ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΡΙΖΟΥΣΑΣ ΠΙΝΑΚΑ

Ορισμός 0.0.1 *Έστω $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ πίνακας. Ως ορίζουσα του πίνακα A ορίζουμε την ποσότητα*

$$\det(A) := \sum_{\sigma \sim \{1,\ldots,n\}} \left(\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{k\sigma(k)} \right) = \sum_{\sigma \sim \{1,\ldots,n\}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}, \tag{1}$$

όπου με $\sigma \sim \{1,\ldots,n\}$ εννοούμε οτι η άθροιση γίνεται πάνω στο σύνολο όλων των ($n!$ το πλήθος) μεταθέσεων του συνόλου $\{1,\ldots,n\}$ και όπου sgn το πρόσημο της μετάθεσης $\sigma : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$, δηλ.

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & : \text{η μετάθεση είναι άρτια} \\ -1 & : \text{η μετάθεση είναι περιττή} \end{cases}.$$

Συμβολικά:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Εφαρμογές

(i) Θα υπολογίσουμε την ορίζουσα ενός 3×3 πίνακα.
Έστω

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{3\times 3}.$$

Θέτουμε $A_{ij} \in \mathbb{F}^{2\times 2}$ τον πίνακα που προκύπτει από τον A αν διαγράψουμε την $i-$γραμμή και την $j-$στήλη, $1 \leq i, j \leq 3$:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\ A_{12} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix},\ A_{22} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\ A_{31} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix},\ A_{32} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$A_{33} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ A_{13} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix},\ A_{23} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Τότε, η ορίζουσα του A δίνεται αν αναπτύξουμε ως προς την i-γραμμή ή j-στήλη από τους τύπους $\sum_{k=1}^{3}(-1)^{k+i} a_{ik} detA_{ik}$ και $\sum_{k=1}^{3}(-1)^{k+j} a_{kj} detA_{kj}$ αντίστοιχα.
Για παράδειγμα, αναπτύσσοντας ως προς τη δεύτερη στήλη, έχουμε

$$\begin{aligned} detA &= \sum_{k=1}^{3}(-1)^{k+2} a_{k2} detA_{k2} \\ &= (-1)^{1+2} a_{12} det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + (-1)^{2+2} a_{22} det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} \\ &\quad + (-1)^{3+2} a_{32} det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix} \\ &= -a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) - a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}). \end{aligned}$$

(ii) Η ορίζουσα ενός άνω (ή κάτω) τριγωνικού πίνακα $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ είναι το γινόμενο το στοιχείων της διαγωνίου του, δηλ.

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Ασκήσεις

1. Να υπολογισθούν οι ορίζουσες των πιο κάτω πινάκων:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix},\ \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 7 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix},\ \Pi = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -5 & 0 & 10 \\ -9 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Λύση Θα αναπτύξουμε την ορίζουσα $detA$ ως προς την πρώτη στήλη:

$$\begin{aligned} detA &= \sum_{k=1}^{3}(-1)^{k+1}a_{k1}detA_{k1} \\ &= (-1)^{1+1}1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}0\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &\quad +(-1)^{3+1}0\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4. \end{aligned}$$

Ο πίνακας B είναι άνω τριγωνικός, άρα η ορίζουσά του είναι το γινόμενο των στοιχείων της διαγωνίου του:

$$detB = 1 \cdot 5 \cdot (-1) \cdot 7 = -35.$$

Για την $det\Gamma$, θα αναπτύξουμε ως προς την τρίτη στήλη:

$$\begin{aligned} det\Gamma &= \sum_{k=1}^{3}(-1)^{k+1}a_{k3}detA_{k3} \\ &= (-1)^{1+3}0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &\quad +(-1)^{3+3}(-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1. \end{aligned}$$

Διαφορετικά:

$$\begin{aligned} det\Gamma &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \overset{r_2 \to r_2 + r_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \overset{r_3 \to r_3 - r_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} \\ &\overset{\text{ως προς την 1η στήλη}}{=} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1. \end{aligned}$$

