ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Άσκηση 1 *Έστω* $\phi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *αύξουσα συνάρτηση τέτοια ώστε* $\phi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ *και* $\phi(t + s) \leq \phi(t) + \phi(s)$, $\forall t, s \geq 0$. *Αν* ρ *μετρική σένα σύνολο* X, *δείξτε ότι και η* $\tau = \phi \circ \rho$ *είναι επίσης μετρική.*

Άσκηση 2 *Έστω* ρ *μετρική σ'ενα σύνολο* X. *Δείξτε ότι οι* $\rho_1 = \dfrac{\rho}{1+\rho}$, $\rho_2 = \min(\rho, 1)$ *και* $\rho_3 = \rho^a, 0 < a \leq 1$ *είναι μετρικές στο* X.

Άσκηση 3 *Έστω* $X \neq \emptyset$ *σύνολο και* $f : \mathbb{R} \to (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ *συνεχής και γνησίως αύξουσα. Ορίζουμε τη συνάρτηση*

$$\rho : X \times X \to \mathbb{R} \text{ με } \rho(x, y) = |f(x) - f(y)|, \ \forall x, y \in X.$$

Δείξτε ότι η ρ *είναι μετρική στο* X.

Άσκηση 4 *Έστω* $X \neq \emptyset$ *σύνολο. Ορίζουμε τη συνάρτηση*

$$\rho : X \times X \to \mathbb{R} \text{ με } \rho(x, y) = \left| \frac{x}{1 + |x|} - \frac{y}{1 + |y|} \right|, \ \forall x, y \in X.$$

Δείξτε ότι η ρ *είναι μετρική στο* X.

Άσκηση 5 *Έστω* $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ *με* $\alpha<\beta$, $X = \{f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R} | \exists f'$ *και είναι συνεχής*$\}$ *και* $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$, *με* $\rho(f, g) = \sup\{|f'(x) - g'(x)| : x \in [\alpha, \beta]\} + |f(\beta) - g(\beta)|$, $\forall f, g \in X$. *Δείξτε ότι η* ρ *είναι μετρική στο* X.

Άσκηση 6 *Έστω* $\mathcal{R}([\alpha, \beta]) = \{f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R} : \exists \int_\alpha^\beta f(x)dx\}$ *και* $\mathcal{C}([\alpha, \beta]) = \{f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R} : f$ *συνεχής*$\}$. *Εξετάστε αν οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι μετρικές στα σύνολα* $\mathcal{R}([\alpha, \beta])$, $\mathcal{C}([\alpha, \beta])$:

$$\rho(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [\alpha, \beta]\}$$

$$\tau(f, g) = \int_\alpha^\beta |f(x) - g(x)| dx$$

$$\sigma(f, g) = \left(\int_\alpha^\beta |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$d(f, g) = \left(\int_\alpha^\beta |f(x) - g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \ p \geq 1.$$

Άσκηση 7 *Έστω* X *το σύνολο όλων των πραγματικών ακολουθιών και* $\beta = (\beta_n)$ *μια ακολουθία με* $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n < \infty$. *Για* $x = (x_n)$ *και* $y = (y_n)$ *θέτουμε* $d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cdot \dfrac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$. *Αποδείξτε ότι ο* (X, d) *είναι μετρικός χώρος και υπολογίστε τη διάμετρό του.*

Άσκηση 8 *Έστω* (X, ρ) *μετρικός χώρος και* $A = \{a > 0 | \rho^a$ *μετρική*$\}$. *Δείξτε ότι το* A *είναι υποδιάστημα του* $(0, +\infty)$.

Άσκηση 9 (i) *Θεωρούμε τη συνάρτηση*

$$f : \mathbb{R} \to [-1, 1] \text{ με } f(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

Δείξτε ότι η f είναι ομοιομορφισμός.

(ii) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f : X \to B(0,1) \equiv \{x \in X : \|x\| < 1\} \text{ με } f(x) = \frac{x}{1+\|x\|}.$$

Δείξτε ότι η f είναι ομοιομορφισμός.
[Παρατήρηση: Το (ii) είναι γενίκευση του (i)].

