

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

**ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ
[ΟΔΗΓΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ]**

ΣΧΟΛΙΚΗΣ ΧΡΟΝΙΑΣ 2017-2018

ΙΩΑΚΕΙΜ ΙΩΑΝΝΗΣ

<http://ioakimioannis.com>

Μέρος Α

1. Να βρείτε το

$$\int (3x^2 - \sin x + e^{2x} + \pi) dx$$

Λύση

Εκ της γραμμικότητας του αορίστου ολοκληρώματος,

$$\int (3x^2 - \sin x + e^{2x} + \pi) dx = \int 3x^2 dx - \int \sin x dx + \int e^{2x} dx + \pi \int dx = \frac{x^3}{3} + \eta \mu x + \frac{e^{2x}}{2} + \pi x + c$$

για κάποια (αυθαίρετη πραγματική) σταθερά c .

2. Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$$

(α) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου.

(β) Να γράψετε παραμετρικές εξισώσεις για τον πιο πάνω κύκλο.

Λύση

(α) Έχουμε

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2 - 4x + 4}_{(x-2)^2} - 4 + \underbrace{y^2 - 6y + 9}_{(y-3)^2} - 9 - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 25 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 5^2$$

και άρα το κέντρο του κύκλου είναι το $K(2,3)$ και η ακτίνα του $R = 5$

(β) παραμετρικές εξισώσεις για τον πιο πάνω κύκλο είναι οι

$$\begin{cases} x = x(t) = 5\sin(t) + 2 \\ y = y(t) = 5\eta\mu(t) + 3 \end{cases}, t \in [0, 2\pi)$$

3. Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$2019x^{2018} - 2018(\kappa + 1)x^{2017} + \kappa = 0$$

όπου $\kappa \in \mathbb{R}$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0,1)$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = x^{2019} - (\kappa + 1)x^{2018} + \kappa x$$

Η f είναι παραγωγίσιμη παντού (ως πολυωνυμική) άρα παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,1)$ και συνεχής στο $[0,1]$. Επίσης, $f(0) = f(1) = 0$. Άρα, πληρούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle $\Rightarrow$ υπάρχει $\xi \in (0,1)$ με $f'(\xi) = 0$. Αλλά, $f'(c) = 0 \Leftrightarrow 2019\xi^{2018} - 2018(\kappa + 1)\xi^{2017} + \kappa = 0$ και το ζητούμενο έπεται.

4. (α) Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

(β) Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ και $f(a) = c, c \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $f(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$.

Λύση

(α) Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού:



Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα (κλειστό) διάστημα $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο $[a, \beta] - \{a, \beta\} \equiv (a, \beta)$. Τότε, υπάρχει $c \in (a, \beta)$ τέτοιος ώστε

$$f'(c) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}.$$

Γεωμετρική ερμηνεία:

Το ΘΜΤ μας λέει ότι σε κάποιο σημείο στο διάστημα (a, β) ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής ισούται με το μέσο ρυθμό μεταβολής σε όλο το διάστημα. Δηλ. μεταξύ οποιονδήποτε δύο σημείων του γραφήματος μιας συνάρτησης συνεχούς σε ένα (κλειστό) διάστημα $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμης στο (a, β) υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο στο οποίο η εφαπτομένη στο σημείο αυτό είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία a και β .

(β) Έστωσαν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. Από το ΘΜΤ θα υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε

$$0 = f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

δηλ. $f(\beta) = f(\alpha)$ και αφού τα α, β είναι τυχόντα, έχουμε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση, δηλ. υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $f(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$. Αλλά, $f(\alpha) = c$ και άρα $c = c$, δηλ. $f(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$.

