Διαδικασία Εύρεσης Ακροτάτων Συνεχούς συνάρτησης σε κλειστό διάστημα

Η Διαδικασία Εύρεσης Ακροτάτων Συνεχούς συνάρτησης σε κλειστό διάστημα που θα δούμε αμέσως τώρα αφείλεται στο Θεώρημα Μέγιστης/Ελάχιστης Τιμής.

Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια *συνεχής* συνάρτηση.

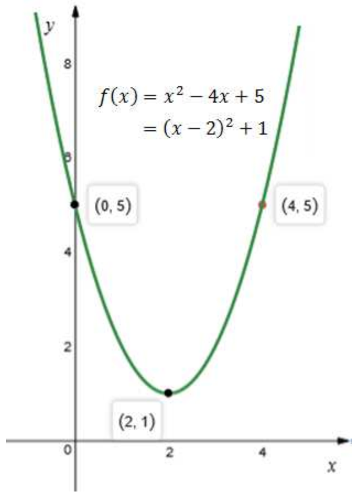
Βήμα 1: Προσδιορίζουμε τα κρίσιμα σημεία της f στο (ανοικτό) διάστημα (a, b).

Βήμα 2: Προσδιορίζουμε τις τιμές της f στα κρίσιμα σημεία της αλλά και στα άκρα της a και b.

Βήμα 3: Η μέγιστη τιμή των τιμών στο προηγούμενο βήμα είναι το (ολικό) μέγιστο της f στο (κλειστό) διάστημα $[a, b]$ ενώ η ελάχιστη τιμή των τιμών στο προηγούμενο βήμα είναι το (ολικό) ελάχιστο της f στο (κλειστό) διάστημα $[a, b]$

Ας δούμε ενα **παράδειγμα**: Έστω η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = x^2 - 4x + 5$$



Η f λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο διάστημα $[0, 4]$. Αυτό είναι άμεση απόρροια του Θεωρήματος Μέγιστης/Ελάχιστης Τιμής, αφού η f είναι συνεχής (ως πολυωνυμική) και άρα συνεχής στο (κλειστό) διάστημα $[0, 4]$. Για να βρούμε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της μπορούμε να ακολουθήσουμε είτε αλγεβρικούς χειρισμούς, είτε να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι το γράφημα αυτής αποτελεί παραβολή.
Με τον πρώτο τρόπο:

$$f(x) = x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1$$

και αρα

$$x \in [0, 4] \Longrightarrow (x - 2) \in [-2, 2] \Longrightarrow (x - 2)^2 \in [0, 4]$$
$$\Longrightarrow \underbrace{((x - 2)^2 + 1)}_{f(x)} \in [1, 5] \tag{1.1}$$

δηλ. $f_{max} = 5$ και $f_{min} = 1$.

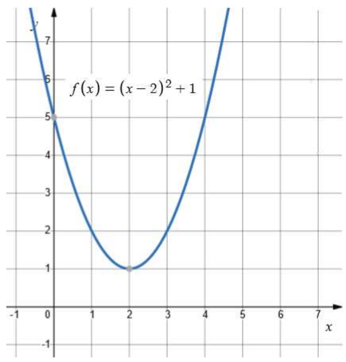
Με το δεύτερο τρόπο, από την (1.1) παρατηρούμε ότι η κορυφή της παραβολής είναι στο σημείο $(2, 1)$ στην οποία λαμβάνει την ελάχιστή της τιμή (άσχετα αν αυτή περιοριστεί στο διάστημα $[0, 4]$), δηλ. $f_{min} = 1$. Τώρα, παρατηρούμε ότι $f(0) = 5 = f(4)$ και αρα, αφού τα σημεία αυτά είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα συμμετρίας της παραβολής, ότι $f_{max} = f(0) = f(4) = 5$.