Ο πίνακας Δ είναι άνω τριγωνικός, άρα $det\Delta = 2 \cdot 3 \cdot 6 = 36$.

$$
\begin{aligned}
det\Sigma &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 7 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \overset{r_2 \to r_2 + r_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \overset{r_3 \to r_3 + r_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\
&\overset{\text{ως προς την 1η στήλη}}{=} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
det\Pi &= \begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -5 & 0 & 10 \\ -9 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 30 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} \\
&= 2 \cdot 30 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 60 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -11 \end{vmatrix} \\
&\overset{\text{ως προς την 1η στήλη}}{=} -660.
\end{aligned}
$$

Θεώρημα 0.0.1 *[Κανόνας του Cramer] Αν ο $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ έχει μη μηδενική ορίζουσα, τότε η μοναδική λύση $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ του συστήματος $AX = B$ δίνεται από τον τύπο*

$$x_i = \frac{1}{detA} det(A_{(A_i \leftrightarrow K)}), \;\; 1 \le i \le n, \tag{2}$$

όπου $A_{(A_i \leftrightarrow K)}$ είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον A αν αντικαταστήσουμε την $i-$στήλη του με τον B.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Αφού $detA \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$. Αφού $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$. Όμως,

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} Adj(A),$$

συνεπώς,

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{detA} Adj(A)B.$$

Συνεπώς, αν $Adj(A) = (\beta_{i,j})_{i,j=1}^n$ και $B = (b_{i,j})_{i,j=1}^n$, τότε

$$x_i = \frac{1}{detA} \sum_{j=1}^n \beta_{i,j} b_j = \frac{1}{detA} \sum_{j=1}^n A_{i,j} bj,$$

όπου $A_{i,j} =$ ο i, j συμπαράγοντας του A. Όμως, το $\frac{1}{detA} \sum_{j=1}^n A_{i,j} bj =$ το ανάπτυγμα κατά Laplace ως προς την $i-$στήλη του

$$\frac{1}{detA} det(A_{(B_i \leftrightarrow A_i)}),$$

απόπου έπεται και το ζητούμενο. □

Παρατήρηση: Ο Κανόνας του Cramer βολεύει όταν $n = 2, 3$ γιατί για $n > 3$ οι ορίζουσες είναι πίο χρονοβόρες στον υπολογισμό τους.

Παραδείγματα 0.0.1

1. Να λυθεί το σύστημα

$$
\begin{aligned}
x + y + z &= 2 \\
2y + 3z &= 1 \\
x + 2y + 3z &= 4
\end{aligned}
$$

Ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος είναι

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση την οποία θα βρούμε με τον Κανόνα του Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{detA} = \frac{4-1}{1} = 3, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}}{detA} = \frac{2-6}{1} = -4,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{detA} = \frac{4-1}{1} = 3.$$

Άρα, η (μοναδική) λύση του συστήματος είναι η $(x, y, z) = (3, -4, 3)$.

Θεώρημα 0.0.2 *Έστω $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ και $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{n}$ δύο $n \times n$ πίνακες. Τότε,*

$$det(AB) = det(A)det(B).$$

Θεώρημα 0.0.3 *Για κάθε πίνακα $n \times n$, ισχύει οτι*

(i) αν εναλλάξουμε δύο γραμμές (ή δύο στήλες) του, τότε η ορίζουσα του νέου πίνακα ισούται με $-\det(A)$,

(ii) αν τα στοιχεία μιας γραμμής (ή δύο στήλης) του πολλαπλασιαστούν με έναν αριθμό k, τότε η ορίζουσα του νέου πίνακα ισούται με $k\det(A)$,

(iii) αν το πολλαπλάσιο των στοιχείων μιας γραμμής (ή στήλης) του προστεθεί σε μια άλλη γραμμή (ή στήλη) του πίνακα, τότε η ορίζουσα του νέου πίνακα ισούται με $\det(A)$.

