορθές ή ως Λανθασμένες και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας:

(α) Αν η πολυωνυμική συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του διαστήματος Δ, τότε η f λέγεται κυρτή.

ΟΡΘΟ / **ΛΑΘΟΣ**

(β) Αν $f''(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του διαστήματος Δ, τότε η f είναι κυρτή.

ΟΡΘΟ / **ΛΑΘΟΣ**

(γ) Αν η f είναι κοίλη στο (διάστημα) Δ, τότε $f''(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

ΟΡΘΟ / **ΛΑΘΟΣ**

Λύση

(α) ΛΑΘΟΣ υπό την έννοια ότι δεν έχουμε ορίσει την κυρτότητα με τον τρόπο αυτό.[10] Αν το ερώτημα

[10] Η άποψή μου είναι πως δεν έχει κανένα διδακτικό τουλάχιστον νόημα να ρωτάμε υπο το πρίσμα του σωστού ή του

ήταν διατυπωμένο ως εξής:

Αν η πολυωνυμική συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του διαστήματος Δ, τότε η f είναι κυρτή

τότε το ερώτημα θα ήταν 'ΛΑΘΟΣ', αφού παρολο που η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική, δεν έχουμε πληροφορία για την κυρτότητά της. Πάρτε για παράδειγμα την $f(x) = x^3$, $x \in (-\infty, 0]$. Είδαμε (με χρήση του Θεωρήματος 2 της σελ. 39 του σχολικού) ότι η f είναι κοίλη στο εσωτερικό του π.ο. της, δηλ. στο διάστημα $(-\infty, 0)$ παρόλο που (αποδεικνύεται ότι) είναι γν. αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Τα επόμενα δυο ερωτήματα αναφέρονται για πολυωνυμική συνάρτηση f, αφού η κυρτότητα ορίστηκε (στο σχολικό βιβλίο) για αυτές τις συναρτήσεις.

(β) ΟΡΘΟ. Προκύπτει από το Θεώρημα 2/σελ. 39 του σχολικού.

(γ) ΛΑΘΟΣ. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = -x^4$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $f''(x) \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση είναι παντού κοίλη στο π.ο. της[11]

Άσκηση 4

Αν το σημείο $A(1,2)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τύπο

$$f(x) = ax^3 + 6x^2 - \beta x + 5, \quad x \in \mathbb{R},$$

να υπολογίσετε τις τιμές των $a, \beta \in \mathbb{R}$.

Λύση

Η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη για κάθε (πραγματική) τιμή των σταθερών a και β. Είναι

$$\begin{aligned} & f'(x) = (ax^3 + 6x^2 - \beta x + 5)' = 3ax^2 + 12x - \beta \\ \Longrightarrow\ & f''(x) = (3ax^2 + 12x - \beta)' \quad = 6ax + 12 = 6(ax+2), \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Αν $a = 0$, τότε $f''(x) = 12 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και αρα η συνάρτηση είναι παντού κυρτή, οπόταν δε θα έχει πουθενά σημείο καμπής. Άρα $a \neq 0$.
Αφού το σημείο $A(1,2)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και η f είναι δις παραγωγίσιμη, από το Θεώρημα του Fermat, έπεται ότι $f''(1) = 0$. Είναι

$$f''(1) = 0 \iff 6(a \cdot 1 + 2) = 0 \iff a + 2 = 0 \iff a = -2$$

Συνεπώς,

$$f(x) = -2x^3 + 6x^2 - \beta x + 5, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Επίσης, το σημείο $A(1,2)$ ανήκει στο γράφημα της f, δηλ. $f(1) = 2$. Έτσι,

$$f(1) = 2 \iff -2 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 - \beta \cdot 1 + 5 = 2 \iff \beta = -7$$

Άσκηση 5

Να εξηγήσετε γιατί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 2x - 5$, $x \in \mathbb{R}$ δεν έχει σημείο καμπής. Στη συνέχεια, να αναφέρετε αν η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη στο $\mathbb{R}$.

λάθους αν αυτός είναι ο ορισμός που θέσαμε για συγκεκριμένο αντικείμενο. Ιδιαίτερα, θεωρώ πως τέτοιες ερωτήσεις αποπροσανατολίζουν το μαθητή

[11] Ιδιαίτερα, $f''(x) = 0 \iff x = 0$.

Λύση

Η συνάρτηση είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = (x^2 + 2x - 5)' = 2x + 2 \quad \Longleftrightarrow \quad f''(x) = (2x + 2)' = 2 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Έτσι, η συνάρτηση f είναι παντού κυρτή στο $\mathbb{R}$ και αυτό αρκεί για να δείξουμε ότι δεν έχει σημείο καμπής.
Με το να ζητάνε εξήγηση γιατί η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν έχει σημείο καμπής χωρίς τη μελέτη του προσήμου της f'' πιθανών οι συγγραφείς να θέλουν μια γεωμετρική (ας πούμε) ερμηνεία αυτού, μέσω του είδους του γραφήματός της: είναι μια παραβολή με ολικό ελάχιστο, άρα η καμπυλότητα του γραφήματός της δεν αλλάζει.

Αναφορές

(ΙΙΙ) *Ιωακείμ Ι. Ιωάννης* - ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β Λυκείου Κατεύθυνσης, ISBN:978-9925-7567-4-2 (σκληρό εξώφυλλο) ͵ 978-9925-7567-7-3 (μαλακό εξώφυλλο)-2η Έκδοση, 2020

(ΚΥΠ) *Ομάδα Καθηγητών* - Μαθηματικά Γ′ Λυκείου Κοινού κορμού, τεύχη Α και Β, Β έκδοση, Λευκωσία, Κύπρος, 2019

(ΝΓΓ) *Σ. Νεγρεπόντης, Σ Γιωτόπουλος, Ε. Γιαννακούλιας* - Απειροστικός Λογισμός, τόμοι Ι,ΙΙα,ΙΙβ, εκδόσεις Συμμετρία, 2000

(ΠΑΠ) *Μιχάλης Παπαδημητράκης* - Ανάλυση*Πραγματικές Συναρτήσεις μιας Μεταβλητής, Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Πανεπιστημίου Κρήτης, 2015

(ΥΠ1) https://mathm.schools.ac.cy/index.php/el/yliko/didaktiko-yliko