Παράδειγμα εύρεσης γραφήματος σε πολικές συντεταγμένες

Έστω η καμπύλη η οποία καθορίζεται σε πολικές συντεταγμένες από την εξίσωση

$$r = \frac{6}{3 + 2\eta\mu\theta}$$

Γράφοντας

$$r = r(\theta) = \frac{2}{1 + \frac{2}{3}\eta\mu\theta},$$

έχουμε ότι $\varepsilon = \frac{2}{3} < 1$ και αρα αυτή παριστάνει **έλλειψη** με διευθετούσα $(\delta)\colon y = 3$.

Θα προσδιορίσουμε τα υπόλοιπα στοιχεία της έλλειψης με δυο τρόπους:

1ος τρόπος:

$$r(\theta) = \frac{6}{3 + 2\eta\mu\theta} \quad \Leftrightarrow \quad r(\theta)(3 + 2\eta\mu\theta) = 6 \quad \Leftrightarrow \quad r(\theta)(3 + 2\eta\mu\theta) = 6$$

$$\Leftrightarrow \quad 3r + 2r(\theta)\eta\mu\theta = 6 \quad \Leftrightarrow \quad 3r(\theta) = 6 - 2r(\theta)\eta\mu\theta$$

$$\Leftrightarrow \quad 3r(\theta) = 6 - 2y(\theta) \quad \Leftrightarrow \quad 3r(\theta) = 6 - 2y(\theta)$$

$$\Leftrightarrow \quad 9r^2(\theta) = \left(6 - 2y(\theta)\right)^2$$

$$r^2(\theta) = x^2(\theta) + y^2(\theta) \quad \Leftrightarrow \quad 9x^2(\theta) + 9y^2(\theta) = 36 - 24y(\theta) + 4y^2(\theta)$$

$$\Leftrightarrow \quad 9x^2(\theta) + 5\left(y^2(\theta) + 2 \cdot \frac{12}{5}y + \frac{144}{25}\right) - \frac{144}{5} - 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2(\theta)}{\frac{1}{9}} + \frac{\left(y(\theta) + \frac{12}{5}\right)^2}{\frac{1}{5}} = \frac{324}{5}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{\boldsymbol{x^2(\theta)}}{\frac{\mathbf{324}}{\mathbf{45}}} + \frac{\left(\boldsymbol{y(\theta)} + \frac{\mathbf{12}}{\mathbf{5}}\right)^2}{\frac{\mathbf{324}}{\mathbf{25}}} = \mathbf{1}}$$

ή

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{x^2(\theta)}}{\left(\frac{\mathbf{18\sqrt{5}}}{\mathbf{15}}\right)^2} + \frac{\left(\boldsymbol{y(\theta)} + \frac{\mathbf{12}}{\mathbf{5}}\right)^2}{\left(\frac{\mathbf{18}}{\mathbf{5}}\right)^2} = \mathbf{1}}$$

και αρα η έλλειψη έχει κέντρο στο σημείο $K\left(\mathbf{0}, -\frac{\mathbf{12}}{\mathbf{5}}\right)$ και κορυφές στα σημεία

$$\boldsymbol{A}\left(\frac{\mathbf{18\sqrt{5}}}{\mathbf{15}}, -\frac{\mathbf{12}}{\mathbf{5}}\right), \quad \boldsymbol{A'}\left(-\frac{\mathbf{18\sqrt{5}}}{\mathbf{15}}, -\frac{\mathbf{12}}{\mathbf{5}}\right), \quad \boldsymbol{B}\left(\mathbf{0}, \frac{\mathbf{18}}{\mathbf{5}}\right), \quad \boldsymbol{B'}\left(\mathbf{0}, -\frac{\mathbf{18}}{\mathbf{5}}\right).$$

2ος τρόπος: Είναι

$$r(0) = \frac{6}{3 + 2\eta\mu 0} = \frac{6}{3} = 2$$

και αρα η έλλειψη τέμνει τον άξονα των r στα σημεία $A(r(0), 0) = A(2,0)$ και $A'(-2,0)$ τα οποία σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι (επίσης) τα $A(2,0)$ και $A'(-2,0)$ αντίστοιχα. Επίσης,

$$r\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{6}{3 + 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{6}{3 + 2} = \frac{6}{5}$$

και αρα

$$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = r\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{6}{5} \cdot 0 = 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = r\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{6}{5} \cdot 1 = \frac{6}{5}$$

Έτσι, η έλλειψη τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο $B\left(0,\frac{6}{5}\right)$. Για $\theta=-\frac{\pi}{2}$, λαμβάνουμε και το άλλο σημείο, το $B'(0,-6)$. Τότε, το κέντρο της έλλειψης είναι στο σημείο

$$K\left(0,\frac{\frac{6}{5}-6}{2}\right)=K\left(0,-\frac{12}{5}\right)$$