

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

'ΛΥΚΕΙΟΥ ΒΕΡΓΙΝΑΣ ΛΑΡΝΑΚΑΣ'

ΣΧΟΛΙΚΗΣ ΧΡΟΝΙΑΣ 2019-2020

ΙΩΑΚΕΙΜ ΙΩΑΝΝΗΣ



<http://ioakimioannis.com>



yiannis.ioakim.math@gmail.com

Μέρος Β

1. **Εύρεση πεδίου ορισμού:** Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{\ln(x^2)}{x^2}$ είναι πηλίκο των συναρτήσεων $g(x) = \ln(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$ και $h(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς, το π.ο. της είναι το υποσύνολο εκείνο του κοινού τους π.ο. πλην των σημείων στα οποία μηδενίζεται η συνάρτηση h του παρονομαστή, δηλ. $D(f) = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}_*$.¹⁰

Εύρεση σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τους άξονες των συντεταγμένων:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(x^2)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2) = 0 \Leftrightarrow e^{\ln(x^2)} = e^0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1) \cdot (x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Έτσι, και αφού το 0 δεν ανήκει στο $D(f)$, τα σημεία τομής είναι τα $(1,0)$ και $(-1,0)$.

Εύρεση διαστημάτων μονotonίας και τοπικών ακροτάτων:

Η συνάρτηση είναι παντού παραγωγίσιμη στο π.ο. της (ως πηλίκο τέτοιων) με

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\ln(x^2)}{x^2} \right)' = \frac{(\ln(x^2))' \cdot x^2 - (x^2)' \cdot \ln(x^2)}{(x^2)^2} = \frac{\frac{2x}{x^2} \cdot x^2 - (2x) \cdot \ln(x^2)}{x^4} \\ &= \frac{2x - 2x \cdot \ln(x^2)}{x^4} = \frac{2x[1 - \ln(x^2)]}{x^4} = \frac{2[1 - \ln(x^2)]}{x^3}, \quad x \in \mathbb{R}_* \end{aligned}$$

και αρα, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x^2) = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2) = 1 \Leftrightarrow e^{\ln(x^2)} = e^1$

$$\Leftrightarrow x^2 = e \Leftrightarrow x^2 - e = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{e}) \cdot (x + \sqrt{e}) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{e}$$

Τα κρίσιμα σημεία¹¹ της f είναι τα $x = \pm \sqrt{e}$. Στο σημείο αυτό, χρήσιμη είναι η παρατήρηση ότι (λόγω της παρουσίας των τετραγώνων στη συνάρτηση), η f είναι άρτια. Πράγματι,

$$x \in \mathbb{R}_* = D(f) \Rightarrow (-x) \in \mathbb{R}_* \text{ και } \forall x \in \mathbb{R}_* f(-x) = \frac{\ln(x^2)}{x^2} = f(x)$$

Έτσι, αρκεί να τη μελετήσουμε για $x > 0$. Είναι $f(\sqrt{e}) = \frac{1}{e}$ και

$\forall x \in (0, \sqrt{e})$ είναι $f'(x) > 0$ και αρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό (λόγω και της συνέχειας της f στο $x = \sqrt{e}$ έπεται ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, \sqrt{e}]$)

$\forall x \in (\sqrt{e}, +\infty)$ είναι $f'(x) < 0$ και αρα η f

x	$-\infty$	$-\sqrt{e}$	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	-		+	-
$f(x)$	↗	↘		↗	↘
	$\max\left(-\sqrt{e}, \frac{1}{e}\right)$			$\max\left(\sqrt{e}, \frac{1}{e}\right)$	

¹⁰ Εδώ μπορεί να μπει κάποιος στον πειρασμό και να κάνει τον **αλγεβρικό** χειρισμό $\ln(x^2) = 2 \ln(x)$ και κατεπέκτασιν, να θεωρήσει ως $D(f) = (0, +\infty)$. Αυτό βέβαια είναι λάθος, διότι η συνάρτηση g με τύπο $f(x) = \ln(x^2)$ έχει π.ο. το $\mathbb{R}$ ενώ η συνάρτηση $\tilde{g}$ με τύπο $\tilde{g}(x) = 2 \ln(x)$ έχει π.ο. το $(0, +\infty)$ και αρα δεν είναι ίσες (ως συναρτήσεις).

¹¹ Ως συνέπεια του **Θεωρήματος του Fermat**, τα σημεία στα οποία μια συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη είτε είναι και η παράγωγός της μηδενίζεται φέρουν την ονομασία **κρίσιμα σημεία** και αυτά είναι τα πιθανά ακρότατα της συνάρτησης. Στην ειδική περίπτωση που για ένα κρίσιμο σημείο x_0 είναι $f'(x_0) = 0$, αυτό λέγεται **στάσιμο σημείο** και η ονομασία δικαιολογείται ακριβώς από το ότι στην περίπτωση αυτή δεν έχουμε μεταβολή στο γράφημα της συνάρτησης.

είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό (λόγω και της συνέχειας της f στο $x = \sqrt{e}$ έπεται ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\sqrt{e}, +\infty)$). Έπεται ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, \sqrt{e}]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\sqrt{e}, 0)$ και το γράφημα της συνάρτησης έχει τοπικά (τα οποία είναι και ολικά) μέγιστα στα σημεία $(-\sqrt{e}, \frac{1}{e})$ και $(\sqrt{e}, \frac{1}{e})$.

Μελέτη κυρτότητας και εύρεση σημείων καμπής:

Η συνάρτηση είναι παντού δις παραγωγίσιμη στο π.ο. της με

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{2[1 - \ln(x^2)]}{x^3} \right)' = 2 \left(\frac{1 - \ln(x^2)}{x^3} \right)' = 2 \frac{(1 - \ln(x^2))' \cdot x^3 - (x^3)' \cdot (1 - \ln(x^2))}{(x^3)^2} \\ &= 2 \frac{-\frac{2x}{x^2} \cdot x^3 - (3x^2) \cdot (1 - \ln(x^2))}{x^6} = 2 \frac{-2x^2 + (3x^2) \cdot (\ln(x^2) - 1)}{x^6} \\ &= 2x^2 \frac{-2 + 3 \cdot (\ln(x^2) - 1)}{x^6} = 2 \frac{3 \ln(x^2) - 5}{x^4}, \quad x \in \mathbb{R}_* \end{aligned}$$

Είναι

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3 \ln(x^2) - 5 = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2) = \frac{5}{3} \Leftrightarrow$$

$$x^2 = e^{\frac{5}{3}} \Leftrightarrow x = \pm \left(e^{\frac{5}{3}} \right)^{1/2} = e^{\frac{5}{6}} \quad \text{και} \quad f\left(e^{\frac{5}{6}}\right) =$$

$$f\left(-e^{\frac{5}{6}}\right) = \frac{5}{3} e^{-\frac{5}{3}}. \quad \text{Είναι} \quad f''(x) < 0, \forall x \in \left(0, e^{\frac{5}{6}}\right)$$

και άρα η f είναι κοίλη στο διάστημα αυτό και $f''(x) > 0, \forall x \in \left(e^{\frac{5}{6}}, +\infty\right)$ και άρα η f είναι κυρτή στο διάστημα αυτό.

Έπεται ότι το $\left(e^{\frac{5}{6}}, f\left(e^{\frac{5}{6}}\right)\right) = \left(e^{\frac{5}{6}}, \frac{5}{3} e^{-\frac{5}{3}}\right)$ είναι σημείο καμπής του γραφήματος της f , όπως επίσης και το $\left(-e^{\frac{5}{6}}, f\left(-e^{\frac{5}{6}}\right)\right) = \left(-e^{\frac{5}{6}}, \frac{5}{3} e^{-\frac{5}{3}}\right)$

x	$-\infty$	$-e^{\frac{5}{6}}$	0	$e^{\frac{5}{6}}$	$+\infty$
f'	-	+	-	+	
f	↘	↗	↘	↗	
	ΣΚ		ΣΚ		

Εύρεση ασύμπτωτων:

Αφού $D(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, ελέγχουμε τα όρια στα άκρα των δυο διαστημάτων:

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x^2)}{x^2} \stackrel{x > 0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \ln(x)}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln(x) \cdot \frac{1}{x^2} \right)$$

και αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$, έπεται ότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ και αφού ¹² η συνάρτηση f είναι άρτια, έπεται ότι και $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$.

Έτσι, ο άξονας των τεταγμένων είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη του γραφήματος της f στο $-\infty$ αριστερά και δεξιά του 0.

Τώρα,

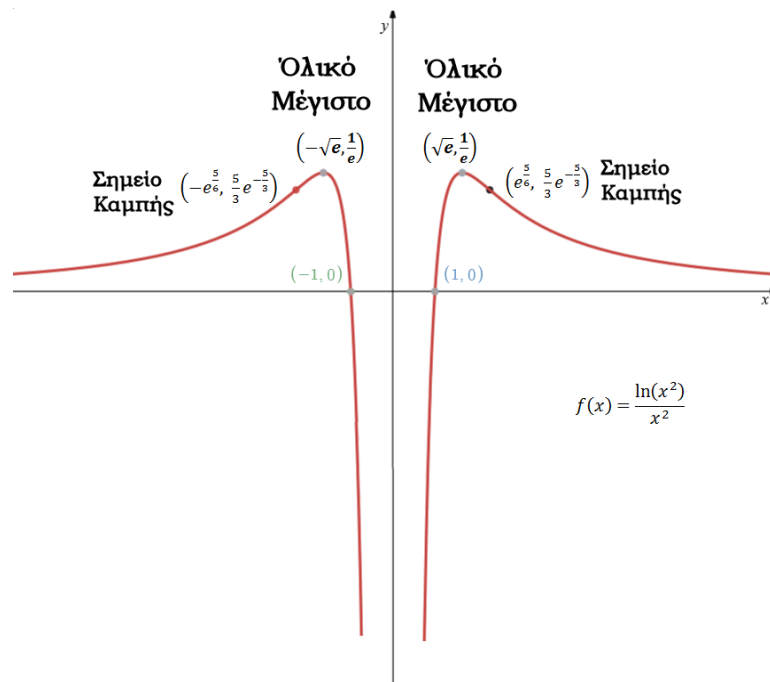
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\ln(x^2)}{x^2} = 0$$

(εύκολο: εφαρμογή κανόνα του L'Hôpital) και άρα ο άξονας των τεταγμένων είναι οριζόντια ασύμπτωτη του γραφήματος της f στο $\pm\infty$.

