

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

**ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ
[ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΥ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ (ΛΕΥΚΩΣΙΑΣ)]**

ΣΧΟΛΙΚΗΣ ΧΡΟΝΙΑΣ 2018-2019

ΙΩΑΚΕΙΜ ΙΩΑΝΝΗΣ

<http://ioakimioannis.com>

Μέρος Α

1 Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + \eta \mu x) = 0 + \eta \mu 0 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (2e^x + x - 2) = 2e^0 + 0 - 2 = 0$$

και άρα το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \eta \mu x}{2e^x + x - 2}$ αποτελεί απροσδιοριστία τύπου $\frac{0}{0}$. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + \eta \mu x)'}{(2e^x + x - 2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sigma \nu \nu x}{2e^x + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sigma \nu \nu x)}{\lim_{x \rightarrow 0} (2e^x + 1)} = \frac{1 + \sigma \nu \nu 0}{2e^0 + 1} = \frac{2}{3}$$

Συνεπώς, από κανόνα του L'Hôpital:

$$\frac{2}{3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + \eta \mu x)'}{(2e^x + x - 2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \eta \mu x}{2e^x + x - 2}$$

□

2 Εκ της γραμμικότητας του αορίστου ολοκληρώματος,

$$\int \left(4x^3 + \eta \mu(3x) - \frac{1}{x} \right) dx = \int 4x^3 dx + \int \eta \mu(3x) dx - \int \frac{dx}{x} = x^4 - \frac{1}{3} \sigma \nu \nu(3x) - \ln|x| + c$$

για κάποια (αυθαίρετη πραγματική) σταθερά c . □

3 (α) Οι αναγραμματισμοί της λέξης ΠΑΓΚΥΠΡΙΟ είναι $\frac{9!}{2!}$ το πλήθος.

(β) Οι αναγραμματισμοί της λέξης ΠΑΓΚΥΠΡΙΟ οι οποίοι έχουν όλα τα φωνήεντα σε διαδοχικές θέσεις είναι $\frac{4! \cdot 6!}{2!}$. □

4 (α) Ορισμός

Λέμε ότι η ευθεία $x = a$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** του γραφήματος μιας συνάρτησης f αν **τουλάχιστον** ένα από τα πιο κάτω ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \quad \text{ή} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \quad \text{ή} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

(β) Για να παρουσιάζει η συνάρτηση τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 2$, πρέπει, σύμφωνα με το Θεώρημα του Fermat, το σημείο αυτό να είναι στάσιμο. Αφού λοιπόν η f είναι παραγωγίσιμη στο π.ο. της, αυτό είναι ισοδύναμο με $f'(2) = 0$. Είναι

$$f'(x) = 2\alpha - \frac{\beta}{x^2}, \quad x > 0$$

Έτσι, $f'(2) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha - \frac{\beta}{4} = 0 \Leftrightarrow \beta = 8\alpha$. Επίσης $f(2) = 8 \Rightarrow 4\alpha + \frac{\beta}{2} = 8 \Rightarrow \beta = 16 - 8\alpha$. Λύνοντας τις πιο πάνω βρίσκουμε $\alpha = 1$, $\beta = 8$. Εύκολα, για τις τιμές αυτές των α και β βρίσκουμε μια περιοχή του σημείου $x_0 = 2$ έτσι ώστε η f' να αλλάζει πρόσημο (από αρνητική σε θετική). Άρα, πρέπει και αρκεί $\alpha = 1$, $\beta = 8$.

(γ) Για $\alpha = 1$, $\beta = 8$ η συνάρτηση έχει τύπο

$$f(x) = 2x + \frac{8}{x}, \quad x > 0$$

Τότε,



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(2x + \frac{8}{x} \right) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2x + \frac{8}{x} \right) = +\infty$$

και αρα ο άξονας των τεταγμένων είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη του γραφήματος της f . $\square$

- 5 Σημείωση: Εφαρμόζουμε τα αξιώματα του Kolmogorov για τον ορισμό της Πιθανότητας

Έχουμε

$$\begin{cases} P(A) = \frac{2}{3} \Rightarrow P(\{\alpha\}) + P(\{\beta\}) = \frac{2}{3} \\ P(\{\alpha\}) + P(\{\beta\}) + P(\{\gamma\}) = P(\{\alpha, \beta, \gamma\}) = P(\Omega) = 1 \\ P(B) = \frac{1}{2} \Rightarrow P(\{\alpha\}) + P(\{\gamma\}) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

και αρα

$$\begin{cases} P(\{\alpha\}) + P(\{\beta\}) = \frac{2}{3} \\ P(\{\alpha\}) + P(\{\beta\}) = 1 - P(\{\gamma\}) \end{cases} \Rightarrow 1 - P(\{\gamma\}) = \frac{2}{3} \Rightarrow P(\{\gamma\}) = \frac{1}{3}$$

και

$$\begin{cases} P(\{\alpha\}) + P(\{\gamma\}) = \frac{1}{2} \\ P(\{\gamma\}) = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow P(\{\alpha\}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Τέλος,

$$P(\{\beta\}) = 1 - P(\{\alpha\}) - P(\{\gamma\}) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

(β) Είναι $A \cap B = \{\alpha, \beta\} \cap \{\alpha, \gamma\} = \{\alpha\}$, $B - A = \{\gamma\}$ και $A \cup B' = \{\alpha, \beta\} \cup \{\beta\} = \{\alpha, \beta\} = A$. Έτσι,

$$P(A \cap B) = P(\{\alpha\}) = \frac{1}{6}$$

$$P(B - A) = P(\{\gamma\}) = \frac{1}{3}, \quad P(A \cup B') = P(A) = \frac{2}{3}$$

$$P(A' \cup B') = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$\square$

- 6 Εύκολα βλέπουμε ότι

$$C: x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0 \Leftrightarrow C: (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$$

και αρα ο κύκλος που περιγράφεται από την πιο πάνω εξίσωση έχει κέντρο το σημείο $K(2, -3)$ και ακτίνα $R = \sqrt{16} = 4$.