Άσκηση 10 *(i) Έστω ρ μετρική σένα σύνολο X. Θέτουμε $d := \frac{\rho}{1+\rho}$ και $\tau := \min\{\rho, 1\}$. Δείξτε ότι οι μετρικές ρ, d, τ είναι ισοδύναμες.*

(ii) Έστω ρ η συνήθης μετρική μετρική στο $\mathbb{R}$ και

$$\rho : X \times X \to \mathbb{R} \text{ με } \rho(x,y) = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|, \ \forall x, y \in X.$$

Δείξτε ότι οι μετρικές ρ και d είναι ισοδύναμες.

Άσκηση 11 *Στον $\mathbb{R}^2$, ποιές είναι οι σφαίρες $S((0,0), r)$, $r > 0$, ως προς τις μετρικές $\rho(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$, $\rho_1 = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ και $\rho_2 = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2}$, για $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$;*

Άσκηση 12 *Δείξτε ότι σε κάθε μετρικό χώρο (X, ρ) τα πεπερασμένα σύνολα είναι κλειστά.*

Άσκηση 13 *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, $x \in X$ και $r > 0$. Τότε $\overline{S(x,r)} \subseteq \widetilde{S}(x,r)$, ενώ δεν ισχύει γενικά η ισότητα. Ειδικά στους Ευκλείδειους χώρους ισχύει η ισότητα.*

Άσκηση 14 *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A, B \subseteq X$ μη κενά.*
Δείξτε ότι:
(i) $\delta(A) = \delta(\overline{A})$, όπου $\delta(A) = \sup\{\rho(x,y) | x, y \in A\}$.
(ii) Αν $A \subseteq B$, τότε $d(x,B) \leq d(x,A), \forall x \in X$
(iii) $d(x,A) = d(x,\overline{A})$.
(iv) $d(A,B) = d(\overline{A},\overline{B}) = d(A,\overline{B})$, όπου $d(A,B) = \inf\{\rho(x,y) | x \in A, y \in B\}$.

Άσκηση 15 *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A, B \subseteq X$ μη κενά με A συμπαγές. Τότε:*
(i) Υπάρχουν $x, y \in A$ τέτοια ώστε $\delta(A) = \rho(x,y)$.
(ii) Υπάρχει $a \in A$ τέτοιο ώστε $d(A,B) = d(a,B)$.
(iii) Αν το B είναι συμπαγές, τότε υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ τέτοια ώστε $d(A,B) = \rho(a,b)$.
(iv) Το (iii) δεν ισχύει αν το A είναι κλειστό και όχι αναγκαία συμπαγές.

Άσκηση 16 *Έστω $\mathcal{C}([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} | f \text{ συνεχής}\}$. Θέτουμε*

$$\rho_1(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0,1]\},$$

$$\rho_2(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx,$$

$$\rho_3(f,g) = \Big(\int_0^1 |f(x) - g(x)|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}}, \ \forall f, g \in C([0,1]).$$

Αποδείξτε ότι οι μετρικές ρ_1, ρ_2, ρ_3 ικανοποιούν τις σχέσεις $\rho_2 \leq \rho_3 \leq \rho_1$ αλλά δεν είναι ισοδύναμες μεταξύ τους.

Άσκηση 17 *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A, B \subseteq X$ μη κενά με A συμπαγές, B κλειστό και $A \cap B = \emptyset$. Δείξτε ότι $d(A,B) > 0$.*

Άσκηση 18 *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A, B \subseteq X$ μη κενά με A συμπαγές. Δείξτε ότι ισχύει $d(A,B) = 0 \Leftrightarrow A \cap \overline{B} \neq \emptyset$.*
(Παρατήρηση: Θα μπορούσαμε αντι του $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$ να γράφαμε $A \cap B \neq \emptyset$ και B κλειστό, αφού B κλειστό $\Longrightarrow B = \overline{B}$). Δείξτε ότι αυτό δεν ισχύει αν το A είναι κλειστό και όχι αναγκαία συμπαγές.

