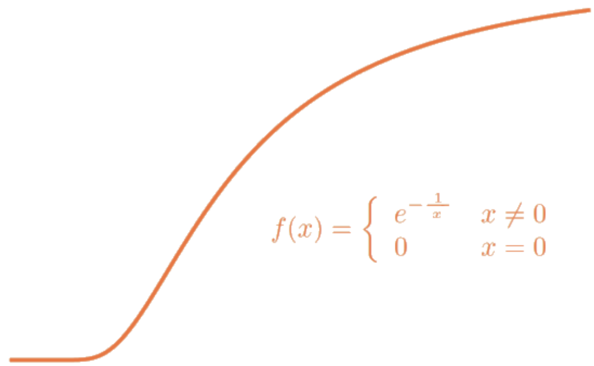
[Παράδειγμα συνάρτησης η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$ αλλά όχι (πραγματική) αναλυτική στο σημείο αυτό]



Θα δούμε ένα παράδειγμα συνάρτησης η οποία έχει παραγώγους κάθε τάξης αλλά η αντίστοιχη σειρά Taylor της γύρω από το $x = 0$ συγκλίνει (παντού) στη μηδενική συνάρτηση, δηλ. η συνάρτηση δεν είναι αναλυτική στο σημείο αυτό. Η περίπτωση αυτή δεν ισχύει στο μιγαδικό επίπεδο: κάθε ολόμορφη συνάρτηση είναι αναλυτική, δηλ. λαμβάνει (τοπικά) ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά.

Με τη βοήθεια της συνάρτησης αυτής, κατασκευάζεται μια γνωστή κλάση συναρτήσεων οι οποίες έχουν συμπαγή φορέα (στο $\mathbb{R}$) και οι οποίες εμφανίζονται στην κατασκευή χαρτών σε διαφορίσιμα πολυπτύγματα (βλ. διαμερίσεις της μονάδος). Οι αποδείξεις έγιναν με ύλη Λυκείου.

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

i. Δείξτε ότι υπάρχουν οι f' και f'' των οποίων να βρείτε τον τύπο τους.

ii. Δείξτε ότι η f είναι αύξουσα συνάρτηση.

iii. Δείξτε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n είναι

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \dfrac{P_{n-1}(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

όπου P_{n-1} είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $(n-1)$.

iv. Δείξτε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

v. Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της f.

Λύση

i. Για $n = 1$: Για $x > 0$ είναι $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων και μάλιστα, $f΄(x) = \frac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{1}{x}}$. Επίσης, για $x < 0$ η είναι ταυτοτικά μηδέν και άρα η παράγωγός της είναι ταυτοτικά μηδέν. Μένει να ελέγξουμε την παραγωγισιμότητα της f στο σημείο $x = 0$. Είναι

$$f΄_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}}$$

Θεωρούμε τον (1-1) μετασχηματισμό $w = \frac{1}{x}$ και το πιο πάνω όριο είναι ίσο με το $\lim_{w\to+\infty} \frac{w}{e^w}$ το οποίο αποτελεί απροσδιοριστία της μορφής $\frac{+\infty}{+\infty}$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα του L'Hôspital, έχουμε

$$\lim_{w\to+\infty} \frac{w}{e^w} = \lim_{w\to+\infty} \frac{1}{e^w} = 0$$

Τώρα,

$$f΄_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

Έτσι, αφου $f΄_-(0) = 0 = f΄_+(0)$, έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0,$$

δηλ. $f΄(0) = 0$.