(α) Θα βρούμε την απόσταση $d(K, (\varepsilon))$ του $K(2, -3)$ από την ευθεία $(\varepsilon): 3x - 4y - 8 = 0$:

$$d(K, (\varepsilon)) = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot (-3) - 8|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|6 + 12 - 8|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{10}{\sqrt{25}} = 2 < 4 = R$$

και αρα $R = 4 > 2 = d(K, (\varepsilon))$. Έτσι, η ευθεία τέμνει τον κύκλο σε 2 σημεία.



(β) Είναι $\lambda_\varepsilon = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$. Από γνωστό Θεώρημα, έχουμε ότι η διάμετρος του κύκλου η οποία περνά από το μέσο μιας χορδής του είναι κάθετη στη χορδή αυτή. Έτσι,

$$\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{\text{διαμ. έτρον}} = -1 \Rightarrow \lambda_{\text{διαμ. έτρον}} = -\frac{4}{3}$$

Συνεπώς, η εξίσωση της διαμέτρου είναι

$$y - y_K = -\frac{4}{3}(x - x_K), \text{ δηλ. } y + 3 = -\frac{4}{3}(x - 2)$$

δηλ. $3y + 4x = -1$ □

7 (α) Θεώρημα [Rolle]

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα (κλειστό) διάστημα $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του, δηλ. στο (a, β) και τέτοια ώστε $f(a) = f(\beta)$. Τότε, υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi) = 0$.

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο¹

$$g(x) = f(x) - x^3$$

f παραγωγίσιμη στο $[1, 3] \Rightarrow f$ παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του $[1, 3]$, δηλ. στο $(1, 3)$ και συνεχής στο $[1, 3]$. Επίσης,

$$g(1) = f(1) - 1^3 = f(1) - 1 \text{ και } g(3) = f(3) - 3^3 = f(3) - 27 \quad (1)$$

Αλλά, από υπόθεση, έχουμε $f(3) - f(1) = 26$, δηλ. $f(3) = 26 + f(1)$ και αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε

$$g(3) = f(3) - 27 = 26 + f(1) - 27 = f(1) - 1 = g(1)$$

Πληρούνται λοιπόν οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle για την g στο διάστημα $[1, 3]$. Συνεπώς, υπάρχει $\xi \in (1, 3)$ τέτοιος ώστε $g'(\xi) = 0$. Αλλά, $g'(x) = f'(x) - 3x^2, \forall x \in (1, 3)$ και το συμπέρασμα έπεται. □

8 Πρέπει $\theta \neq 0, \pi$. Είναι $E'(-\gamma, 0)$ και $E(\gamma, 0)$, όπου $\gamma = \sqrt{25 - 16} = 3$.

Εύρεση της εξίσωσης της εφαπτομένης στο σημείο M

Παραγωγίζοντας πεπλεγμένα την εξίσωση της καμπύλης, έχουμε

$$\frac{2}{25}x + \frac{2}{4}y \frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\beta^2}{25} \cdot \frac{x}{y}$$

και στο σημείο $M\left(\frac{5\sigma\eta\nu\theta}{x(\theta)}, \frac{4\eta\mu\theta}{y(\theta)}\right)$ είναι

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{25} \cdot \frac{5\sigma\eta\nu\theta}{\beta\eta\mu\theta} = -\frac{4}{5} \cdot \frac{\sigma\eta\nu\theta}{\eta\mu\theta}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο M είναι

$$y - 4\eta\mu\theta = -\frac{4}{5} \cdot \frac{\sigma\eta\nu\theta}{\eta\mu\theta} (x - 5\sigma\eta\nu\theta) \Leftrightarrow 5\eta\mu\theta(y - 4\eta\mu\theta) = -4\sigma\eta\nu\theta(x - 5\sigma\eta\nu\theta)$$

¹ Η συνάρτηση αυτή ορίζεται καλώς.