¹² Διαφορετικά,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(x^2)}{x^2} \stackrel{x < 0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \ln(-x)}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(-x)}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\ln(-x) \cdot \frac{1}{x^2} \right) = \dots = -\infty$$

Έχουμε όλα τα συστατικά για να κατασκευάσουμε το γράφημα της f :



2.¹³ Καταρχάς, αφού $t \cdot p < 0 \Rightarrow t \neq p \Rightarrow p - t \neq 0$. Έχουμε:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{at^2 + ap^2}{2} = \frac{\alpha(t^2 + p^2)}{2}$$

και

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2at + 2ap}{2} = \alpha(t + p)$$

Επίσης, αφού $\Sigma A, BP \perp \Sigma P$, έπεται ότι

$$y_\Sigma = y_A = 2at \quad \text{και} \quad y_P = y_B = 2ap$$

και αφού τα Σ και P ανήκουν στη διευθετούσα, έπεται ότι $x_\Sigma = -\alpha = x_P$

(α) i. Αφού $AM \parallel x\chi'$, έπεται ότι $y_A = y_N = y_M = \alpha(t + p)$ και αφού $AN \parallel \Sigma A \parallel PB$ και $\Sigma A, BP \perp \Sigma P$, αρκεί να δείξουμε ότι το Λ είναι το μέσον του ΣP . Έχουμε

¹³ Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, η παραβολή με εστία το σημείο εστία $E(\alpha, 0)$, $\alpha \neq 0$ και διευθετούσα την ευθεία $(\delta): x = -\alpha$, έχει εξίσωση

$$y^2 = 4\alpha x.$$

Η παραβολή με εστία το σημείο εστία $E(0, \alpha)$, $\alpha \neq 0$ και διευθετούσα την ευθεία $(\delta): y = -\alpha$, έχει εξίσωση

$$x^2 = 4\alpha y.$$

Εξίσωση παραβολής σε καρτεσιανές συντεταγμένες	Εξίσωση παραβολής σε παραμετρική μορφή
$y^2 = 4\alpha x$	$\begin{cases} x = x(t) = \alpha t^2 \\ y = y(t) = 2\alpha t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$
$x^2 = 4\alpha y$	$\begin{cases} x = x(t) = 2\alpha t \\ y = y(t) = \alpha t^2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$

$\frac{x_S + x_P}{2} = \frac{x_S + x_P}{2} = -\alpha = x_A$ και $\frac{y_S + y_P}{2} = \frac{2at + 2ap}{2} = \alpha(t + p) = y_A$
και το συμπέρασμα έπεται.

Μέχρι τώρα:

$$M\left(\frac{\alpha(t^2 + p^2)}{2}, \alpha(t + p)\right), \quad \Lambda(-\alpha, \alpha(t + p)), \quad \Sigma(-\alpha, 2at), \quad P(-\alpha, 2ap)$$

και

$$N\left(\frac{\alpha}{4}(t^2 + p^2 - 2), \alpha(t + p)\right)$$

ii. Θα βρούμε την κλίση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο της N :

Παραγωγίζουμε πεπλεγμένα: για $y \neq 0$,

$$y^2 = 4ax \Leftrightarrow 2yy' = 4a \Leftrightarrow y' = \frac{2a}{y}$$

Η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο N έχει κλίση $\lambda(N) = \frac{2a}{y} \Big|_N = \frac{2a}{\alpha(t+p)} = \frac{2}{t+p}$.

Η κλίση της ευθείας AB είναι

$$\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2ap - 2at}{ap^2 - at^2} = \frac{2a(p - t)}{a(p^2 - t^2)} = \frac{2(p - t)}{(p - t)(p + t)} = \frac{2}{t + p}$$

και έτσι, $\lambda_{AB} = \lambda(N)$.

(β)¹⁴ Η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο $A(at^2, 2at)$ έχει κλίση

$$\lambda = y'(x_A) = \frac{2a}{y} \Big|_A = \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t}$$

και έτσι, η εξίσωση (της εφαπτομένης) είναι $y - 2at = \frac{1}{t}(x - at^2)$, δηλ.

$$ty - 2at^2 = x - at^2$$

δηλ.

$$ty = x + at^2$$

Ομοίως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο B είναι η

$$py = x + ap^2$$

Λύνοντας το πολύ εύκολο σύστημα των δυο αυτών εξισώσεων, βρίσκουμε ότι η μοναδική του λύση είναι η

$$x = -a = x_A \quad \text{και} \quad y = \alpha(t + p) = y_A$$

Τώρα, από την ισότητα των τριγώνων $\Lambda\Lambda\Sigma$ και $\Lambda\Lambda E$, προκύπτει ότι η ΛA είναι διχοτόμος της $\Sigma\Lambda E$ και $\Lambda\hat{E}A = 90^\circ$. Συνεπώς, $\Sigma\hat{E}B = 90^\circ$ και άρα τα τρίγωνα $\Lambda P B$ και $\Lambda E B$ είναι ίσα (Π-Π-Ο), οπότε η ΛB είναι διχοτόμος της $P\hat{B}E$ άρα και εφαπτομένη της παραβολής στο B . Από την ίδια ισότητα τριγώνων έπεται ότι η ΛB είναι διχοτόμος της $P\hat{\Lambda}E$, άρα $\Lambda A \perp \Lambda B$.