1.3 Δραστηριότητες σελ. 20 Ακρότατα Συνάρτησης (Τοπικά-Ολικά)

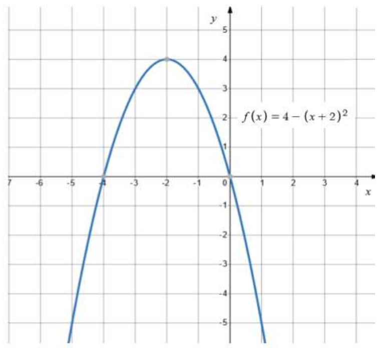
Άσκηση 1

Από τις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις, να βρείτε τη μέγιστη ή ελάχιστη τιμή (αν αυτή υπάρχει) και να γράψετε για κάθε περίπτωση την αντίστοιχη ανισοτική σχέση.

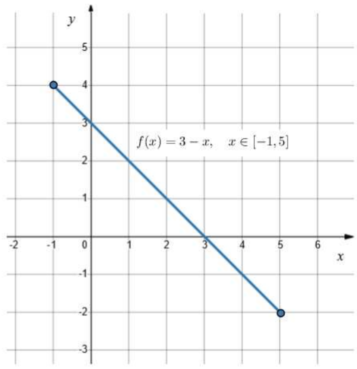
(α)



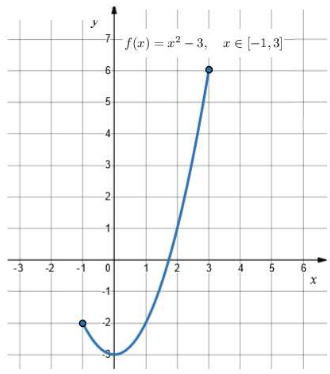
(β)



(γ)



(δ)



Λύση

(α) Το γράφημα της f είναι μια παραβολή η οποία προκύπτει από την $g(x) = x^2$ μέσω μιας οριζόντιας μετάθεσης κατα 2 μονάδες προς τα δεξιά και μιας κατακόρυφης μετάθεσης κατα μια μονάδα προς τα πάνω. Ξέρουμε ότι το γράφημα της παραβολής αυτής λαμβάνει ολικά ελάχιστη τιμή για το σημείο x_0 της κορυφής της. Η κορυφή της είναι το σημείο $(2, 1)$ και αρα $y_{min} = f(2) = 1$. Η ανισοτική σχέση που αντανακλά το γεγονός αυτό είναι η

$$f(x) \geq f(2) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ας σημειώσουμε ότι η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 2$.

(β) Το γράφημα της f είναι μια παραβολή η οποία προκύπτει από την $g(x) = -x^2$ μέσω μιας οριζόντιας μετάθεσης κατα 2 μονάδες προς στα αριστερά και μιας κατακόρυφης μετάθεσης κατα 4 μονάδες προς τα πάνω. Ξέρουμε ότι το γράφημα της παραβολής αυτής λαμβάνει ολικά μέγιστη τιμή για το σημείο x_0

της κορυφής της. Η κορυφή της είναι το σημείο $(-1, 4)$ και αρα $y_{min} = f(-1) = 4$. Η ανισοτική σχέση που αντανακλά το γεγονός αυτό είναι η

$$f(x) \leq f(-1) = 4, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ας σημειώσουμε ότι η ισότητα ισχύει μόνο για $x = -1$.[4]

(γ) Εύκολα βλέπουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα. Συνεπώς, αφού είναι και συνεχής σε κλειστό διάστημα, ως απόρροια του Θεωρήματος Μέγιστης/Ελάχιστης τιμής, η μέγιστη τιμή της θα λαμβάνεται στο κάτω άκρο του π.ο. της, δηλ. για $x = -1$:

$$y_{max} = f(-1) = 3 - (-1) = 4$$

και η ελάχιστη τιμή της θα λαμβάνεται στο άνω άκρο του π.ο. της, δηλ. για $x = 5$:

$$y_{min} = f(5) = 3 - 5 = -2$$

Η ανισοτική σχέση που αντανακλά τα πιο πάνω είναι η

$$-2 \leq f(x) \leq 4, \quad \forall x \in [-1, 5]$$

Αν θέλαμε να το δείξουμε με πράξεις:[5]

$$x \in [-1, 5] \iff -1 \leq x \leq 5 \iff -5 \leq -x \leq 1 \iff 3 - 5 \leq 3 - x \leq 3 + 1$$