Εύρεση αντίστροφου ενός τετραγωνικού πίνακα Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας.
<u>1ος Τρόπος</u>

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}adj(A),$$

όπου $adj(A)$ είναι ο συζυγής (adjugate) πίνακας του A, ο οποίος δίνεται από:
αν $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, τότε,

$$\mathrm{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

και άρα,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}adj(A).$$

αν $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$, τότε,

$$\operatorname{adj}(A)=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix} \\ \\ -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix} \\ \\ +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\end{pmatrix}^T =$$

$$=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix} \\ \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix} \\ \\ +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & {}_{32}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\end{pmatrix},$$

όπου

$$\begin{vmatrix} a_{ij} & a_{in} \\ a_{jm} & a_{jn}\end{vmatrix}=\det\begin{pmatrix} a_{im} & a_{in} \\ a_{jm} & a_{jn}\end{pmatrix}.$$

Οι πιο πάνω ορίζουσες λέγονται οι συναλλοίωτοι παράγοντες (ή συμπαράγοντες) του πίνακα A.

Παράδειγμα Έστω ο 3×3 πίνακας

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

Έχουμε

$$detA=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=1\neq 0$$

και άρα ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Τότε,

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}adj(A)=\frac{1}{1}adj(A)=adj(A).$$

$$\operatorname{adj}(A)=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2\end{vmatrix} \\ \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2\end{vmatrix} \\ \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2\end{vmatrix}\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}^T=$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

<u>2ος Τρόπος</u> Έστω ένας αντιστρέψιμος πίνακας $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. Βάζουμε τον μοναδιαίο πίνακα $I_{n\times n}$ δίπλα από τον A, $(A|I)$ και κάνοντας γραμμοπράξεις καταλήγουμε σε έναν (γραμμοισοδύναμο πίνακα) $(I|B)$. Τότε, $A^{-1}=B$.

Παρατήρηση Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη διαδικασία αυτή για να αποφανθούμε αν ο A δεν είναι αντιστρέψιμος: φτάνοντας στο γραμμοισοδύναμο πίνακα $(I|B)$, παρατηρήσουμε οτι ο B έχει μια τουλάχιστον μηδενική γραμμή ή στήλη, τότε ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

Παράδειγμα

$$P := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

και βρίσκουμε τον P^{-1} :

$$(P|I) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/5 & 3/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & -2/5 & 4/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

και αρα

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 & 1/5 \\ -2/5 & 4/5 & 3/5 \\ 1/5 & -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Ασκήσεις 0.0.1

(1) Σωστό ή λάθος;

(α') Αν $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ με $A \cdot B = \mathbb{O}_{n\times n}$ και $A,\ B \neq \mathbb{O}_{n\times n}$, τότε $\det A = \det B = 0$.

(β') Αν $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ τότε $\det(A + B) = \det A + \det B$.

(γ') Αν $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ και $\lambda \in \mathbb{F}$, τότε $\det(\lambda A) = \lambda \det A$.

(δ') Αν $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ κάτω τριγωνικός αντιστρέψιμος, τότε και ο A^t είναι αντιστρέψιμος.

Λύση

(α') Σωστό.

(β') Λάθος.

(γ') Λάθος. Ισχύει $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

(δ') Σωστό.

Άσκηση 1 *Να υπολογιστεί η ορίζουσα*

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \beta\gamma & \gamma\alpha & \alpha\beta \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

και να δειχθεί οτι αν $\Delta = 0$, *και* $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$, *τότε* $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

Λύση

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \beta\gamma & \gamma\alpha & \alpha\beta \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_1 \to r_1 - r_2}{=} \begin{vmatrix} \alpha^2-\beta^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \beta\gamma-\gamma\alpha & \gamma\alpha & \alpha\beta \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_2 \to r_2 - r_3}{=} \begin{vmatrix} \alpha^2-\beta^2 & \beta^2-\gamma^2 & \gamma^2 \\ \beta\gamma-\gamma\alpha & \gamma\alpha-\alpha\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\alpha-\beta)(\alpha+\beta) & (\beta-\gamma)(\beta+\gamma) \\ -\gamma(\alpha-\beta) & -\alpha(\beta-\gamma) \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \beta-\gamma \\ -\gamma & -\alpha \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)[-\alpha^2-\alpha\beta+\gamma\beta+\gamma^2]$$

$$= (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)[(\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha)+\beta(\gamma-\alpha)]$$

$$= (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha+\beta+\gamma).$$

Άρα, αν $\Delta = 0$, και $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$, έπεται οτι $\alpha+\beta+\gamma = 0$.