Άσκηση 19 *Αν A ανοικτό και D πυκνό υποσύνολο του μετρικού χώρου (X,ρ), δείξτε ότι $\overline{D \cap A} = \overline{A}$.*

Άσκηση 20 *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $D \subseteq X$ μη κενό. Δείξτε ότι D πυκνό στο $X \Leftrightarrow D \cap A \neq \emptyset, \forall A \subseteq X$ ανοικτό μη κενό.*

Άσκηση 21 *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Αν $A, B \subseteq X$ μη κενά, ποιές από τις παρακάτω ισότητες ισχύουν;*

(i) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ *(ii)* $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
(iii) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ *(iv)* $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$
(v) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ *(vi)* $(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$

Άσκηση 22 *Έστω ρ_1, ρ_2 μετρικές σένα σύνολο X. Δείξτε ότι $\rho_1 \sim \rho_2 \Leftrightarrow$ η ταυτοτική απεικόνιση $\phi : (X,\rho_1) \to (X,\rho_2)$ με $\phi(x) = x, \forall x \in X$ είναι ομοιομορφισμός.*

Άσκηση 23 *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $(x_n)_n$ ακολουθία στο X. Δείξτε ότι αν $x_n \xrightarrow{\rho} x$ και $x_n \xrightarrow{\rho} y$, τότε $x = y$ (δηλ. το όριο ακολουθίας αν υπάρχει είναι μοναδικό).*

Άσκηση 24 *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ δύο ακολουθίες στο X. Δείξτε ότι αν $x_n \xrightarrow{\rho} x_o \in X$ και $y_n \xrightarrow{\rho} y_o \in X$, τότε $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x_o, y_o)$ (σύγκλιση κατά συντεταγμένη).*

Άσκηση 25 *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Τότε $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists (x_n)_n \subset A$ ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} x$ (δηλ. το $\overline{A}$ είναι το σύνολο των ορίων ακολουθιών με όρους από το A).*

Άσκηση 26 *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος, $x_o \in X$ και $\epsilon > 0$. Δείξτε ότι $\overline{S(x_o,\epsilon)} \subseteq \{x \in X | \rho(x, x_o) \leq \epsilon\}$. Δώστε παράδειγμα μετρικού χώρου ώστε στην παραπάνω σχέση να έχουμε γνήσιο υποσύνολο.*

<u>Συνέχεια συναρτήσεων</u>

Άσκηση 27 *Δώστε παραδείγματα:*
(i) Ενός κλειστού συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$ και μιας συνεχούς συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε το $f(A)$ όχι κλειστό στο $\mathbb{R}$.
(ii) Ενός ανοικτού συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$ και μιας συνεχούς συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε το $f(A)$ όχι ανοικτό στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 28 *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος, $x_o \in X$ και $A \neq \emptyset$ υποσύνολο του X. Αποδείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχεις:*
(i) $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$.
(ii) $f : X \to \mathbb{R}$, *με* $f(x) = \rho(x, x_o)$.
(iii) $g : X \to \mathbb{R}$, *με* $g(x) = d(x, A)$.
Επίσης δείξτε ότι η $g : X \to \mathbb{R}$, με $g(x) = d(x, A)$ είναι συνάρτηση Lipschitz.

Άσκηση 29 *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A, B \subseteq X$ μη κενά με $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$. Δείξτε ότι η συνάρτηση*

$$f : X \to \mathbb{R} \text{ με } f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}$$

είναι καλά ορισμένη συνεχής συνάρτηση με $f(x) = 0$, αν $x \in A$ και $f(x) = 1$, αν $x \in B$. Αν επιπλέον $d(A,B) = 0$, τότε η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Άσκηση 30 *Έστω $(X,\rho_1), (Y,\rho_2)$ μετρικοί χώροι και $f : (X,\rho_1) \to (Y,\rho_2)$ συνάρτηση. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
(i) f συνεχής
(ii) $f^{-1}(\mathbb{G})$ ανοικτό στο X, $\forall\, \mathbb{G} \subseteq Y$ ανοικτό.
(iii) $f^{-1}(\mathbb{F})$ κλειστό στο X, $\forall\, \mathbb{F} \subseteq Y$ κλειστό.
(iv) $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$, $\forall B \subseteq Y$.
(v) $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, $\forall A \subseteq X$.