5. Αν A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με

$$3P(A') = P(A), \quad 2P(B) = 1 + P(A') \quad \text{και} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{2}$$

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες:

(α) $P(A \cup B)$ (β) $P(A|B)$ και (γ) $P(A \cap B')$

Λύση

$$(α) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Αλλά,

$$3P(A) = P(A) \Rightarrow 3(1 - P(A)) = P(A) \Rightarrow P(A) = \frac{3}{4}$$

και

$$P(A') = 1 - P(A) = \frac{1}{4}$$

Επίσης,

και

$$2P(B) = 1 + P(A') = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow P(B) = \frac{5}{8}$$

Συνεπώς,

$$P(A \cup B) = \frac{3}{4} + \frac{5}{8} - \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$$

(β) Είναι

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{8}} = \frac{4}{5}$$

(γ) Είναι

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(A')$$

6. Δίνεται η έλλειψη

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Να βρείτε την εξίσωση της χορδής της η οποία έχει μέσο το σημείο $A(1,2)$.



Λύση

Καταρχάς, το σημείο $A(1,2)$ βρίσκεται εντός της έλλειψης. Αν $B(x_B, y_B)$ και $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$ τα άκρα της χορδής αυτής, τότε

$$\frac{x_B + x_\Gamma}{2} = 1 \text{ και } \frac{y_B + y_\Gamma}{2} = 2$$

δηλ.

$$x_B + x_\Gamma = 2 \text{ και } y_B + y_\Gamma = 4 \quad (*)$$

Είναι

$$\lambda_{B\Gamma} = \frac{y_\Gamma - y_B}{x_\Gamma - x_B}$$

($x_\Gamma \neq x_B$ αφού η $B\Gamma$ δεν είναι κατακόρυφη, εφόσον το $A(1,2)$ δεν κείται πάνω στον άξονα των τετμημένων). Τώρα, αφού τα B και Γ ανήκουν στην έλλειψη, θα επαληθεύουν την εξίσωση αυτής, ήτοι:

$$\frac{x_B^2}{4} + \frac{y_B^2}{9} = 1 \text{ και } \frac{x_\Gamma^2}{4} + \frac{y_\Gamma^2}{9} = 1$$

δηλ.

$$9x_B^2 + 4y_B^2 = 36 \text{ και } 9x_\Gamma^2 + 4y_\Gamma^2 = 36$$

και αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε

$$9(x_B^2 - x_\Gamma^2) + 4(y_B^2 - y_\Gamma^2) = 0$$

δηλ.

$$9(x_B - x_\Gamma)(x_B + x_\Gamma) = -4(y_B - y_\Gamma)(y_B + y_\Gamma)$$

δηλ. (χρησιμοποιώντας την $(*)$)

$$18(x_B - x_\Gamma) = -16(y_B - y_\Gamma)$$

και αρα

$$\lambda_{B\Gamma} = \frac{y_\Gamma - y_B}{x_\Gamma - x_B} = -\frac{18}{16} = -\frac{9}{8}$$

Συνεπώς, η εξίσωση της χορδής της έλλειψης η οποία έχει μέσο το σημείο $A(1,2)$ είναι η

$$y - 2 = -\frac{9}{8}(x - 1)$$

δηλ. η

$$8y + 9x - 25 = 0$$

7. Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{5x}{(x^2 + 4)(x + 1)} dx$$

Λύση

Είναι ($x \neq -1$)

$$\frac{5x}{(x^2 + 4)(x + 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 4} + \frac{\Gamma}{x + 1}$$

Κατά τα γνωστά, ευρίσκουμε ότι $A = 1, B = 4, \Gamma = -1$, ήτοι

$$\frac{5x}{(x^2 + 4)(x + 1)} = \frac{x + 4}{x^2 + 4} - \frac{1}{x + 1}$$

και αρα

$$\int \frac{5x}{(x^2 + 4)(x + 1)} dx = \int \frac{x + 4}{x^2 + 4} dx - \int \frac{dx}{x + 1}$$

Είναι

$$\int \frac{x + 4}{x^2 + 4} dx = \int \frac{x}{x^2 + 4} dx + 4 \int \frac{dx}{x^2 + 4} = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 4} dx + \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 4)}{x^2 + 4} + 2 \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + 2 \operatorname{τοξεφ}\left(\frac{x}{2}\right) + c_1$$

και

$$\int \frac{dx}{x+1} = \ln|x+1| + c_2$$

Συνεπώς,

$$\int \frac{5x}{(x^2 + 4)(x + 1)} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + 2 \operatorname{τοξεφ}\left(\frac{x}{2}\right) - \ln|x+1| + c$$

όπου c αυθαίρετη πραγματική σταθερά.