Άσκηση 2 *Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τέτοιοι ώστε $AB = I_{n\times n}$. Να δείξετε οτι και $BA = I_{n\times n}$.*

Λύση Αφού οι πίνακες είναι τετραγωνικοί τότε, από Θεώρημα έπεται οτι

$$\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$$

και αφού $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τέτοιοι ώστε $AB = I_{n\times n}$, έπεται οτι

$$\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B) = \det(I_{n\times n}) = 1.$$

Επομένως, $\det(A) \neq 0$, άρα ο A είναι αντιστρέψιμος, δηλ. $\exists$ ο A^{-1}. Έχουμε τότε οτι

$$AB = I_{n\times n} \Leftrightarrow A^{-1}AB = A^{-1}I_{n\times n} \Leftrightarrow B = A^{-1} \overset{A^{-1}A = I_{n\times n}}{\Longleftrightarrow} BA = I_{n\times n}.$$

Ασκήσεις 0.0.2

1. Έστω
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{pmatrix}.$$
Να δείξετε οτι
$$\det(A) = (a_3-a_2)(a_3-a_1)(a_2-a_1).$$

2. Υπολογίστε την ορίζουσα των πιο κάτω πινάκων με α) το ανάπτυγμα σε συμπαράγοντες ως προς οποιαδήποτε γραμμή ή στήλη και β) με απαλοιφές γραμμών φέρνοντάς τους σε τριγωνική μορφή:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 7 & 9 & -25 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

3. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των οριζουσών, να δειχθεί οτι

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ yz & zx & xy \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)$$

4. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των οριζουσών, να δειχθεί οτι

$$\begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 1 \\ 1+b^2 & b & 1 \\ 1+c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = -(a-b)(b-c)(c-a).$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΜΑΣ 51.Α: [Εαρινό Εξάμηνο 2015-2016]

Βοηθός Διδασκαλίας: Ιωακείμ Ιωάννης [ioakim.ioannis@ucy.ac.cy] - Γραφείο Β126

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ-ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ

Ορισμός 0.0.2 *Ένα υποσύνολο U ενός διανυσματικού χώρου V λέγεται υπόχωρος του V αν ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός και η πρόσθεση στον V περιοριζόμενοι στον W, τον κάνουν και αυτόν διανυσματικό χώρο. Δηλ. αν ο U γίνεται και αυτός διανυσματικός χώρος με πράξεις αυτές του V περιορισμένες σε αυτόν.*

Από τον πιο πάνω ορισμό έπεται φυσιολογικά η ακόλουθη Πρόταση:

Πρόταση 0.0.1 *Ένα $U \subseteq V$ είναι υπόχωρος του V αν και μόνο αν ισχύουν οι ακόλουθες τρείς συνθήκες*
(i) $U \neq \emptyset$.
(ii) Αν $u_1, u_2 \in U$, τότε $u_1 + u_2 \in U$.
(iii) Αν $u \in U$ και $\lambda \in \mathbb{F}$, τότε και $\lambda u \in U$.

2. Τα σύνολα $\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0\}$ και $\{(0,y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq 0\}$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^2$. Το σύνολο

$$V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 3x + 2y + z = 0\}$$

είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.
Θα δείξουμε τις ιδιότητες (i)-(iii) της Πρότασης.
(i) Το στοιχείο $(0,0,0)$ ανήκει στο V (ή το $(-1,1,1)$). Συνεπώς $V \neq \emptyset$.