Συνεπώς,

$$f΄(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Τώρα, θα ελέγξουμε την παραγωγισιμότητα της $f΄$. Όπως και πρίν έχουμε ότι για $x > 0$ είναι $f΄(x) = \frac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{1}{x}} =$ η οποία είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων και μάλιστα, $f΄΄(x) = \frac{1-2x}{x^4} \cdot e^{-\frac{1}{x}}$. Επίσης, για $x < 0$ η είναι ταυτοτικά μηδέν και άρα η παράγωγός της είναι ταυτοτικά μηδέν. Μένει να ελέγξουμε την παραγωγισιμότητα της $f΄$ στο σημείο $x = 0$. Είναι

$$f΄΄_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f΄(x) - f΄(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x^3}}{e^{\frac{1}{x}}}$$

Θεωρούμε τον (1-1) μετασχηματισμό $w = \frac{1}{x}$ και το πιο πάνω όριο είναι ίσο με το $\lim_{w\to+\infty} \frac{w^3}{e^w}$ το οποίο αποτελεί απροσδιοριστία της μορφής $\frac{+\infty}{+\infty}$. Εφαρμόζοντας (διαδοχικά) τον κανόνα του L'Hôspital, έχουμε

$$\lim_{w\to+\infty}\frac{w^3}{e^w}=3\lim_{w\to+\infty}\frac{w^2}{e^w}=6\lim_{w\to+\infty}\frac{w}{e^w}=6\lim_{w\to+\infty}\frac{1}{e^w}=0$$

Τώρα,

$$f''_{-}(0) = \lim_{x\to0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = 0$$

Έτσι, αφου $f''_{-}(0)=0=f''_{+}(0)$, έχουμε ότι

$$\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=0,$$

δηλ. $f''(0)=0$. Συνεπώς,

$$f''(x)=\begin{cases}\dfrac{1-2x}{x^4}\cdot e^{-\frac{1}{x}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

Ομοίως, βρίσκουμε ότι

$$f'''(x)=\begin{cases}\dfrac{6x^2-6x+1}{x^6}\cdot e^{-\frac{1}{x}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

ii. Από τον τύπο της f', έχουμε ότι κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)\ge 0$ και αρα η f είναι αύξουσα συνάρτηση.

iii. Θα πρέπει να δείξουμε ότι η $f^{(n)}$ υπάρχει για κάθε φυσικό αριθμό n και μάλιστα αυτή είναι της μορφής

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}\dfrac{P_{n-1}(x)}{x^{2n}}e^{-\frac{1}{x}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

όπου P_{n-1} είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $(n-1)$. Αυτό θα γίνει με επαγωγή στο n.

- Για $n=1$: Είδαμε ότι

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}\cdot e^{-\frac{1}{x}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

και το αποτέλεσμα ισχύει (το $P_0\equiv 1$ είναι πολυώνυμο βαθμού 0). Τα αποτελέσματα για τις f'' και f''' επαληθεύουν την αλήθεια του ισχυρισμού.

Για το επαγωγικό βήμα, υποθέτουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για $n=\kappa$, δηλ. ότι

$$f^{(\kappa)}(x)=\begin{cases}\dfrac{P_{\kappa-1}(x)}{x^{2\kappa}}e^{-\frac{1}{x}}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$$

όπου P_{n-1} είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $(\kappa-1)$. Θα δείξουμε ότι το ζητούμενο ισχύει και για $n=\kappa$. Για $x>0$ είναι $f^{(\kappa)}(x)=\frac{P_{\kappa-1}(x)}{x^{2\kappa}}e^{-\frac{1}{x}}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων και μάλιστα,

$$f^{(\kappa+1)}(x)=\frac{x^2\cdot P'_{\kappa-1}(x)+P_{\kappa-1}(x)-2\kappa x}{x^{2\kappa}}\cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

Επίσης, για $x<0$ η είναι ταυτοτικά μηδέν και άρα η παράγωγός της είναι ταυτοτικά μηδέν. Μένει να ελέγξουμε την παραγωγισιμότητα της f στο σημείο $x=0$. Είναι

$$f^{(\kappa+1)}{}_{+}(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f^{(\kappa)}(x)-f^{(\kappa)}(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x^2\cdot P'_{\kappa-1}(x)+P_{\kappa-1}(x)-2\kappa x}{x^{2\kappa}}\cdot e^{-\frac{1}{x}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x^2\cdot P'_{\kappa-1}(x)+P_{\kappa-1}(x)-2\kappa x}{x^{2\kappa+1}}}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x\cdot P'_{\kappa-1}(x)+\frac{1}{x}\cdot P_{\kappa-1}(x)-2\kappa}{x^{2\kappa}}}{e^{\frac{1}{x}}}$$

