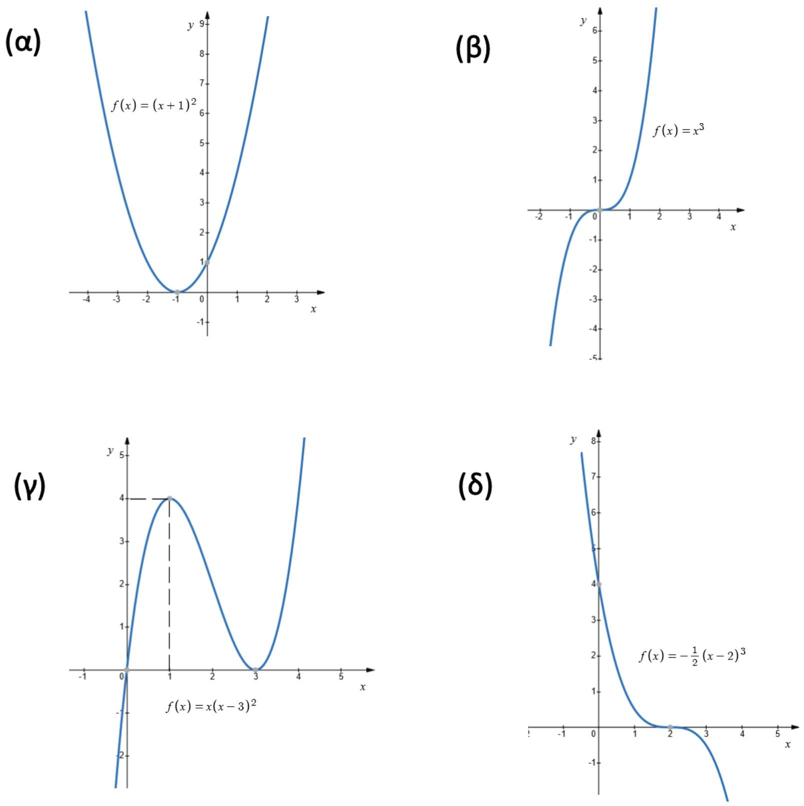
1.2 Δραστηριότητες σελ. 14 Μονοτονία-Ακρότατα Συνάρτησης (Ορισμοί)

Άσκηση 1

Να αναφέρετε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης σε κάθε περίπτωση στις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις:



Λύση

(α) Η συνάρτηση είναι γν. φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -1]$ και γν. αύξουσα στο διάστημα $[-1, +\infty)$.
Αλλιώς:
Η συνάρτηση είναι γν. φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -1)$ και γν. αύξουσα στο διάστημα $[-1, +\infty)$.
Αλλιώς:
Η συνάρτηση είναι γν. φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -1)$ και γν. αύξουσα στο διάστημα $(-1, +\infty)$.
Αλλιώς:
Η συνάρτηση είναι γν. φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -1]$ και γν. αύξουσα στο διάστημα $(-1, +\infty)$.

(β) Η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα σε ολο το π.ο. της, δηλ. σε ολο το $\mathbb{R}$.

(γ) Η συνάρτηση είναι:
• γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$ και στο διάστημα $(3, +\infty)$

• γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,3]$
Τα πιο πάνω ισχύουν και για οποιοδήποτε συνδυασμό με τα άκρα 1 και 3 των διαστημάτων.

(δ) Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα σε ολο το π.ο. της, δηλ. σε ολο το $\mathbb{R}$.

Άσκηση 2

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις πιο κάτω συναρτήσεις:

(α) $f(x) = 4 - x, \quad x \in \mathbb{R}$ **(β)** $g(x) = 2 + 3x, \quad x \in \mathbb{R}$ **(γ)** $h(x) = -2$

Λύση

(α) Η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική (βαθμού 1) με π.ο. το $\mathbb{R}$. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε

$$x_1 < x_2 \implies -x_1 > -x_2 \implies 4 - x_1 > 4 - x_2,$$

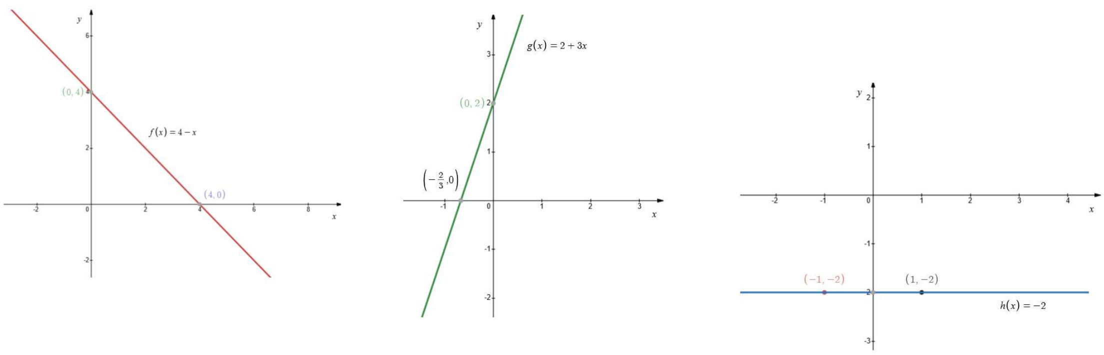
δηλ. $f(x_1) > f(x_2)$ και αφού τα x_1, x_2 ήταν τυχόντα σημεία του π.ο. της f, έπεται ότι η f είναι **γνησίως φθίνουσα** (σε όλο το $\mathbb{R}$).

(β) Η συνάρτηση g είναι πολυωνυμική (βαθμού 1) με π.ο. το $\mathbb{R}$. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε

$$x_1 < x_2 \implies 3x_1 < 3x_2 \implies 3 + x_1 < 3 + x_2,$$

δηλ. $g(x_1) < g(x_2)$ και αφού τα x_1, x_2 ήταν τυχόντα σημεία του π.ο. της g, έπεται ότι η f είναι **γνησίως αύξουσα** (σε όλο το $\mathbb{R}$).

(γ) Η συνάρτηση h είναι πολυωνυμική βαθμού 0, δηλ. σταθερή συνάρτηση με π.ο. το $\mathbb{R}$.



Σχήμα 1.3: Άσκηση 2/σελ.14

Άσκηση 3

Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $y = f(x), \quad x \in \mathbb{R}$. Να διατάξετε από την πιο μικρή στην πιο μεγάλη, τις τιμές $f(3)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(\pi)$, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Λύση

Αφού $-2 < 0$ και η $y = f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση, έπεται ότι $f(-2) < f(0)$.
Ομοίως, αφού $0 < \frac{1}{2}$ και η $y = f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση, έπεται ότι $f(0) < f\left(\frac{1}{2}\right)$ και αφού $\frac{1}{2} < 3$ και η $y = f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση, έπεται ότι $f\left(\frac{1}{2}\right) < f(3)$. Τέλος, αφού $3 < \pi$ και η $y = f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση, έπεται ότι $f(3) < f(\pi)$. Δηλ.

$$f(-2) < f(0) < f\left(\frac{1}{2}\right) < f(3) < f(\pi)$$

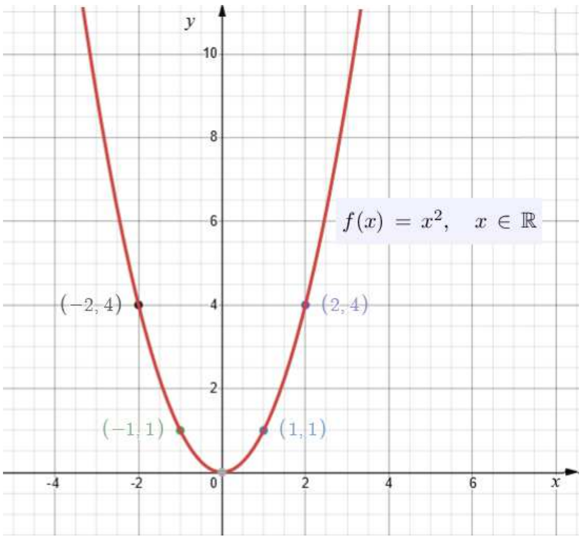
Άσκηση 4

Να κάνετε τη γραφική παράσταση της $f(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}$ και να αναφέρετε τα διαστήματα μονοτονίας της.

Λύση

Κάνοντας ενα πίνακα με τα σημεία $(x, f(x))$, δηλ. τα σημεία της μορφής (x, x^2) παίρνουμε το γράφημα της f. Παρατηρούμε ότι:

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ (ή στο διάστημα $(-\infty, 0)$)
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$ (ή στο διάστημα $(0, +\infty)$)



Σχήμα 1.4: Άσκηση 4/σελ.14