(ii) Έστω $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2) \in V$. Τότε, $3x_1 + 2y_1 + z_1 = 0$ και $3x_2 + 2y_2 + z_2 = 0$. Έχουμε λοιπόν $(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$. Το στοιχείο αυτό ανήκει στον V αφού $3(x_1+x_2) + 2(y_1+y_2) + z_1 + z_2 = 0$.

(iii) Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ και $v = (x,y,z) \in V \Rightarrow 3x + 2y + z = 0 \Rightarrow 3\lambda x + 2\lambda y + \lambda z = 0$, δηλ. $\lambda v \in V$.

4. Θεωρούμε τον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$ και τα υποσύνολά του

$$V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\},\ W := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Τότε, το V είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ ενώ το W όχι.
(i)Το V δεν είναι το κενό σύνολο, αφού π.χ. το σημείο $(-1,4,-3) \in V$.
(ii) Έστω $(x_1,y_1,z_1),\ (x_2,y_2,z_2) \in V$. Άρα, $x_1 + y_1 + z_1 = 0$ και $x_2 + y_2 + z_2 = 0$. Έχουμε:

$$(x_1,y_1,z_1) + (x_2,y_2,z_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) \in V,$$

αφού $(x_1+x_2) + (y_1+y_2) + (z_1+z_2) = 0$.

(iii) Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ και $(x,y,z) \in V$. Τότε, $x + y + z = 0$ και

$$\lambda(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in V,$$

διότι $\lambda x + \lambda y + \lambda z = 0$.
Επομένως, το V είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

Για το σύνολο W, παρατηρούμε επίσης ότι δεν είναι το κενό σύνολο, αφού π.χ. το σημείο $(0,0,1) \in W$. Το W όμως δεν είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$, αφού τα (βαθμωτά) πολλαπλάσια στοιχείων του δεν ανήκουν εν γένει σε αυτόν, π.χ. $(0, \frac{1}{3}, 0) \in W$, διότι $0^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 0^2 = \frac{1}{9} < 1$, αλλά αν $\lambda = 9$, τότε, $\lambda(0, \frac{1}{3}, 0) = 9(0, \frac{1}{3}, 0) = (0,3,0) \notin W$.

Ορισμός 0.0.3 *Έστω V διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και $A \neq \emptyset$, $A \subseteq V$. Το $u \in V$ θα λέγεται γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του A αν υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ και $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ τέτοια ώστε*

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i.$$

Συμβολίζουμε με span$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ή με $L\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$ το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των $a_1, a_2, \ldots, a_n$, δηλ.

$$\text{span}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \mid \lambda_i \in \mathbb{F} \right\}.$$

και λεγεται γραμμική θήκη των $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Ορισμός 0.0.4 *Έστω V ένας δ.χ. επί του $\mathbb{F}$ και $u_1, u_2, \ldots, u_m \in V$. Τότε, τα $u_1, u_2, \ldots, u_m$ λέγονται γραμμικώς ανεξάρτητα αν $\forall \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{F}$ τέτοια ώστε*

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i = 0_V,$$

συνεπάγεται

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0.$$

Ορισμός 0.0.5 *Έστω V ένας δ.χ. επί του $\mathbb{F}$ και $A \neq \emptyset$, $A \subset V$ πεπερασμένο. Αν τα στοιχεία του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (ή γραμμικώς εξαρτημένα), τότε το A λέγεται γραμμικά ανεξάρτητο (αντίστοιχα γραμμικά εξαρτημένο) σύνολο.*
Αν A άπειρο υποσύνολο του V, τότε αυτό λέγεται γραμμικά εξαρτημένο αν υπάρχει γραμμικά εξαρτημένο μη κενό υποσύνολο του A. Το A είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν δεν είναι γραμμικά εξαρτημένο, δηλ. αν κάθε μη κενό υποσύνολό του είναι γραμμικά εξαρτημένο.