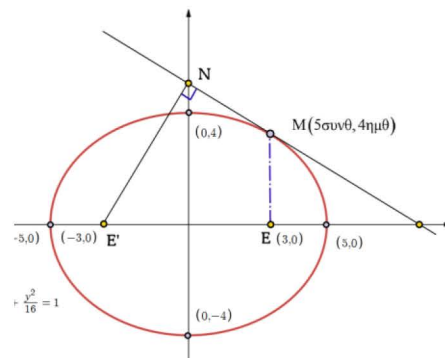
² Ιδιαίτερα, $g'(x) = f'(x) - 3x^2, \forall x \in [1, 3]$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (5\eta\mu\theta)y - 20\eta\mu^2\theta &= -(4\sigma\upsilon\nu\theta)x + 20\sigma\upsilon\nu^2\theta \\ \Leftrightarrow (5\eta\mu\theta)y + (4\sigma\upsilon\nu\theta)x &= 20(\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta) \\ \Leftrightarrow (5\eta\mu\theta)y + (4\sigma\upsilon\nu\theta)x &= 20 \end{aligned}$$

Θέτοντας στην εξίσωση της εφαπτομένης $x = 0$, βρίσκουμε το σημείο $N: N(0, \frac{4}{\eta\mu\theta})$

$$\begin{aligned} \lambda_{MN} &= \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \frac{4\eta\mu\theta - \frac{4}{\eta\mu\theta}}{5\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{4}{5} \cdot \frac{\eta\mu^2\theta - 1}{\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\theta} \\ &= -\frac{4}{5} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\theta} = -\frac{4}{5} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta} \end{aligned}$$

$$\lambda_{NE'} = \frac{y_{E'} - y_N}{x_{E'} - x_N} = \frac{0 - \frac{4}{\eta\mu\theta}}{-3 - 0} = \frac{4}{3\eta\mu\theta}$$



$$\begin{aligned} (MN) \perp (NE') &\Rightarrow \lambda_{NE'} \cdot \lambda_{MN} = -1 \Rightarrow \frac{16\sigma\upsilon\nu\theta}{15\eta\mu^2\theta} = 1 \Rightarrow 16\sigma\upsilon\nu\theta = 15\eta\mu^2\theta \\ &\Rightarrow 16\sigma\upsilon\nu\theta = 15(1 - \sigma\upsilon\nu^2\theta) \Rightarrow 15\sigma\upsilon\nu^2\theta + 16\sigma\upsilon\nu\theta - 15 = 0 \end{aligned}$$

Λύνοντας την πιο πάνω, βρίσκουμε ότι $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{3}{5}$ ή $\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{5}{3}$ (απορρίπτεται, αφού $|\sigma\upsilon\nu\theta| \leq 1$)

Άρα, αν $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{3}{5}$, έχουμε ότι το σημείο M ευρίσκεται είτε στο 1ο είτε στο 4ο τεταρτημόριο και $x_M = 3 = x_E$ και άρα $(ME) \perp xx'$. □

9 Έχουμε:

$$\ln x \cdot f'(x) = -\frac{5}{x^2} - \frac{1}{x} \cdot f(x) \Leftrightarrow \ln x \cdot f'(x) + (\ln x)' \cdot f(x) = -\frac{5}{x^2} \Leftrightarrow (\ln x \cdot f(x))' = -\frac{5}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \int (\ln x \cdot f(x))' dx = -5 \int \frac{1}{x^2} dx \Leftrightarrow \ln x \cdot f(x) = \frac{5}{x} + c$$

Αλλά, $f(e) = \frac{e^2+5}{e}$ και άρα αντικαθιστώντας στην πιο πάνω:

$$\underbrace{\ln e}_1 \cdot \underbrace{f(e)}_{\frac{e^2+5}{e}} = \frac{5}{e} + c, \quad \text{δηλ.} \quad \frac{e^2+5}{e} = \frac{5}{e} + c, \quad \text{δηλ.} \quad c = e$$

και άρα

$$f(x) = \frac{1}{\ln x} \left(\frac{5}{x} + e \right)$$

□

10 Κατ'αρχάς,

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{2019^{g(x)} + 1} dx = \int_{-1}^0 \frac{f(x)}{2019^{g(x)} + 1} dx + \int_0^1 \frac{f(x)}{2019^{g(x)} + 1} dx \quad (1).$$

Θεωρούμε το μετασχηματισμό $u: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $u(x) = -x$ ο οποίος είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού του και μάλιστα γνησίως φθίνουσα συνάρτηση ($\frac{du}{dx} = -1 < 0, \forall x \in [-1, 1]$). Έτσι,



$$\int_{-1}^0 \frac{f(x)}{2019^{g(x)} + 1} dx = - \int_{u(-1)}^{u(0)} \frac{f(-u)}{2019^{g(-u)} + 1} du = - \int_1^0 \frac{f(-u)}{2019^{g(-u)} + 1} du = \int_0^1 \frac{f(-u)}{2019^{g(-u)} + 1} du$$

$$= \int_0^1 \frac{f(u)}{2019^{-g(u)} + 1} du = \int_0^1 \frac{f(u)}{\frac{1}{2019^{g(u)}} + 1} du = \int_0^1 \frac{f(u)}{\frac{2019^{g(u)} + 1}{2019^{g(u)}}} du$$

$$= \int_0^1 \frac{2019^{g(u)} f(u)}{2019^{g(u)} + 1} du \equiv \int_0^1 \frac{2019^{g(x)} f(x)}{2019^{g(x)} + 1} dx$$

(αφού $f(-x) = f(x), \forall x \in [-1,1]$ και αφού $g(-x) = -g(x), \forall x \in [-1,1]$). Άρα, από την (1),

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{2019^{g(x)} + 1} dx = \int_0^1 \frac{2019^{g(x)} f(x)}{2019^{g(x)} + 1} dx + \int_0^1 \frac{f(x)}{2019^{g(x)} + 1} dx = \int_0^1 \left(\frac{2019^{g(x)} f(x)}{2019^{g(x)} + 1} + \frac{f(x)}{2019^{g(x)} + 1} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{2019^{g(x)} f(x) + f(x)}{2019^{g(x)} + 1} dx = \int_0^1 \frac{f(x)(2019^{g(x)} + 1)}{2019^{g(x)} + 1} dx = \int_0^1 f(x) dx$$

Μέρος Β

1 Έχουμε

$$f(x) = \frac{(x-3)^2}{x-2} = \frac{x^2 - 6x + 9}{x-2}.$$

Εύρεση π.ο.