δηλ.

$$-2 \leq \underbrace{3 - x}_{f(x)} \leq 4, \quad \forall x \in [-1, 5]$$

(δ) Η παραβολή $y = x^2 - 3$ (χωρίς κανένα περιορισμό στο π.ο. της) έχει ολικό ελάχιστο στην κορυφή της, δηλ. στο σημείο $(0, -3)$. Όμως εδω μας δίνεται ο περιορισμός της στο κλειστό διάστημα $[-1, 3]$ και αρα αφού είναι και συνεχής, ως απόρροια του Θεωρήματος Μέγιστης/Ελάχιστης τιμής, η μέγιστη τιμή της θα λαμβάνεται στη μέγιστη των τιμών της στα άκρα του διαστήματος και της κορυφής της. Αντίστοιχα και η ελάχιστη τιμή. Έχουμε:

$$f(-1) = (-1)^2 - 3 = -2, \qquad f(0) = -3, \qquad f(3) = 3^2 - 3 = 6$$

και αρα $y_{min} = f(0) = -3$ και $y_{max} = f(3) = 6$. Η ανισοτική σχέση που αντανακλά τα πιο πάνω είναι η

$$-3 \leq f(x) \leq 6, \quad \forall x \in [-1, 3]$$

Άσκηση 2

Να αποδείξετε ότι:

(α) Η $f(3)$ είναι η ελάχιστη τιμή για τη συνάρτηση $f(x) = (x - 3)^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$ και να την υπολογίσετε.

(β) Η $f(1)$ είναι η μέγιστη τιμή για τη συνάρτηση $f(x) = 11 - (x - 1)^2$, $x \in \mathbb{R}$ και να την υπολογίσετε.

[4] Στις επίσημες λύσεις στην ιστοσελίδα του Υπουργείου [**(ΥΠ1)**] αναφέρεται ότι η μέγιστη τιμή λαμβάνεται για $x = 1$ και όχι για $x = -1$.

[5] Ασχολούμαστε με πολυωνυμικές συναρτήσεις και αυτό μας διευκολύνει

Λύση

Μας ζητάνε *απόδειξη*. Συνεπώς δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι κάθε παραβολή (τα γραφήματα των 2 συναρτήσεων εκφράζουν παραβολές) λαμβάνει ολικό μέγιστο/ελάχιστο στην κορυφή της. Έτσι (και αφού μας δίνεται η εκάστοτε ακρότατη τιμή) επαληθεύουμε ότι αυτή είναι το ακρότατο:[6]

(α) Είναι $f(3) = (3-3)^2 - 1 = -1$. Έτσι, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \geq f(3) = -1$.
1ος τρόπος: Είναι

$$f(x) \geq f(3) = -1 \iff (x-3)^2 - 1 \geq -1 \iff (x-3)^2 \geq 0$$

η οποία είναι αληθής για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
2ος τρόπος: Είναι

$$(\forall x \in \mathbb{R},\ (x-3)^2 \geq 0) \implies (\forall x \in \mathbb{R},\ (x-3)^2 - 1 \geq -1)$$

δηλ.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq -1 = f(3)$$

και το συμπέρασμα έπεται.
Σημείωση: Η ισότητα στην πιο πάνω ανίσωση ισχύει μόνο για $x = 3$.

(β) Είναι $f(1) = 11 - (1-1)^2 = 11$. Έτσι, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \leq f(1) = 11$.
1ος τρόπος: Είναι

$$f(x) \leq f(1) = 11 \iff 11 - (x-1)^2 \leq 11 \iff -(x-1)^2 \leq 0 \iff (x-1)^2 \geq 0$$

η οποία είναι αληθής για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
2ος τρόπος: Είναι

$$(\forall x \in \mathbb{R},\ (x-1)^2 \geq 0) \implies (\forall x \in \mathbb{R},\ -(x-1)^2 \leq 0) \implies (\forall x \in \mathbb{R},\ 11-(x-1)^2 \leq 11 = f(1))$$

δηλ.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq 11 = f(1)$$

και το συμπέρασμα έπεται.
Σημείωση: Η ισότητα στην πιο πάνω ανίσωση ισχύει μόνο για $x = 1$.