(γ)¹⁵ Έχουμε

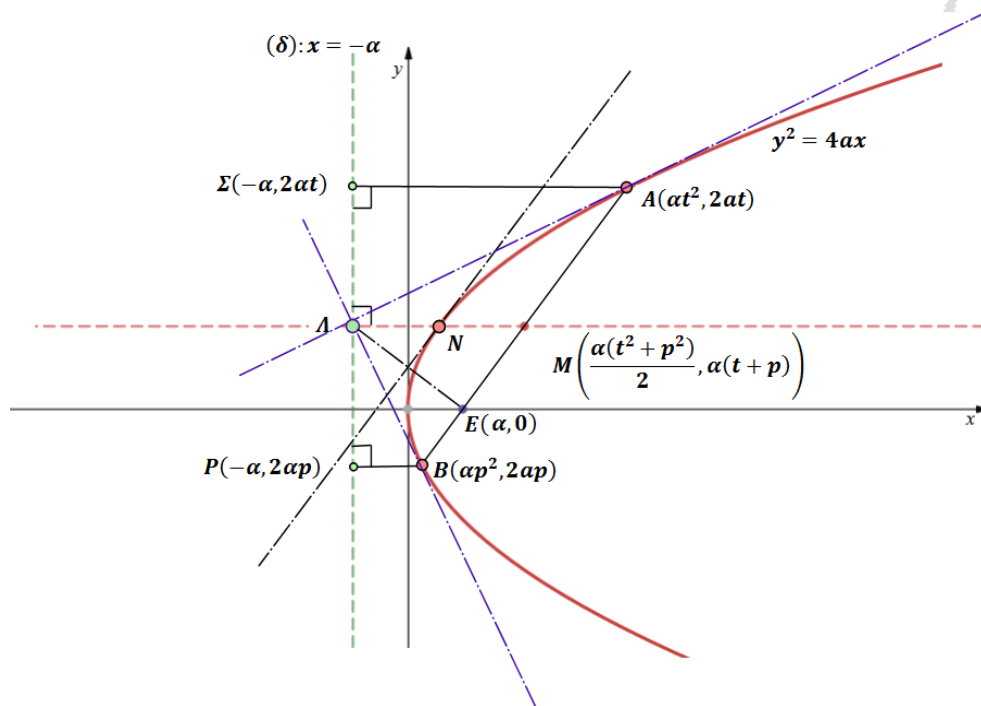
¹⁴ Στη Γεωμετρία των καμπύλων, **ορθοπτικό σύνολο καμπύλης** λέγεται το σύνολο των σημείων του επιπέδου για τα οποία δυο εφαπτομένες της καμπύλης τέμνονται κάθετα. Στην παραβολή, το ορθοπτικό σύνολο είναι ακριβώς η διευθετούσα της.

¹⁵ Είναι ένα πολύ βασικό αποτέλεσμα (εστιακή χορδή)/Δες Ασκήση 10/σελ 97 του σχολικού Γ τεύχους

$$\begin{aligned} \lambda_{AE} = \lambda_{BE} &\Leftrightarrow \frac{2at - 0}{at^2 - \alpha} = \frac{2ap - 0}{ap^2 - \alpha} &\Leftrightarrow \frac{at}{a(t^2 - 1)} = \frac{ap}{a(p^2 - 1)} \\ &\Leftrightarrow \frac{t}{t^2 - 1} = \frac{p}{p^2 - 1} &\Leftrightarrow t(p^2 - 1) = p(t^2 - 1) \\ &\Leftrightarrow (p - t)(tp + 1) = 0 \end{aligned}$$

Αλλά, τα σημεία $A(at^2, 2at)$ και $B(ap^2, 2ap)$ είναι διαφορετικά και αρα $p \neq t$ και τότε η πιο πάνω δίνει $t \cdot p + 1 = 0$, δηλ. $t \cdot p = -1$.¹⁶

Σημείωση: Από το αποτέλεσμα αυτό, έπεται άμεσα ότι $AL \perp BL$



(δ) Αφού τα L και M έχουν την ίδια τεταγμένη, έπεται ότι η LM είναι διάμετρος του ζητούμενου κύκλου και αφού δείξαμε ότι το N είναι το μέσον της LM , έπεται ότι αυτό θα είναι και το κέντρο του κύκλου. Η δε ακτίνα του κύκλου είναι

$$R = (LN) = x_M - x_N = \frac{\alpha(t^2 + p^2)}{2} - \frac{\alpha}{4}(t^2 + p^2 - 2) = \frac{\alpha}{4}(t^2 + p^2 + 2)$$