Η f είναι ρητή συνάρτηση. Άρα

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x - 2 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\} = \mathbb{R} - \{2\}$$

Εύρεση σημείων τομής με τους άξονες

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 \Leftrightarrow x = 3$$

Άρα, $(3,0)$. Επίσης, $f(0) = \frac{9}{2}$, άρα $(0, \frac{9}{2})$.

Εύρεση διαστημάτων μονotonίας+ακρότατα:

Η f είναι παραγωγίσιμη στο π.ο. της με

$$f'(x) = \frac{(x-3)(x-1)}{(x-2)^2}, \forall x \in D(f)$$

και άρα η f έχει κρίσιμα σημεία τα $x = 1, 2, 3$.

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	-	+	
$f(x)$	↗	↘	↘	↗	
	max		min		

Έτσι,

η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(1,2)$ και $(2,3)$ και γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(3, +\infty)$. Επίσης, αφού $f'(1) = 0 = f'(3)$, έπεται από τα πιο πάνω και το κριτήριο 1ης παραγώγου ότι στο σημείο με $x = 1$ η συνάρτηση λαμβάνει τοπικό μέγιστο και στο σημείο με $x = 3$ η συνάρτηση λαμβάνει τοπικό ελάχιστο. Είναι $f(3) = 0$ και $f(1) = -4$.

Σημείωση: Λόγω της συνέχειας της συνάρτησης στα σημεία $x = -1, 3$ μπορούμε να ιδιαίτερα να πούμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[1,2]$ και $[2,3]$ και γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[3, +\infty)$.

Έλεγχος κυρτότητας

Αλλά,

$$f''(x) = \frac{2}{(x-2)^3}, \forall x \in D(f)$$

και άρα η συνάρτηση δεν έχει Σ.Κ. και είναι κυρτή στο $(2, +\infty)$ και κοίλη στο $(-\infty, 2)$.

Εύρεση ασυμπτωτών: Έχουμε $\forall x \in D(f)$

$$f(x) = x - 4 + \frac{1}{x-2}$$

Η ευθεία με εξίσωση $y = x - 4$ είναι πλάγια ασύμπτωτη του γραφήματος της f . Πράγματι,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 6x + 9}{x(x-2)} = 1$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x)] = -4$$

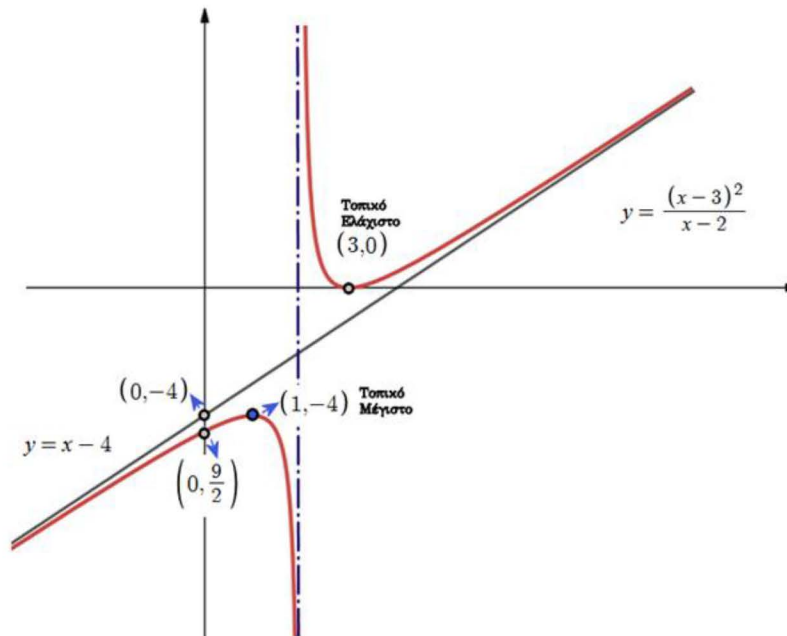


και το αποτέλεσμα έπεται από το γνωστό μας Θεώρημα. Τώρα,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 2} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 2} = +\infty$$

Έτσι, η ευθεία $x = 2$, είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη του γραφήματος της f . Τέλος

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$



- 2 Το σημείο Γ θα είναι της μορφής $\Gamma(-1, y)$ για κάποιο $y > 0$. Έχουμε

$$\lambda_{A\Gamma} = \frac{y-0}{-1-2} = -\frac{y}{3}, \quad \lambda_{B\Gamma} = \frac{y-0}{-1-5} = -\frac{y}{6}$$

και αρα, αφού η γωνία $\hat{\omega} = \hat{\omega}_2 - \hat{\omega}_1$ (δες σχήμα) είναι οξεία,

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\lambda_{B\Gamma} - \lambda_{A\Gamma}}{1 + \lambda_{B\Gamma} \cdot \lambda_{A\Gamma}} = \dots = \frac{3y}{y^2 + 18}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση ω με τύπο

$$\omega(y) = \arctan\left(\frac{3y}{y^2 + 18}\right)$$

Έστω g η συνάρτηση με τύπο $g(y) = \frac{3y}{y^2 + 18}$.