Άσκηση 31 *Έστω X, Y μετρικοί χώροι, $f, g : X \to Y$ συνεχείς συναρτήσεις. Δείξτε ότι:*
(i) Το $F = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ είναι κλειστό στο X.
(ii) Αν $D \subseteq X$ πυκνό και $f|_D = g|_D$, τότε $f = g$.
(iii) Το γράφημα της f, $\mathbf{G}_f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$, είναι κλειστό (στο $X \times Y$).

Άσκηση 32 *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος, $\emptyset \neq A, B \subseteq X$, $a \in \mathbb{R}$ και $f, g : X \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Αποδείξτε ότι:*
(i) Τα παρακάτω σύνολα είναι κλειστά:
$\{x \in X | f(x) \geq a\}$
$\{x \in X | f(x) \leq a\}$
$\{x \in X | f(x) = a\}$
$\{x \in X | f(x) \geq g(x)\}$
$\{x \in X | f(x) \leq g(x)\}$
$\{x \in X | f(x) = g(x)\}$

(ii) Τα παρακάτω σύνολα είναι ανοικτά:
$\{x \in X | f(x) > a\}$
$\{x \in X | f(x) < a\}$
$\{x \in X | f(x) > g(x)\}$
$\{x \in X | f(x) < g(x)\}$

Άσκηση 33 *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος, D πυκνό υποσύνολο του X και $f|_D = g|_D$ (αντιστοίχως $f|_D \leq g|_D$). Δείξτε ότι $f = g$ (αντιστοίχως $f \leq g$).*

Άσκηση 34 *Έστω $(X,\rho_1), (Y,\rho_2)$ μετρικοί χώροι και $f : (X,\rho_1) \to (Y,\rho_2)$ συνάρτηση. Αποδείξτε ότι f συνεχής στο $x_o \Leftrightarrow \forall (x_n)_n$ ακολουθία στο X με $x_n \xrightarrow{\rho_1} x_o \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{\rho_2} f(x_o)$.*

Άσκηση 35 *Έστω (X,ρ_1), (Y,ρ_2) μετρικοί χώροι, $f : (X,\rho_1) \to (Y,\rho_2)$ συνεχής συνάρτηση και $K \subseteq X$ συμπαγές. Δείξτε ότι $f(K)$ συμπαγές.*

Άσκηση 36 *Έστω $X \neq \emptyset$ συμπαγής μετρικός χώρος και $f : X \to \mathbb{R}$ συνεχής. Αποδείξτε ότι η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή, δηλ. $\exists x_1, x_2 \in X$ τέτοια ώστε $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, $\forall x \in X$.*

Άσκηση 37 *Έστω $X \neq \emptyset$ συμπαγής μετρικός χώρος και $f : X \to X$ συνάρτηση με την ιδιότητα $\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y)$, $\forall x, y \in X$. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $x_o \in X$ τέτοιο ώστε $f(x_o) = x_o$.*

<u>Ισοσυνέχεια, Ομοιόμορφη συνέχεια</u>

Άσκηση 38 *Έστω $X \neq \emptyset$ μετρικός χώρος και $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων που συγκλίνει ομοιόμορφα. Δείξτε ότι η (f_n) είναι ισοσυνεχής.*

Άσκηση 39 *(i) Έστω $\mathcal{F} = \{f_n : (0, 1) \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}\}$ οικογένεια συναρτήσεων. Να εξεταστεί η $\mathcal{F}$ ως προς την ισοσυνέχεια.*

(ii) Έστω $\mathcal{F} = \{f_n : [0, 1) \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}\}$ οικογένεια συναρτήσεων. Να εξεταστεί η $\mathcal{F}$ ως προς την ισοσυνέχεια.