8. Αν ισχύει

$$\int_0^\alpha 2xe^x dx = 4e^\alpha + \int_\alpha^0 x^2 e^x dx, \alpha > 0,$$

να υπολογίσετε την τιμή του α .

Λύση

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha 2xe^x dx = 4e^\alpha + \int_\alpha^0 x^2 e^x dx &\Leftrightarrow \int_0^\alpha 2xe^x dx - \int_\alpha^0 x^2 e^x dx = 4e^\alpha \Leftrightarrow \int_0^\alpha 2xe^x dx + \int_0^\alpha x^2 e^x dx = 4e^\alpha \\ &\Leftrightarrow \int_0^\alpha (2xe^x + x^2 e^x) dx = 4e^\alpha \Leftrightarrow \int_0^\alpha (x^2 e^x)' dx = 4e^\alpha \\ &\Leftrightarrow [x^2 e^x]_0^\alpha = 4e^\alpha \end{aligned}$$

αφού $\alpha > 0$.

$$\Leftrightarrow \alpha^2 e^\alpha = 4e^\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 = 4 \Leftrightarrow \alpha = 2$$

9. Να βρείτε πόσοι από τους εννιάψήφιους αριθμούς που σχηματίζονται χρησιμοποιώντας τους φυσικούς αριθμούς 123456789 χωρίς επανάληψη, έχουν το 2 πριν από το 3 και το 8 πριν από το 9 (π.χ. ο 145862973 είναι ένας τέτοιος αριθμός).

Λύση

Το 2 μπορεί να τοποθετηθεί στην 1η, 2η, ..., 8η θέση οπότε το 3 μπορεί να τοποθετηθεί σε 8, 7, ..., 1 θέσεις, άρα τα 2 και 3 μπορούν να τοποθετηθούν με $(8+7+6+\dots+1) = 36$ τρόπους. Το 8, κατά συνέπεια μπορεί να τοποθετηθεί σε $9-2-1=6$ θέσεις και άρα τα 8 και 9 μπορούν να τοποθετηθούν με $6+5+\dots+1=21$ τρόπους και τα υπόλοιπα 5 ψηφία με 5! τρόπους. Άρα συνολικά (πολλαπλασιαστική αρχή) μπορούμε να σχηματίσουμε $\mu 36 \cdot 21 \cdot 5! = 90270$ αριθμούς.

10. Δίνεται συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = 1 - \frac{x}{x^2 + \alpha}$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι αν η συνάρτηση f έχει τοπικά ακρότατα, τότε δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Λύση

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f έχει τοπικά ακρότατα. Αν $\alpha = 0$, τότε $D(f) = \mathbb{R}_*$ και

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

Αφού



$$f'(x) = \frac{1}{x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_*$$

τότε $f'(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}_*$, άτοπο από το Θεώρημα του Fermat.

Αν $\alpha > 0$, τότε $D(f) = \mathbb{R}$. Έτσι, για κάθε $x \in D(f) = \mathbb{R}$, τα όρια $\lim_{x \rightarrow \alpha^-} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$ είναι πεπερασμένα. Έτσι, δεν μπορεί να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Αν $\alpha < 0$, τότε $D(f) = \mathbb{R} - \{\pm\sqrt{|\alpha|}\}$, η f είναι παραγωγίσιμη στο $D(f)$ και παρουσιάζει ρίζα τάξης $1 \pm\sqrt{|\alpha|}$. Είναι για $x \in \mathbb{R} - \{\pm\sqrt{|\alpha|}\}$

$$f'(x) = \frac{\alpha - x^2}{(x^2 + \alpha)^2}$$

Τότε από το Θεώρημα του Fermat, θα πρέπει $f'(x) = 0$, δηλ. πρέπει να έχει λύση η εξίσωση $\alpha - x^2 = 0$, δηλ. πρέπει $\alpha > 0$, άτοπο.