Θεωρούμε τον (1-1) μετασχηματισμό $w=\frac{1}{x}$ και το πιο πάνω όριο είναι ίσο με το

$$\lim_{w\to+\infty}\frac{w^{2\kappa-1}\cdot P'_{\kappa-1}\left(\frac{1}{w}\right)+w^{2\kappa+1}\cdot P_{\kappa-1}\left(\frac{1}{w}\right)-2\kappa}{e^{w}}$$

το οποίο αποτελεί απροσδιοριστία της μορφής $\frac{+\infty}{+\infty}$. Εφαρμόζοντας (διαδοχικά $(\kappa-1)$ φορές) τον κανόνα του L'Hôspital, έχουμε ότι το πιο πάνω όριο είναι (τελικά) ίσο με το $\lim_{w\to+\infty}\frac{1}{e^{w}}$ το οποίο είναι $=0$. Τώρα,

$$f^{(\kappa+1)}{}_{-}(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f^{(\kappa)}(x)-f^{(\kappa)}(0)}{x-0}=0$$

Έτσι, αφου

$$f^{(\kappa+1)}{}_{-}(0)=0=f^{(\kappa+1)}{}_{+}(0),$$

έχουμε ότι $\lim_{x\to 0}\frac{f^{(\kappa)}(x)-f^{(\kappa)}(0)}{x-0}=0$, δηλ. $f^{(\kappa+1)}(0)=0$. Συνεπώς,

$$f^{(\kappa+1)}(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2\cdot P'_{\kappa-1}(x)+P_{\kappa-1}(x)-2\kappa x}{x^{2\kappa}}\cdot e^{-\frac{1}{x}}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$$

και το αποτέλεσμα ισχύει (το $x^2\cdot P'_{\kappa-1}(x)+P_{\kappa-1}(x)-2\kappa x$ είναι πολυώνυμο βαθμού κ).

iv.

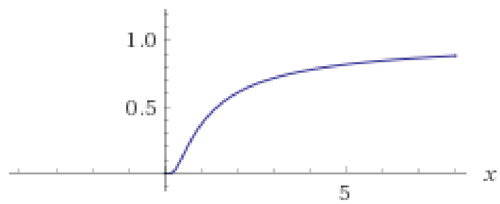
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}$$

Θεωρούμε τον (1-1) μετασχηματισμό $w = \frac{1}{x}$ και το πιο πάνω όριο είναι ίσο με το $\lim_{w\to 0} \frac{1}{e^w} = 1$ και αρα η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f.

v. Από τον τύπο της $f^{''}$ έχουμε ότι

$$f^{''}(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Για $0 < x < \frac{1}{2}$ είναι $f^{'}(x) > 0$ και άρα η f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω, ενώ για $\frac{1}{2} < x < 1$ είναι $f^{'}(x) < 0$ και άρα η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω. Συνεπώς, η f έχει σημείο καμπής το $\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{e^2}\right)$.



Εφαρμογή

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ της προηγούμενης άσκησης. Έστω $a > 0$ σταθεροποιημένο. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = \frac{f(x)}{f(x) + f(a - x)}$$

i. Δείξτε ότι η g είναι καλά ορισμένη.
ii. Δείξτε ότι $g(x) = 1$ για $x \geq a$.
iii. Γράψτε την g ως κλαδωτή συνάρτηση.
iv. Δείξτε ότι η g είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση και να βρείτε την $g^{'}$
v. Δείξτε ότι η g είναι αύξουσα συνάρτηση.