(iii) Έστω $\mathcal{F} = \{f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}\}$ οικογένεια συναρτήσεων. Να εξεταστεί η $\mathcal{F}$ ως προς την ισοσυνέχεια.

Άσκηση 40 *Έστω $\mathcal{F} = \{f_n : [0, 1] \to \mathbb{R} : f$ συνεχής, $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|\}$ οικογένεια συναρτήσεων. Δείξτε ότι η $\mathcal{F}$ είναι ισοσυνεχής.*

Άσκηση 41 *Έστω $(f_n)_n$ η ακολουθία των συναρτήσεων*

$$f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1 - nx)^2}, \; x \in [0, 1], \; n \in \mathbb{N} \qquad .$$

Δείξτε ότι:
(i) Η $(f_n)_n$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη.
(ii) Η $(f_n)_n$ συγκλίνει κατα σημείο.
(iii) Η $(f_n)_n$ δεν έχει καμιά υπακολουθία που να συγκλινει ομοιόμορφα στο διάστημα $[0, 1]$.
Υπάρχει αντίφαση με το Θεώρημα Ascoli; Ποιά είναι αυτή;

Άσκηση 42 *Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος, $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων με $f_n \overset{\kappa.\sigma.}{\to} f$. Να δειχθεί ότι η ακολουθία f_n είναι ισοσυνεχής $\Leftrightarrow f_n \overset{o\mu.}{\to} f$.*

Άσκηση 43 *Έστω (X, ρ_1) συμπαγής μετρικός χώρος και (Y, ρ_2) μετρικός χώρος. Αν $f_n : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$ είναι μια ακολουθία ισοσυνεχών συναρτήσεων με $f_n \overset{\kappa.\sigma.}{\to} f$, να δειχθεί ότι $f_n \overset{o\mu.}{\to} f$.*

Άσκηση 44 *Έστω (X, ρ), (Y, ρ) μετρικοί χώροι με (Y, ρ) πλήρης, $D \subseteq X$ τέτοιο ώστε $\overline{D} = X$. Αν $f_n : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$ είναι μια ακολουθία ισοσυνεχών συναρτήσεων ώστε η $(f_n(x))_n$ συγκλίνει $\forall x \in D$, να δειχθεί ότι $\exists f : X \to Y$ συνεχής ώστε $f_n \overset{\kappa.\sigma.}{\to} f$. Επίσης, δείξτε ότι η $(f_n)_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του X, δηλ. $\forall K \subseteq X$ συμπαγές, η $f_n|_K \overset{o\mu.}{\to} f|_K$.*

Άσκηση 45 *Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχής ώστε $\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)dx = 0$, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Δείξτε ότι $f \equiv 0$. Ακολούθως, δείξτε ότι αν $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις τέτοιες ώστε $\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)dx = \int_0^1 x^n g(x)dx$, $\forall n \in \mathbb{N}$, τότε $f \equiv g$.*

Άσκηση 46 *Έστω $X \neq \emptyset$ σύνολο και $\mathcal{B}(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : f$ φραγμένη $\}$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\rho : \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(X) \to \mathbb{R}$ με $\rho(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}$, $\forall f, g \in \mathcal{B}(X)$. Να δείξετε ότι η ρ είναι μετρική στο χώρο $\mathcal{B}(X)$ και ότι ο $(\mathcal{B}(X), \rho)$ είναι πλήρης.*

Άσκηση 47 *Έστω $X \neq \emptyset$ σύνολο και $\mathcal{C}(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : f$ συνεχής και φραγμένη $\}$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\rho : \mathcal{C}(X) \times \mathcal{C}(X) \to \mathbb{R}$ με $\rho(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}$, $\forall f, g \in \mathcal{C}(X)$. Να δείξετε ότι η ρ είναι μετρική στο χώρο $\mathcal{C}(X)$ και ότι ο $(\mathcal{C}(X), \rho)$ είναι πλήρης.*

Άσκηση 48 *Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Τότε, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
(i) A συμπαγές στο $(\mathcal{C}([0,1]), \rho)$.