και αρα η εξίσωση του κύκλου είναι η

$$\left(x - \frac{\alpha(t^2 + p^2 - 2)}{4}\right)^2 + (y - \alpha(t + p))^2 = \frac{\alpha^2}{16}(t^2 + p^2 + 2)^2$$

¹⁶ Διαφορετικά, τα σημεία A , E και B είναι συγγραμμικά (ανήκουν στην ίδια ευθεία) αν και μόνο αν

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_E & y_E & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ δηλ. αν και μόνο αν } \begin{vmatrix} at^2 & 2at & 1 \\ ap^2 & 2ap & 1 \\ \alpha & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

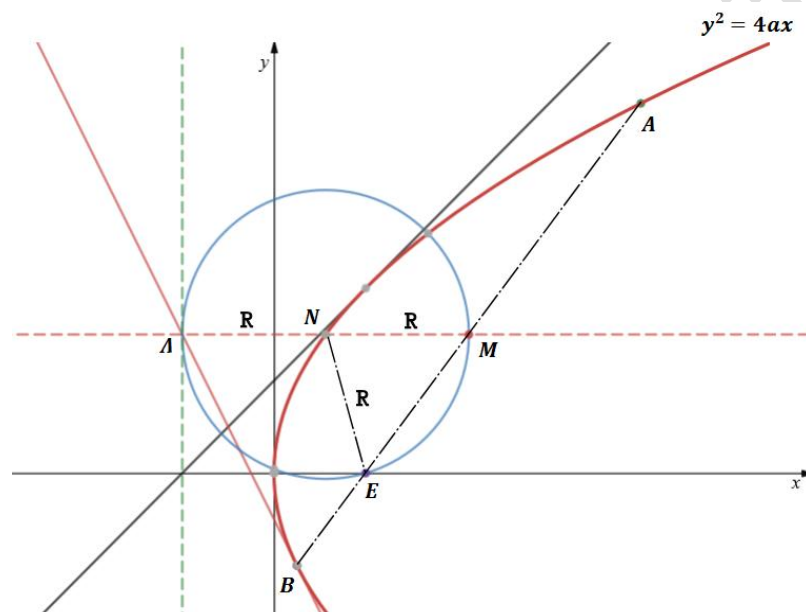
Εύκολα βρίσκουμε

$$\begin{vmatrix} at^2 & 2at & 1 \\ ap^2 & 2ap & 1 \\ \alpha & 0 & 1 \end{vmatrix} = (t - p)(1 + tp)$$

και αρα, αφού $p \neq t$, τα σημεία A , E και B είναι συγγραμμικά αν και μόνο αν $tp + 1 = 0$, δηλ. $t \cdot p = -1$.

και

$$\begin{aligned}(AB) &= \sqrt{(\alpha p^2 - \alpha t^2)^2 + (2\alpha p - 2\alpha t)^2} = |\alpha| \cdot \sqrt{(p-t)^2 \cdot [(p+t)^2 + 4]} \\&= a \cdot \sqrt{(p-t)^2 \cdot \left(t^2 + p^2 + \underbrace{2pt}_{-1} + 4\right)} = a\sqrt{(p-t)^2 \cdot (t^2 + p^2 + 2)} \\&\quad a\sqrt{(p-t)^2 \cdot (t^2 + p^2 - 2pt)} = a\sqrt{(p-t)^2 \cdot (p-t)^2} = a(p-t)^2 \\&= a(t^2 + p^2 - 2pt) = a(t^2 + p^2 + 2) = 4R\end{aligned}$$


$$I_0 = \int dx = x + c$$

καὶ

Τώρα, για $v \in \mathbb{N}$, $v \geq 2$,

$$I_\nu = \int \tau \epsilon \mu^\nu x \, dx = \int \tau \epsilon \mu^{\nu-2} x \cdot \tau \epsilon \mu^2 x \, dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \tau \epsilon \mu^{v-2} x \cdot (\epsilon \varphi x)' dx \stackrel{\text{κατά}}{\underset{\text{μέρη}}{=}} \tau \epsilon \mu^{v-2} x \cdot \epsilon \varphi x - \int \epsilon \varphi x \cdot (\tau \epsilon \mu^{v-2} x)' dx \\
 &= \tau \epsilon \mu^{v-2} x \cdot \epsilon \varphi x - (v-2) \int \epsilon \varphi x \cdot \tau \epsilon \mu^{v-3} x \cdot (\tau \epsilon \mu x)' dx \\
 &= \tau \epsilon \mu^{v-2} x \cdot \epsilon \varphi x - (v-2) \int \epsilon \varphi x \cdot \tau \epsilon \mu^{v-3} x \cdot (\tau \epsilon \mu x \cdot \epsilon \varphi x) dx \\
 &= \tau \epsilon \mu^{v-2} x \cdot \epsilon \varphi x - (v-2) \int \epsilon \varphi^2 x \cdot \tau \epsilon \mu^{v-2} x dx \\
 &= \tau \epsilon \mu^{v-2} x \cdot \epsilon \varphi x - (v-2) \int (\tau \epsilon \mu^2 x - 1) \cdot \tau \epsilon \mu^{v-2} x dx \\
 &= \tau \epsilon \mu^{v-2} x \cdot \epsilon \varphi x - (v-2) \int \tau \epsilon \mu^v x dx + (v-2) \int \tau \epsilon \mu^{v-2} x dx \\
 &= \tau \epsilon \mu^{v-2} x \cdot \epsilon \varphi x - (v-2) I_v + (v-2) I_{v-2}
 \end{aligned}$$