Παραδείγματα 0.0.2

1. Στον $\mathbb{R}^{3\times 1}$ θεωρούμε τα διανύσματα

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Τα u_1, u_2, u_3 είναι γραμμικώς εξαρτημένα αφού

$$2 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 - 1u_3 = 0.$$

2. Στο γραμμικό χώρο $\mathbb{R}^2$ θεωρούμε τα διανύσματα $u_1 = (1,2)$ και $u_2 = (2,1)$.
Τα u_1, u_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα:
Έστω $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda_1(1,2) + \lambda_2(2,1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\lambda_1 + 2\lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{array} \right. & \quad \Leftrightarrow \lambda_1 = 0 = \lambda_2. \end{aligned}$$

Άρα, τα $u_1,\ u_2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Ας εκφράσουμε το τυχαίο διάνυσμα $u = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ ως γραμμικό συνδυασμό των $u_1,\ u_2$:

$$\begin{aligned} u = (a,b) &= \lambda u_1 + \mu u_2 \\ \Leftrightarrow (a,b) &= (\lambda + 2\mu, 2\lambda + \mu) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda + 2\mu = a \\ \\ 2\lambda + \mu = b \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{2b-a}{3}, \ \ \mu = \frac{2a-b}{3}.$$

Δηλ.

$$u = (a,b) = \frac{2b-a}{3} u_1 + \frac{2a-b}{3} u_2.$$

Έτσι, αφού το σύνολο $\{u_1, u_2\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και παράγει τον $\mathbb{R}^2$, έπεται ότι είναι μια βάση του.

3. Στο διανυσματικό χώρο $V := \mathbb{R}_2[x]$ θεωρούμε τα πολυώνυμα $p_1(x) = -x^2 - 2x + 1,\ p_2(x) = 2x^2 + 2x - 2,\ p_3(x) = -4x^2 + 2x + 4$.
Τα πολυώνυμα αυτά είναι γραμμικώς εξαρτημένα:

Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 = 0$, δηλ.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) + \lambda_3 p_3(x) = 0_{\mathbb{R}_2[x]} = 0 + 0x + 0x^2.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} \lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) + \lambda_3 p_3(x) &= 0_{\mathbb{R}_2[x]} \\ \Leftrightarrow \lambda_1(-x^2 - 2x + 1) + \lambda_2(2x^2 + 2x - 2) + \lambda_3(-4x^2 + 2x + 4) &= 0_{\mathbb{R}_2[x]} \\ \Leftrightarrow x^2(-\lambda_1 + 2\lambda_2 - 4\lambda_3) + x(-2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3) + (\lambda_1 - 2\lambda_2 + 4\lambda_3) &= 0_{\mathbb{R}_2[x]} \end{aligned}$$

η οποία τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη με το σύστημα

$$\begin{aligned} -\lambda_1 + 2\lambda_2 - 4\lambda_3 &= 0 \\ -2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 + 4\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

το οποίο είναι ισοδύναμο (αφού η πρώτη εξίσωση είναι ίδια με τον τρίτη) με το

$$\begin{aligned} \lambda_1 - 2\lambda_2 + 4\lambda_3 &= 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

το οποίο δεν έχει μόνο την τετριμμένη λύση, άρα τα πολυώνυμα ειναι γραμμικώς εξαρτημένα. Το γεγονός αυτό αντανακλάται από το ότι το p_3 είναι γραμμικός συνδυασμός των p_1, p_2 :

$$\begin{aligned} p_3(x) &= \lambda p_1(x) + \mu p_2(x) \\ \Leftrightarrow -4x^2 + 2x + 4 &= \lambda(-x^2 - 2x + 1) + \mu(2x^2 + 2x - 2) \\ \Leftrightarrow -4x^2 + 2x + 4 &= x^2(-\lambda + 2\mu) + x(-2\lambda + 2\mu) + (\lambda - 2\mu) \end{aligned}$$

η οποία σχέση είναι ισοδύναμη με το σύστημα

$$\begin{aligned} -\lambda + 2\mu &= -4 \\ -2\lambda + 2\mu &= 2 \\ \lambda - 2\mu &= 4 \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα αυτό (το οποίο έχει μοναδική λύση) παίρνουμε οτι $\lambda = 2,\ \mu = -1$.