(ii) A κλειστό στο $(\mathcal{C}([0,1]), \rho)$, ισοσυνεχές και κατά σημείο φραγμένο.

Άσκηση 49 *Έστω $B := \{f \in \mathcal{C}([0,1]) : \|f\|_\infty \leq 1\}$, δηλ. $B = \widetilde{S}_{\|\cdot\|_\infty}$ στον $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$. Δείξτε ότι το B δεν είναι συμπαγές στον $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.*

Άσκηση 50 *Ισοδύναμη διατύπωση του Θεωρήματος Weierstrass: Για κάθε $f \in \mathcal{C}([a,b])$ και $\epsilon > 0$, υπάρχει $p \in A \equiv \{p \in \mathcal{C}([a,b]) : p$ πολυώνυμο $\}$ τέτοιο ώστε $|f(x) - p(x)| < \epsilon$, $\forall x \in [a,b]$.*

Άσκηση 51 *Έστω $D = \{x_1, x_2, \ldots\}$ αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του $[0,1]$ και $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με*

$$f_n(x) = d(x, \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}), \forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}.$$

Εξετάστε την $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ως προς την κατα σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση.

Άσκηση 52 *Έστω X, Y μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$ μια συνάρτηση επί. Να δείξετε ότι:*
(i) Αν ο X είναι συμπαγής και η f συνεχής, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.
(ii) Αν ο X είναι ολικά φραγμένος και η f ομοιόμορφα συνεχής, τότε ο Y είναι ολικά φραγμένος.

Άσκηση 53 *Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ακολουθία Riemann ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, ομοιόμορφα φραγμένη (δηλ. $\exists M > 0 : |f_n(t)| \leq M$, $\forall t \in [0,1]$,$\forall n \in \mathbb{N}$). Θέτουμε $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x f_n(t)dt, x \in [0,1], n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία F_{k_n} της F_n η οποία να συγκλίνει ομοιόμορφα.*

Άσκηση 54 *Αποδείξτε ότι κάθε βασική ακολουθία σενα μετρικό χώρο (X, ρ) έχει το πολύ ένα σημείο συσσώρευσης.*

Άσκηση 55 *Δείξτε ότι δεν υπάρχει ακολουθία $(G_n)_n$ ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ ώστε*

$$\mathbb{Q} = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$$

(δηλ. το $\mathbb{Q}$ δεν μπορεί να γραφτεί σαν G_δ σύνολο).

<u>Αντιπαραδείγματα</u>

Αντιπαράδειγμα 1 *Έστω $X \neq \emptyset$ μετρικός χώρος και ρ_1, ρ_2 δύο ισοδύναμες μετρικές στο X. Αν ο (X, ρ_1), είναι ολικά φραγμένος, δεν έπεται ότι ο (X, ρ_2) είναι ολικά φραγμένος.*

Αντιπαράδειγμα 2 *Έστω $X \neq \emptyset$ μετρικός χώρος και ρ_1, ρ_2 δύο ισοδύναμες μετρικές στο X. Αν ο (X, ρ_1) είναι πλήρης μετρικός χώρος, δεν έπεται ότι ο (X, ρ_2) είναι πλήρης.*

Αντιπαράδειγμα 3 *Δείξτε, με κατάλληλα αντιπαραδείγματα, ότι:*
(i) Ένας διαχωρίσιμος μετρικός χώρος δεν είναι κατάνάγκην και συμπαγής.
(ii) Δεν ισχύει πάντα ότι αν ένα σύνολο K είναι κλειστό και φραγμένο, τότε είναι και συμπαγές.
(iii) Ένας ομοιομορφισμός δεν είναι κατάνάγκην ισομετρία.
(iv) Κάθε φραγμένο σύνολο δεν είναι πάντοτε ολικά φραγμένο.