και αρα

$$I_v + (v-2) I_v = \tau \epsilon \mu^{v-2} x \cdot \epsilon \varphi x + (v-2) I_{v-2}$$

δηλ.

$$(v-1) I_v = \tau \epsilon \mu^{v-2} x \cdot \epsilon \varphi x + (v-2) I_{v-2}$$

δηλ.

$$I_v = \frac{\tau \epsilon \mu^{v-2} x \cdot \epsilon \varphi x}{v-1} + \frac{v-2}{v-1} I_{v-2} \quad (*)$$

(β) Έχουμε: ¹⁷

$$\begin{aligned}
 (x^2 + 1)f'(x) &= \tau \epsilon \mu^5 x - 2xf(x) \Leftrightarrow (x^2 + 1) \cdot f'(x) + 2xf(x) = \tau \epsilon \mu^5 x \\
 &\Leftrightarrow (x^2 + 1) \cdot f'(x) + (x^2 + 1)' \cdot f(x) = \tau \epsilon \mu^5 x \\
 &\Leftrightarrow [(x^2 + 1)f(x)]' = \tau \epsilon \mu^5 x \\
 x \mapsto (x^2 + 1)f(x) \text{ συνεχής} &\Leftrightarrow \int [(x^2 + 1)f(x)]' dx = \int \tau \epsilon \mu^5 x dx \\
 &\Leftrightarrow (x^2 + 1)f(x) = I_5
 \end{aligned}$$

Από το προηγούμενο ερώτημα (τύπος (*)), έχουμε

$$\begin{aligned}
 I_5 &= \frac{\tau \epsilon \mu^{5-2} x \cdot \epsilon \varphi x}{5-1} + \frac{5-2}{5-1} I_{5-2} = \frac{\tau \epsilon \mu^3 x \cdot \epsilon \varphi x}{4} + \frac{3}{4} I_3 \\
 &= \frac{\tau \epsilon \mu^3 x \cdot \epsilon \varphi x}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{\tau \epsilon \mu^{3-2} x \cdot \epsilon \varphi x}{3-1} + \frac{3-2}{3-1} I_{3-2} \right) \\
 &= \frac{\tau \epsilon \mu^3 x \cdot \epsilon \varphi x}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{\tau \epsilon \mu x \cdot \epsilon \varphi x}{2} + \frac{1}{2} I_1 \right) \\
 &= \frac{\tau \epsilon \mu^3 x \cdot \epsilon \varphi x}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{\tau \epsilon \mu x \cdot \epsilon \varphi x}{2} + \frac{1}{2} \ln |\tau \epsilon \mu^2 x + \tau \epsilon \mu x \cdot \epsilon \varphi x| + c \right)
 \end{aligned}$$

¹⁷ Είναι ένα πρόβλημα αρχικών τιμών



$$= \frac{\tau\epsilon\mu^3 x \cdot \epsilon\phi x}{4} + \frac{3}{8}(\tau\epsilon\mu x \cdot \epsilon\phi x + \ln|\tau\epsilon\mu^2 x + \tau\epsilon\mu x \cdot \epsilon\phi x| + c)$$

και αρα

$$(x^2 + 1)f(x) = \frac{\tau\epsilon\mu^3 x \cdot \epsilon\phi x}{4} + \frac{3}{8}(\tau\epsilon\mu x \cdot \epsilon\phi x + \ln|\tau\epsilon\mu^2 x + \tau\epsilon\mu x \cdot \epsilon\phi x| + c)$$

$$(x^2 + 1 \neq 0, \forall x \in [0, \pi/2))$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \left[\frac{\tau\epsilon\mu^3 x \cdot \epsilon\phi x}{4} + \frac{3}{8}(\tau\epsilon\mu x \cdot \epsilon\phi x + \ln|\tau\epsilon\mu^2 x + \tau\epsilon\mu x \cdot \epsilon\phi x| + c) \right]$$

αφού $f(0) = 2$, αντικαθιστούμε στην τελευταία:

$$2 = \frac{1}{0^2 + 1} \left[\frac{\tau\epsilon\mu^3 0 \cdot \epsilon\phi 0}{4} + \frac{3}{8}(\tau\epsilon\mu 0 \cdot \epsilon\phi 0 + \ln|\tau\epsilon\mu^2 0 + \tau\epsilon\mu 0 \cdot \epsilon\phi 0| + c) \right]$$

δηλ. $2 = \frac{3}{8}(\ln 1 + c)$, δηλ. $c = \frac{16}{3}$. Έτσι,

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \left[\frac{\tau\epsilon\mu^3 x \cdot \epsilon\phi x}{4} + \frac{3}{8} \left(\tau\epsilon\mu x \cdot \epsilon\phi x + \ln|\tau\epsilon\mu^2 x + \tau\epsilon\mu x \cdot \epsilon\phi x| + \frac{16}{3} \right) \right], \quad \forall x \in [0, \pi/2)$$

4. (α) Θεώρημα [Fermat] ¹⁸

Εαν μια συνάρτηση f λαμβάνει τοπικό ακρότατο σε ένα σημείο x_0 , τότε είτε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό είτε είναι και μάλιστα $f'(x_0) = 0$.