4. Θα δείξουμε οτι τα διανύσματα $v_1 := (4, 0, 2),\ v_2 := (1, 3, -2),\ v_3 := (2, -6, 6)$ του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

   Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

   $$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0.$$

   Τότε, η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη με το σύστημα

   $$\begin{aligned} 4\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_2 - 6\lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + 6\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

   Λύνοντας το πιο πάνω σύστημα, βλέπουμε οτι έχει μη μηδενικές λύσεις, επομένως, τα v_1, v_2, v_3 είναι γραμμικώς εξαρτημένα.
   Αφού τα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα, κάποια από αυτά θα είναι γραμμικός συνδυασμός των άλλων. Παρατηρούμε οτι $v_3 = (2, -6, 6) = (4, 0, 2) - 2(1, 3, -2) = v_1 - 2v_2$.

5. Θεωρούμε τα πολυώνυμα $P, P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}_2[x]$ με $P(x) := -3+4x+x^2,\ P_1(x) := 5 - 2x + x^2,\ P_2(x) := -3x + 2x^2$ και $P_3(x) := 3 + x$. Θα εκφράσουμε το P ως γραμμικό συνδυασμό των P_1, P_2, P_3.

   $$\begin{aligned} P(x) &= \lambda_1 P_1(x) + \lambda_2 P_2(x) + \lambda_3 P_3(x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + 4x - 3 &= x^2(\lambda_1 + 2\lambda_2) + x(-2\lambda_1 - 3\lambda_2 + 3\lambda_3) + 5\lambda_1 + 3\lambda_3 \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 1 \\ \\ -2\lambda_1 - 3\lambda_2 + 3\lambda_3 = 4 \\ \\ 5\lambda_1 + 3\lambda_3 = -3 \end{array} \right. . \end{aligned}$$

   Λύνοντας το τελευταίο σύστημα, βρίσκουμε

   $$\lambda_1 = -3,\ \ \lambda_2 = 2,\ \ \lambda_3 = 4.$$

Άσκηση 3 *Έστω $u, v \in \mathbb{R}^3$. Τότε, τα u και v είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν και μόνο αν $u \times v \neq (0, 0, 0)$.*

Λύση Έστω οτι τα $u = (u_1, u_2, u_3)$ και $v = (v_1, v_2, v_3)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Υποθέτουμε οτι $u \times v = (0, 0, 0)$. Αλλά,

$$u \times v = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 u_2 - u_2 v_1).$$

Τότε, $u_2v_3 = u_3v_2,\ u_3v_1 = u_1v_3,\ u_1u_2 = u_2v_1$. Αν το $u \neq (0,0,0)$, τότε κάποιο από τα u_1, u_2, u_3 είναι $\neq 0$. Έστω ότι $u_1 \neq 0$. Τότε, $v_3 = \frac{u_3v_1}{u_1}, u_2 = \frac{u_2v_1}{u_1}$. Έτσι,

$$(v_1, v_2, v_3) = \frac{v_1}{u_1}(u_1, u_2, u_3),$$

δηλ. τα u και v είναι γραμμικώς εξαρτημένα, άτοπο.

Για το αντίστροφο, υποθέτουμε οτι $u \times v \neq 0$ και θα δείξουμε οτι τα u και v είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Έστω λοιπόν $\lambda_1 u + \lambda_2 v = (0,0,0)$, για κάποια $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$\begin{aligned}
(\lambda_1 u + \lambda_2 v) \times u &= 0 \times u = (0,0,0) \\
\Rightarrow \lambda_1 u \times u + \lambda_2 (v \times u) &= (0,0,0) \\
\overset{u\times u=(0,0,0)}{\Rightarrow} \lambda_2 (v \times u) &= (0,0,0) \\
\overset{u\times v\neq(0,0,0)}{\Rightarrow} \lambda_2 &= 0.
\end{aligned}$$