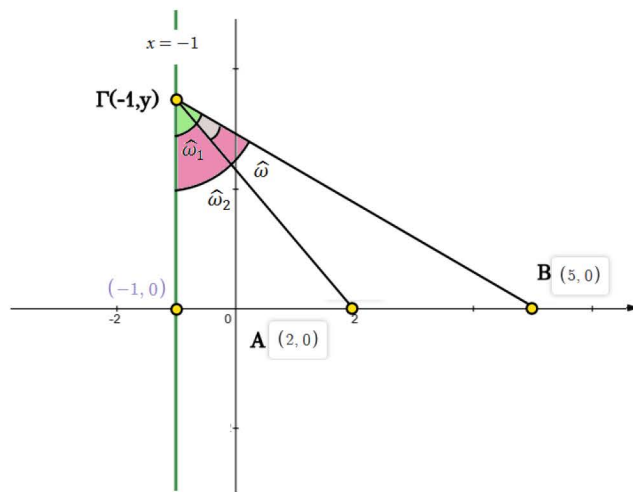
Τότε

$$D(\omega) = \left\{ y \in D(g) : \frac{3y}{y^2 + 18} \in \mathbb{R} \right\} = D(g) = \mathbb{R}$$

και $\forall y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \omega'(y) &= \frac{\left(\frac{3y}{y^2 + 18}\right)'}{1 + \left(\frac{3y}{y^2 + 18}\right)^2} = \dots \\ &= -\frac{3(y^2 - 18)}{(y^2 + 36)(y^2 + 9)} \end{aligned}$$

Τα κρίσιμά της σημεία είναι τα σημεία



ώστε $\omega'(y) = 0$, δηλ. τα $y = \pm 3\sqrt{2}$.

Κατασκευάζοντας τον πίνακα προσήμου της ω , ελέγχοντας τη μονοτονία της, βρίσκουμε ότι η συνάρτηση (παρατηρήστε ότι η ω' είναι άρτια και η ω περιττή) λαμβάνει ολικό μέγιστο στο σημείο με $y = 3\sqrt{2}$. Άρα, $\Gamma(-1, 3\sqrt{2})$. $\square$

3 (α) Παρατηρούμε ότι

$$\frac{2}{v^2} + \frac{1}{v^3} + \frac{4}{v^2} + \frac{2^2}{v^3} + \frac{6}{v^2} + \frac{3^2}{v^3} + \frac{8}{v^2} + \frac{4^2}{v^3} + \dots = \left(\frac{2}{v^2} + \frac{4}{v^2} + \frac{6}{v^2} + \frac{8}{v^2} + \dots \right) + \left(\frac{1}{v^3} + \frac{2^2}{v^3} + \frac{3^2}{v^3} + \frac{4^2}{v^3} + \dots \right)$$

Οι όροι $2, 4, 6, 8, \dots$ αποτελούν διαδοχικούς όρους Α.Π. $(\alpha_k)_k$ με σταθερή διαφορά $\delta = 2$ και αρχικό όρο $\alpha_1 = 2$. Έτσι,

$$\alpha_k = \alpha_1 + (k-1)\delta = 2 + (k-1)2 = 2k.$$

Έτσι, για κάθε $v \in \mathbb{N}$

$$S_v = \frac{2}{v^2} + \frac{4}{v^2} + \frac{6}{v^2} + \frac{8}{v^2} + \dots + \frac{2v}{v^2} = \frac{1}{v^2} \sum_{k=1}^v 2k = \frac{2}{v^2} \sum_{k=1}^v k = \frac{2}{v^2} \frac{v(v+1)}{2} = \frac{v+1}{v} = 1 + \frac{1}{v}$$

Επίσης, για κάθε $v \in \mathbb{N}$ οι όροι $1, 2, 3, \dots$ αποτελούν διαδοχικούς όρους Α.Π. $(\alpha_k)_k$ με σταθερή διαφορά $\delta = 1$ και αρχικό όρο $\alpha_1 = 1$. Έτσι,

$$\alpha_k = \alpha_1 + (k-1)\delta = 1 + (k-1)1 = k$$

Έτσι, για κάθε $v \in \mathbb{N}$

$$\tilde{S}_v = \frac{1}{v^3} + \frac{2^2}{v^3} + \frac{3^2}{v^3} + \frac{4^2}{v^3} + \dots + \frac{v^2}{v^3} = \frac{1}{v^3} \sum_{k=1}^v k^2 = \frac{1}{v^3} \cdot \frac{v(v+1)(2v+1)}{6} = \frac{(v+1)(2v+1)}{6v^2}$$

Άρα, για κάθε $v \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} S_v + \tilde{S}_v &= \frac{v+1}{v} + \frac{(v+1)(2v+1)}{6v^2} = \frac{6v(v+1) + (v+1)(2v+1)}{6v^2} = \frac{(v+1)(6v+2v+1)}{6v^2} \\ &= \frac{(v+1)(8v+1)}{6v^2} \\ &= \frac{8v^2 + 9v + 1}{6v^2} \end{aligned}$$

Είναι

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} (S_v + \tilde{S}_v) = \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{8v^2 + 9v + 1}{6v^2} = \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{8v^2}{6v^2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} < +\infty$$

και άρα η πιο πάνω σειρά συγκλίνει. Ιδιαίτερα, αυτή ισούται με $\frac{4}{3}$.