(β) i. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f έχει τοπικό ακρότατο, έστω x_0 . Τότε, αφού αυτή είναι παραγωγίσιμη, από το Θεώρημα του Fermat, θα είναι $f'(x_0) = 0$. Έχουμε

ii. 10ς τρόπος Έστω $-1 < x_1 < x_2 < 1$ δυο λύσεις της εξίσωσης $g(x) = 0$. Τότε,

$$\begin{cases} g(x_1) = g(x_2) = 0 \\ g \text{ συνεχής στο } [x_1, x_2] \\ g \text{ παραγωγίσιμη στο } (x_1, x_2) \end{cases} \quad (\Theta. Rolle) \Rightarrow \exists \xi \in (x_1, x_2) : g'(\xi) = 0$$

¹⁸ Θυμηθείτε την

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι η $f'(x_0)$ υπάρχει. Αφού η συνάρτηση f λαμβάνει τοπικό ακρότατο στο σημείο x_0 , αυτό θα είναι είτε τοπικό ελάχιστο είτε τοπικό μέγιστο. Υποθέτουμε πρώτα ότι λαμβάνει τοπικό μέγιστο στο σημείο αυτό, δηλ το σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο τοπικού μεγίστου του γραφήματος της f . Τότε $f(x) \leq f(x_0)$ σε μια ανοικτή περιοχή $\pi^*(x_0)$ του x_0 . Ισοδύναμα, $f(x_0 + h) \leq f(x_0)$ για $h \rightarrow 0$. Τότε, για $h < 0$ είναι

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

και αρα

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

Από την τελευταία σχέση και το ότι η $f'(x_0)$ υπάρχει, έχουμε ότι $f'(x_0) \leq 0$. Ομοίως, για $h < 0$ είναι

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

και αρα

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

και αφού η $f'(x_0)$ υπάρχει, έχουμε ότι $f'(x_0) \geq 0$. Έτσι, τελικά, $f'(x_0) = 0$. Ομοίως αν το σημείο x_0 είναι τοπικό ελάχιστο.

Αλλά, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = -1$, άτοπο. Άρα, υπάρχει το πολύ μια ρίζα της εξίσωσης $g(x) = 0$ στο διάστημα $(-1, 2)$. Τώρα, αφού $g(-1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$ και $g(2) = e^2 + 2 > 0$ (και αφού g συνεχής στο $[-1, 2]$), έπεται από το Θεώρημα του Bolzano ότι υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $g(x) = 0$ στο διάστημα $(-1, 2)$. Άρα,

μια τουλάχιστον + μια το πολύ ρίζα = ακριβώς μια ρίζα.

Τέλος, το ότι η συνάρτηση g είναι γν. αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$, έπεται από το ότι $g'(x) = e^x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

2ος τρόπος Η συνάρτηση g είναι γν. αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$, αφού $g'(x) = e^x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Επίσης, αφού $g(-1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$ και $g(2) = e^2 + 2 > 0$ (και αφού g συνεχής στο $[-1, 2]$), έπεται από το Θεώρημα του Bolzano ότι υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $g(x) = 0$ στο διάστημα $(-1, 2)$. Έπεται ότι η ρίζα είναι μόνο μια.

iii. Θέτοντας $x = 0$ στην $e^{f(x)} + e^x f(x) = xe^x - 1$, παίρνουμε $\underbrace{e^{f(0)} + f(0) + 1}_{=g(f(0))} = 0$. Άρα, η τιμή $f(0)$ είναι ρίζα της εξίσωσης $g(x) = 0$, η οποία, όπως είδαμε Στο προηγούμενο ερώτημα, είναι μοναδική και ανήκει στο διάστημα $(-1, 2)$, δηλ. $f(0) \in (-1, 2)$, δηλ. $-1 < f(0) < 2$

5. (α) Αφού η NM είναι διάμετρος του ζητούμενου κύκλου, έπεται ότι το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο $T(0, 2\beta)$. Τώρα,

$$\lambda = \lambda_{TM} \Leftrightarrow \lambda = \frac{y_M - 2\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \boxed{y_M = \alpha\lambda + 2\beta}$$

και

$$\lambda = \lambda_{TN} \Leftrightarrow \lambda = \frac{y_N - 2\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \boxed{y_N = 2\beta - \alpha\lambda}$$

Η διάμετρος δ του κύκλου είναι

$$\begin{aligned} \delta &= \sqrt{(y_M - y_N)^2 + (x_M - x_N)^2} = \sqrt{(\alpha\lambda + 2\beta + \alpha\lambda - 2\beta)^2 + (\alpha + \alpha)^2} \\ &= \sqrt{4\lambda^2\alpha^2 + 4\alpha^2} = \sqrt{4\alpha^2(\lambda^2 + 1)} \\ \alpha > 0 &= 2\alpha\sqrt{\lambda^2 + 1} \end{aligned}$$