Ομοίως,

$$\begin{aligned}
(\lambda_1 u + \lambda_2 v) \times v &= 0 \times u = (0,0,0) \\
\Rightarrow \lambda_1 u \times v + \lambda_2 (v \times v) &= (0,0,0) \\
\overset{v\times v=(0,0,0)}{\Rightarrow} \lambda_1 (u \times v) &= (0,0,0) \\
\overset{u\times v\neq(0,0,0)}{\Rightarrow} \lambda_1 &= 0.
\end{aligned}$$

Έτσι, τα u και v είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Άσκηση 4 *Σε ένα διανυσματικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο $(V, \langle , \rangle)$ ισχύει η τριγωνική ανισότητα:*

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \forall\, u, v \in V.$$

Λύση Για $u, v \in V$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle = \|u\|^2 + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \|v\|^2 \\
&\leq \|u\|^2 + 2|\langle u, v\rangle| + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 \quad (Cauchy - Schwarz) \\
&= (\|u\| + \|v\|)^2 .
\end{aligned}$$

Επίσης, ισχύει η αντίστροφη τριγωνική ανισότητα:

$$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|, \quad \forall\, u, v \in V.$$

Λύση Για $u, v \in V$ έχουμε (από την τριγωνική ανισότητα)

$$\|u\| = \|u - v + v\| \leq \|u - v\| + \|v\| \quad \Rightarrow \|u\| - |v\| \leq \|u - v\|$$

και

$$\|v\| = \|v - u + u\| \leq \|v - u\| + \|u\| \quad \Rightarrow \|v\| - \|u\| \leq \|u - v\|.$$

Το συμπέρασμα έπεται.

Άσκηση 5 *Να λυθεί το σύστημα*

$$\begin{aligned}
x + 3y + 6z &= 25 \\
2x + 7y + 14z &= 58 \\
2y + 5z &= 19
\end{aligned}$$

Λύση Ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 7 & 14 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

και αν

$$B = \begin{pmatrix} 25 \\ 58 \\ 19 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

το σύστημα γράφεται στη μορφή $AX = B$. Έχουμε:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 6 & 25 \\ 2 & 7 & 14 & 58 \\ 0 & 2 & 5 & 19 \end{array}\right) \overset{r_2 \to r_2 - 2r_1}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 6 & 25 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 19 \end{array}\right)$$

$$\overset{r_3 \to r_3 - 2r_2}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 6 & 25 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Το ισοδύναμο σύστημα που προκύπτει είναι το

$$\begin{aligned} x + 3y + 6z &= 25 \\ y + 2z &= 8 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Το σύστημα έχει μοναδική λύση, την $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.

Άσκηση 6 *Να λυθεί το σύστημα*

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ 2x + y + z + 2w &= 0 \\ 4x + 5y + 7z + 2w &= 0 \end{aligned}$$

Λύση Αφού το πλήθος των αγνώστων είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των εξισώσεων, το σύστημα έχει μη τετριμμένες λύσεις. Ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Αν $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$, τότε το σύστημα γράφεται ως $AX = 0$. Κάνοντας γραμμοπράξεις στον πίνακα A θα καταλήξουμε σε έναν (ισοδύναμο) κλιμακωτό πίνακα A' ο οποίος θα μας δώσει ένα ισοδύναμο με το αρχικό σύστημα, το $A'x = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix} \overset{r_3 \to r_3 - 2r_1}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{r_2 \to r_2 - 2r_1}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \end{pmatrix} \overset{r_3 \to r_3 + r_2}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 \to -\frac{1}{3} r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ο τελευταίος πίνακας δίνει το ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \Rightarrow x = -2y - 3z \\ y + \frac{5}{3}z - \frac{2}{5}w &= 0 \Rightarrow y = -\frac{5}{3}z + \frac{2}{5}w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x &= \frac{z}{3} - \frac{4}{5}w \\ y &= -\frac{5}{3}z + \frac{2}{5}w \end{aligned}$$

Ελεύθερες μεταβλητές είναι οι z, w και βασικές οι x, y. Άρα, οι λύσεις είναι της μορφής $\left(\frac{z}{3} - \frac{4}{5}w, -\frac{5}{3}z + \frac{2}{5}w, z, w\right),\ z, w \in \mathbb{R}$.