Λύση

i. Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση στον παρονομαστή δεν μπορεί να μηδενιστεί για καμιά τιμή του x στο $\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι για καθε $x \in \mathbb{R}$ είναι είτε $x > 0$ είτε $a - x > 0$. Με άλλα λόγια, το σύνολο αλήθειας του Προτασιακού τύπου $(x > 0) \vee (a - x > 0)$ είναι όλο το $\mathbb{R}$. Αφού όμως είναι $f(x) = e^{-\frac{1}{x}} > 0$ για $x > 0$, έπεται ότι είτε $f(x) > 0$ είτε $f(a - x) > 0$. Έτσι, $f(x) + f(a - x) > 0$ για κάθε x στο $\mathbb{R}$.

ii. Για $x \geq a$, ή ισοδύναμα ότι $a - x \leq 0$, επίσης έχουμε ότι $f(a-x) = 0$. Συνεπώς, για $x \leq 0$ είναι

$$g(x) = \frac{f(x)}{f(x) + f(a-x)} = \frac{f(x)}{f(x) + 0} = \frac{f(x)}{f(x)} = 1$$

iii. Αφού $f(x) = 0$ για $x \leq 0$, έχουμε ότι $g(x) = 0$ για $x \leq 0$. Επίσης, για $0 < x \leq a$ είναι

$$g(x) = \frac{f(x)}{f(x) + f(a-x)} = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{e^{-\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{a-x}}} = \frac{1}{1 + e^{\frac{2a-x}{ax}}}$$

Συνδυάζοντας αυτά μαζί με το προηγούμενο ερώτημα, έχουμε

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \geq a \\ \dfrac{1}{1 + e^{\frac{2a-x}{ax}}}, & 0 < x \leq a \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

iv. Η g είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων (αφού η f είνα παραγωγίσιμη παντού). Τώρα,

$$g'(x) = \frac{f'(x) \cdot f(a-x) - f(x) \cdot \frac{df(a-x)}{dx}}{[f(x) + f(a-x)]^2} = \frac{f'(x) \cdot f(a-x) + f(x) \cdot f'(a-x)}{[f(x) + f(a-x)]^2}$$

(στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα της αλυσίδας).

Από τον τύπο της f και f' (ή από τον τύπο της g στο προηγούμενο ερώτημα) έχουμε ότι για $x < 0$ είναι $g'(x) = 0$ ενώ για $0 \leq x \leq a$, είναι

$$g'(x) = \frac{f'(x) \cdot f(a-x) + f(x) \cdot f'(a-x)}{[f(x) + f(a-x)]^2}$$

Για $0 < x < a$ είναι

$$g'(x) = \frac{2e^{\frac{2a-x}{ax}}}{x^2\left(1 + e^{\frac{2a-x}{ax}}\right)^2}$$

Για $x = a$ είναι

$$g'(a) = \frac{f'(a) \cdot f(0) + f(a) \cdot f'(0)}{[f(a) + f(0)]^2} = 0$$

Για $x = 0$ είναι

$$g'(0) = \frac{f'(0) \cdot f(a) + f(0) \cdot f'(a)}{[f(0) + f(a)]^2} = 0$$

Άρα,

$$g^{'}(x) = \begin{cases} \dfrac{2e^{\frac{2a-x}{ax}}}{x^2\left(1+e^{\frac{2a-x}{ax}}\right)^2}, & 0 < x < a \\ 0, & (x \geq a) \vee (x \leq 0) \end{cases}$$

v. Αφού

$$g^{'}(x) = \frac{f^{'}(x) \cdot f(a-x) + f(x) \cdot f^{'}(a-x)}{[f(x) + f(a-x)]^2},$$

και από το γενονός ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f^{'}(x) \geq 0$, έπεται ότι $g^{'}(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλ. η g είναι αύξουσα συνάρτηση.