Άσκηση 3

Να βρείτε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή των πιο κάτω συναρτήσεων:
(α) $f(x) = 3x - 1, \quad x \in [-2, 3]$
(β) $f(x) = -2x + 5, \quad x \in [-1, 5]$

Λύση

(α)
1ος τρόπος: Εύκολα βλέπουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα[7]. Συνεπώς, αφού είναι και

[6] Ευκαιρία να θυμηθούμε το κεφάλαιο της Μαθηματικής Λογικής
[7] Είτε με τον ορισμό είτε, όπως αποδεχεται ως ορθόν το σχολικό βιβλίο, βρίσκοντας την κλίση της ευθείας

συνεχής σε κλειστό διάστημα, ως απόρροια του Θεωρήματος Μέγιστης/Ελάχιστης τιμής, η μέγιστη τιμή της θα λαμβάνεται στο άνω άκρο του π.ο. της, δηλ. για $x = 3$:

$$y_{max} = f(-2) = 3 \cdot 3 - 1 = 8$$

και η ελάχιστη τιμή της θα λαμβάνεται στο κάτω άκρο του π.ο. της, δηλ. για $x = -2$:

$$y_{min} = f(-2) = 3 \cdot (-2) - 1 = -7$$

2ος τρόπος: Με πράξεις:

$$x \in [-2, 3] \iff -2 \leq x \leq 3 \iff -6 \leq 3x \leq 9 \iff -7 \leq 3x - 1 \leq 8$$

δηλ.

$$-7 \leq f(x) \leq 8, \quad \forall x \in [-2, 3]$$

(β)
1ος τρόπος: Εύκολα βλέπουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα. Συνεπώς, αφού είναι και συνεχής σε κλειστό διάστημα, ως απόρροια του Θεωρήματος Μέγιστης/Ελάχιστης τιμής, η μέγιστη τιμή της θα λαμβάνεται στο κάτω άκρο του π.ο. της, δηλ. για $x = -1$:

$$y_{max} = f(-1) = -2 \cdot (-1) + 5 = 7$$

και η ελάχιστη τιμή της θα λαμβάνεται στο άνω άκρο του π.ο. της, δηλ. για $x = 5$:

$$y_{min} = f(-2) = -2 \cdot 5 + 5 = -5$$

2ος τρόπος: Με πράξεις:

$$x \in [-1, 5] \iff -1 \leq x \leq 5 \iff -10 \leq -2x \leq 2 \iff -5 \leq -2x + 5 \leq 7$$

δηλ.

$$-5 \leq f(x) \leq 7, \quad \forall x \in [-1, 5]$$

Αναφορές

(ΙΙΙ) *Ιωακείμ Ι. Ιωάννης* - ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β Λυκείου Κατεύθυνσης, ISBN:978-9925-7567-4-2 (σκληρό εξώφυλλο) , 978-9925-7567-7-3 (μαλακό εξώφυλλο)2η Έκδοση, 2020

(ΚΥΠ) *Ομάδα Καθηγητών* - Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου Κοινού κορμού, τεύχη Α και Β, Β έκδοση, Λευκωσία, Κύπρος, 2019

(ΝΓΓ) *Σ. Νεγρεπόντης, Σ Γιωτόπουλος, Ε. Γιαννακούλιας* - Απειροστικός Λογισμός, τόμοι Ι,ΙΙα,ΙΙβ, εκδόσεις Συμμετρία, 2000

(ΠΑΠ) *Μιχάλης Παπαδημητράκης* - Ανάλυση*Πραγματικές Συναρτήσεις μιας Μεταβλητής, Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Πανεπιστημίου Κρήτης, 2015

(ΥΠ1) https://mathm.schools.ac.cy/index.php/el/yliko/didaktiko-yliko