(β) Θα δείξουμε ότι

$$\int_1^2 (x^2 - 1) dx = \frac{4}{3}.$$

Κατ'αρχάς, η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 1, x \in [1, 2]$ είναι συνεχής και άρα κατά Riemann ολοκληρώσιμη. Θεωρούμε την ομοιόμορφη διαμέριση μεγέθους n του διαστήματος $[1, 2]$:

$$\Delta_x(n) = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n}, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Το κάθε x_i δίνεται από την $x_i = \frac{i}{n}$. Έτσι,

$$\begin{aligned}\int_1^2 (x^2 - 1) dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \cdot \Delta x(n) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^n f\left(1 + \frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} \right) \\ f(x) = x^2 - 1, x \in [1, 2] &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\left(1 + \frac{i}{n}\right)^2 - 1 \right) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 + \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^n i \right) \\ \sum_{i=1}^n i^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ \sum_{i=1}^n i &= \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} + \frac{2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n^3}{6n^3} - \frac{n^2}{n^2} \right) = \frac{2}{6} + 1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

(γ) (i) Είναι

$$g(2) = \frac{2^3}{3} - 2 - \frac{2}{3} = \frac{8}{3} - 2 - \frac{2}{3} = \frac{6}{3} - \frac{6}{3} = 0$$

(ii) Βρίσκουμε τα σημεία τομής των καμπύλων:

$$f(-2) = 3 \text{ και } f(a) = a^2 - 1 > 0$$

Επίσης, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Επίσης, $\forall x \in [-2, -1] \cup [1, a]$ είναι $f(x) \geq 0$ και $\forall x \in [-1, 1]$ είναι $f(x) \leq 0$. Έτσι,

$$\begin{aligned}E(a) = E_1(a) + E_2(a) + E_3(a) &= \int_{-2}^{-1} f(x) dx + \left(- \int_{-1}^1 f(x) dx \right) + \int_1^a f(x) dx \\ &= \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1) dx - \int_{-1}^1 (x^2 - 1) dx + \int_1^a (x^2 - 1) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_{-2}^{-1} - \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_{-1}^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^a \\ &= \frac{a^3}{3} - a + \frac{10}{3}\end{aligned}$$

Είναι

$$E(a) = 4 \Leftrightarrow \frac{a^3}{3} - a + \frac{10}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{a^3}{3} - a - \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow g(a) = 0$$

Αλλά, από το προηγούμενο ερώτημα, δείξαμε ότι $g(2) = 0$ και αρα το πολυώνυμο $a - 2$ διαιρεί το πολυώνυμο $\frac{a^3}{3} - a - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}(a^3 - 3a - 2)$. Εκτελώντας τη διαίρεση, έχουμε ότι

$$\frac{a^3}{3} - a - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}(a^3 - 3a - 2) = \frac{1}{3}(a - 2)(a^2 + 2a + 1) = \frac{1}{3}(a - 2)(a + 1)^2$$

και αρα $g(a) = 0 \Leftrightarrow (a = 2) \vee (a = -1)$. Αλλά, $a > 1$ και έτσι τελικά, $a = 2$.

(δ) Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των κυκλικών δίσκων. Είναι $f(2) = 3$.

Στο σύνολο $[-1, 1]$:

Εσωτερική ακτίνα $\rho_1 = 3 + |x^2 - 1| = 3 - (x^2 - 1) = 4 - x^2$, Εξωτερική ακτίνα $\rho_2 = 3$
και αρα (λόγω συμμετρίας),

$$V_1 = 2\pi \int_0^1 (\rho_1^2 - \rho_2^2) dx = 2\pi \int_0^1 ((4 - x^2)^2 - 3^2) dx = \dots = \frac{136\pi}{15} \text{ κ. μ.}$$

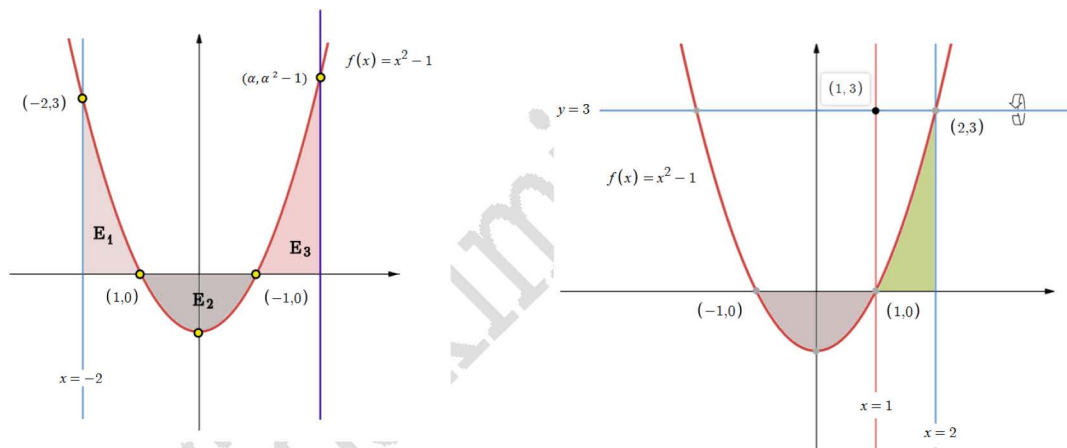
Στο σύνολο $[1, 2]$:

Εσωτερική ακτίνα $\rho_1 = 3$, Εξωτερική ακτίνα $\rho_2 = 3 - (x^2 - 1) = 4 - x^2$
και αρα

$$V_2 = \pi \int_1^2 (\rho_1^2 - \rho_2^2) dx = \pi \int_1^2 (3^2 - (4 - x^2)^2) dx = \dots = \frac{82\pi}{15} \text{ κ. μ.}$$

Έτσι,

$$V = V_1 + V_2 = \frac{136\pi}{15} + \frac{82\pi}{15} = \frac{218\pi}{15} \text{ κ. μ.}$$



Σημείωση: Απαιτείται προσοχή στον υπολογισμό των ακτίνων του (στοιχειώδους) κυκλικού δίσκου. Για περισσότερες λεπτομέρειες αναφορικά με τις τεχνικές υπολογισμού όγκου στερεού προκύπτόμενου από περιστροφή παραπέμπουμε στα βιβλία

Howard Anton, *Calculus-Early Transcendentals*, 10th Edition, (February 21, 2012) John Wiley & Sons

James Stewart, *Calculus-Early Transcendentals*, 6th Edition, 2008, Thomson Learning, Inc

και στο

Ιωακείμ Ιωάννης, ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ [Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ] (Ιανουάριος 2019), ISBN 978-9925-7485-7-0 (χαρτόδετο) | 978-9925-7567-2-8 (σκληρόδετο), 579 σελίδες

για προσαρμογή των εννοιών αυτών στο νέο αναλυτικό πρόγραμμα.

Παρόμοια είναι και η άσκηση 4/Μέρος Β του Δειγματικού του Υπουργείου του 2018.



4 (α) Έχουμε

$$C: x^2 + y^2 - 4x - 8y + 4 = 0 \Leftrightarrow C: (x-2)^2 + (y-4)^2 = 16$$

και αρα ο κύκλος που περιγράφεται από την πιο πάνω εξίσωση έχει **κέντρο** το σημείο $K(2,4)$ και **ακτίνα** $R = \sqrt{16} = 4$. Είναι

$$\begin{cases} y^2 = 4ax \\ K(2,4) \end{cases} \Leftrightarrow 8 = 8a \Leftrightarrow a = 1$$

και αρα η **Εστία** E της παραβολής είναι το σημείο $E(2,0)$. Η εξίσωση της **διευθετούσας** είναι η $x = -2$.

(β) Παραγωγίζουμε πεπλεγμένα την εξίσωση της παραβολής:

$$y^2 = 8x \Leftrightarrow 2yy' = 8 \Leftrightarrow y' = \frac{4}{y} \quad (y \neq 0)$$

και αρα $\lambda_{\text{εφ.}} = y'(2) = \frac{4}{4} = 1$. Συνεπώς, η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης είναι η

$$(KA): y - y_K = \lambda_{\text{εφ.}}(x - x_K) \Leftrightarrow (KA): y - 2 = 1(x - 4) \Leftrightarrow (KA): y = x + 2$$

Παρατηρώ ότι η διευθετούσα της παραβολής είναι και εφαπτόμενη του κύκλου (στο σημείο $(-2,4)$), αφού $d(A, x_K) = 4 = R$.

Είναι $A(-2,0)$. Οι παραμετρικές εξισώσεις του πιο πάνω κύκλου είναι οι

$$\begin{cases} x = x(t) = 2 + 4\cos(t) \\ y = y(t) = 4 + 4\sin(t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi)$$

και αρα το τυχόν σημείο T του κύκλου είναι της μορφής $T(2 + 4\cos(t), 4 + 4\sin(t))$, για κάποιο $t \in [0, 2\pi)$.

Έστω $\Gamma(-2, y_\Gamma)$. Έχουμε

$$x_M = \frac{x_\Gamma + x_T}{2} = \frac{-2 + 2 + 4\cos(t)}{2} = 2\cos(t)$$

Θα βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης ΓT του κύκλου:

Παραγωγίζουμε πεπλεγμένα την εξίσωση της κύκλου και βρίσκουμε

$$y' = \frac{2-x}{y-4} \quad (y \neq 0)$$

Επίσης

$$\lambda_{\Gamma T} = -\frac{\sin(t)}{\cos(t)}$$

και αρα

$$(\Gamma T): y - y_\Gamma = \lambda_{\text{εφ.}}(x - x_\Gamma) \Leftrightarrow (\Gamma T): y - 4 - 4\sin(t) = -\frac{\sin(t)}{\cos(t)}(x - 2 - 4\cos(t))$$

Αντικαθιστώντας το σημείο $\Gamma(-2, y_\Gamma)$ σε αυτήν παίρνουμε τελικά

$$y_\Gamma = 4 \frac{1 + \sin(t) + \cos(t)}{\cos(t)}$$

Τότε

$$y_M = \frac{y_\Gamma + y_T}{2} = \dots = \frac{2 + 4\sin(t) + 2\cos(t) + 2\sin^2(t)}{\cos(t)}$$