και άρα $R = \frac{\delta}{2} = \alpha\sqrt{\lambda^2 + 1}$. Συνεπώς, η εξίσωση του κύκλου είναι η

$$\boxed{(C): x^2 + (y - 2\beta)^2 = \alpha^2(\lambda^2 + 1)}$$

(β) i. Υποθέτουμε ότι ο κύκλος (C) που βρήκαμε στο πιο πάνω ερώτημα περνά από τις εστίες $E(\gamma, 0)$ και $E'(-\gamma, 0)$ της έλλειψης. Τότε,

$$R = |TE| \Leftrightarrow R^2 = |TE|^2 \Leftrightarrow \alpha^2(\lambda^2 + 1) = (\gamma - 0)^2 + (0 - 2\beta)^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2(\lambda^2 + 1) = \underbrace{\gamma^2}_{=\alpha^2 - \beta^2} + 4\beta^2 \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{3\beta^2}{\alpha^2} \Leftrightarrow \boxed{\lambda = \pm \frac{\beta\sqrt{3}}{\alpha}}$$

ii. Από τον ορισμό της έλλειψης, έχουμε ότι $|SE| + |SE'| = \text{σταθερό}$. Επίσης,

$$|TE| = |TE'| = R = a\sqrt{\lambda^2 + 1} = a\sqrt{\frac{3\beta^2}{\alpha^2} + 1} = a\sqrt{\frac{3\beta^2 + \alpha^2}{\alpha^2}} = \sqrt{3\beta^2 + \alpha^2}$$

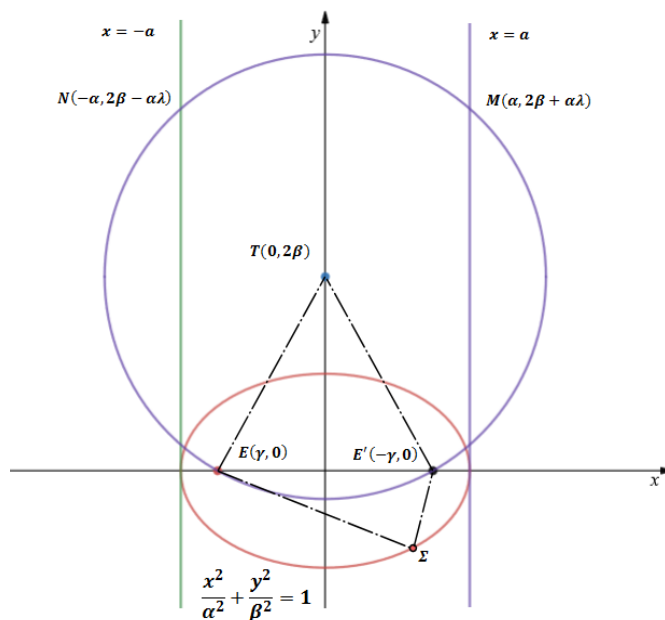
και αρα, η περίμετρος του τετραπλεύρου $SETE'$ είναι σταθερός αριθμός, ανεξάρτητος από τις συντεταγμένες του σημείου S .

(γ) Το ότι ο κύκλος εφάπτεται στις κάθετες της έλλειψης στις κορυφές της $A(2,0)$ και $A'(-2,0)$ είναι περιττή πληροφορία, αφού προκύπτει από τον τρόπο που κατασκευάσαμε τον κύκλο στο (α) ερώτημα (για $a=2$).

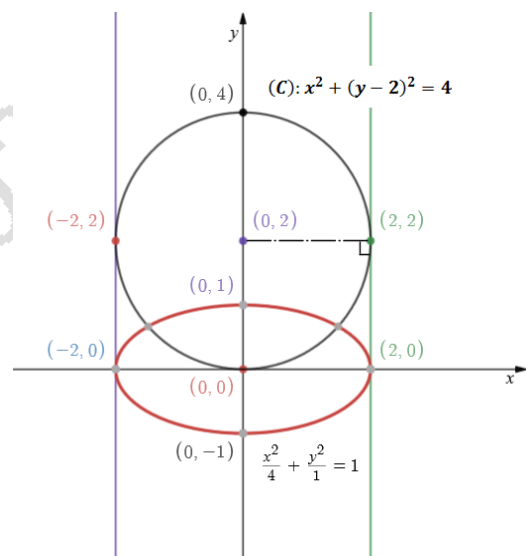
i. Το κέντρο του κύκλου $(C): x^2 + (y-2\beta)^2 = \alpha^2(\lambda^2 + 1)$, δηλ. του $(C): x^2 + (y-2)^2 = 4(\lambda^2 + 1)$, είναι το σημείο $T(0,2)$. Τότε $R=2$ και αρα

$$4 = 4(\lambda^2 + 1) \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$$

ii. Αφού $R=2$ και το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο $T(0,2)$, έπεται ότι ο κύκλος εφάπτεται του άξονα των τετμημένων.



Ερωτήματα (α) + (β)



Ερώτημα (γ)