Άρα,



$$\begin{cases} y_M = \frac{2 + 4\eta\mu(t) + 2\sigma\upsilon\nu(t) + 2\eta\mu^2(t)}{\eta\mu(t)} \\ x_M = 2\sigma\upsilon\nu(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M = \frac{2 + 4\eta\mu(t) + 2\sigma\upsilon\nu(t) + 2\eta\mu^2(t)}{\eta\mu(t)} \\ \frac{x_M}{2} = \sigma\upsilon\nu(t) \end{cases}$$

και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\eta\mu^2(t) + \sigma\upsilon\nu^2(t) = 1$ η οποία μας δίνει $\eta\mu^2(t) = 1 - \frac{x_M^2}{4}$ έχουμε

$$\frac{x_M^2}{4} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2x + 8 - \frac{x_M^2}{2}}{y - 4} \right)^2 = 1 \quad \text{ή} \quad x_M^2 + \left(\frac{2x + 8 - \frac{x_M^2}{2}}{y - 4} \right)^2 = 4$$

(γ) Παρατηρούμε (ορισμός της παραβολής)

$$BE = d(B, \Gamma) = 2 + x_B \quad \text{και} \quad \Delta E = d(\Delta, \Gamma) = 2 + x_\Delta$$

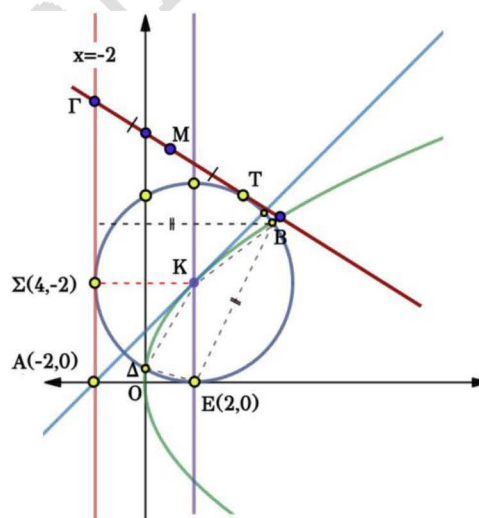
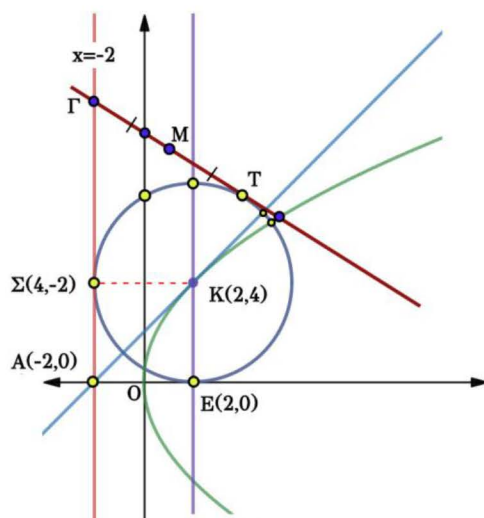
Επίσης, $KB = K\Delta = R = 4$. Τότε

$$\Pi_{KBE\Delta} = KB + K\Delta + BE + \Delta E = 4 + 4 + 2 + x_B + 2 + x_\Delta = 12 + x_B + x_\Delta$$

και αρα

$$\lambda - 12 = x_B + x_\Delta, \quad \text{δηλ.} \quad \underbrace{\frac{x_B + x_\Delta}{2}}_{x_N} = \frac{\lambda - 12}{2}$$

Επαληθεύουμε ότι το σημείο x_N ικανοποιεί την εξίσωση της ευθείας (η): $2x - \lambda + 12 = 0$.



- 5 (α) Δυο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω λέγονται **ανεξάρτητα** αν

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Είναι

$$\begin{aligned} P(A \cap B') &= P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \cdot P(B) && \text{A, B ανεξάρτητα} \\ &= P(A) \cdot P(B') && = P(A) \cdot (1 - P(B)) \end{aligned}$$

και αρα A, B' ανεξάρτητα.

(β) (i) Είναι



$$N(\Omega) = \binom{2}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot 3! - \binom{3}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot 2! = 120$$

$$N(E) = \binom{2}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot 2! = 16$$

και έτσι

$$P(E) = \frac{16}{120} = \frac{2}{15}$$

$$P(Z) = 1 - P(Z') = 1 - P(\{\text{όλα τα ψηφία άρτιοι}\})$$

Είναι

$$N(Z') = \binom{1}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot 3! - \binom{2}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot 2! = 16 \Rightarrow P(Z') = \frac{16}{120} = \frac{2}{15} = P(E)$$

και αρα

$$P(Z) = 1 - \frac{2}{15} = \frac{13}{15}$$

Τέλος,

$$N(H) = 3 \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot 2! = 36$$

και αρα

$$P(H) = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$$

(ii) Θεωρούμε το ενδεχόμενο

$$\theta = \text{"ο αριθμός να αρχίζει από 9"}$$

Τότε $\theta \subseteq Z$ και αρα $P(\theta \cap Z) = P(\theta)$. Έχουμε

$$N(\theta) = \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot 2! = 12$$

και αρα $P(\theta) = \frac{12}{120} = \frac{1}{10}$. Έτσι,

$$P(\theta|Z) = \frac{P(\theta \cap Z)}{P(Z)} = \frac{P(\theta)}{P(Z)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{13}{15}} = \frac{3}{26}$$