Σημείωση: για το αντίστροφο, δηλ. το ότι

αν η συνάρτηση f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη, τότε έχει τοπικά ακρότατα έχουμε: Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Αν $\alpha = 0$, τότε $D(f) = \mathbb{R}_*$ και

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

δηλ. η συνάρτηση έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη, τον άξονα των τεταγμένων, άτοπο.

Αν $\alpha > 0$, τότε $D(f) = \mathbb{R}$. Έτσι, για κάθε $x \in D(f) = \mathbb{R}$ έχουμε $x^2 + \alpha \neq 0$ και άρα η συνάρτηση δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Αν $\alpha < 0$, τότε $D(f) = \mathbb{R} - \{\pm\sqrt{|\alpha|}\}$, η f είναι παραγωγίσιμη στο $D(f)$ και παρουσιάζει ρίζα τάξης $1 \pm\sqrt{|\alpha|}$. Είναι για $x \in \mathbb{R} - \{\pm\sqrt{|\alpha|}\}$

$$f'(x) = \frac{\alpha - x^2}{(x^2 + \alpha)^2}$$

και άρα $\alpha - x^2 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} - \{\pm\sqrt{|\alpha|}\}$. Κατα συνέπεια, $f'(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} - \{\pm\sqrt{|\alpha|}\}$ και το αποτέλεσμα έπεται από το Θεώρημα του Fermat.

Μέρος Β

[Άσκηση 1] Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = (x + 2)e^{-x}.$$

Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού της, τα σημεία τομής με τους άξονες, τα διαστήματα μονοτονίας, τα ακρότατα και τις ασύμπτωτές της, να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

Λύση

Η συνάρτηση f γράφεται ως $h \cdot g$ όπου h και g οι συναρτήσεις με τύπους $h(x) = x + 2$ και $g(x) = e^{-x}$ αντίστοιχα. Κατα συνέπεια,

$$D(f) = D(g) \cap D(h)$$

Αλλά, $D(g) = \mathbb{R} = D(h)$ και άρα $D(f) = \mathbb{R}$

Σημεία τομής με τους άξονες

Αφού $e^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι $f(x) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$. Επίσης, $f(0) = 2$. Έτσι, τα σημεία τομής με τους άξονες είναι τα $(0, 2)$ και $(-2, 0)$.

Εύρεση διαστημάτων μονοτονίας+ακρότατα

Η f είναι συνεχής συνάρτηση και ιδιαίτερα παντού παραγωγίσιμη με

$$\frac{dy}{dx} = -(x + 1)e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Τα κρίσιμα σημεία είναι τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία $f'(x) = 0$, δηλ. το σημείο με $x = -1$. Επίσης

$$\frac{d^2y}{dx^2} \equiv f''(x) = xe^{-x}$$

και άρα $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Έτσι,

- $\forall x \in (-\infty, 0)$ είναι $f''(x) < 0$ (άρα στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω) και $\forall x \in (0, +\infty)$ είναι $f''(x) > 0$ (άρα στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω) και άρα, αφού $f''(0) = 0$, η συνάρτηση θα έχει σημείο καμπής το $(0, 0)$.
- Αφού $f''(-1) = -e < 0$, από το κριτήριο δευτέρας παραγώγου, η συνάρτηση θα έχει Τοπικό Μέγιστο στο σημείο $(-1, f(-1)) = (-1, e)$. Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει και από το κριτήριο πρώτης παραγώγου:
 $\forall x \in (-\infty, -1)$ είναι $f'(x) > 0$ και $\forall x \in (-1, 0)$ είναι $f'(x) < 0$ και αφού $f'(-1) = 0$ η συνάρτηση θα έχει Τοπικό Μέγιστο στο σημείο $(-1, e)$.

Έλεγχος Κυρτότητας

Έχουμε $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} \equiv f''(x) = xe^{-x}$$

και άρα $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Έτσι,

$\forall x \in (-\infty, 0)$ είναι $f''(x) < 0$ (άρα στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω) και $\forall x \in (0, +\infty)$ είναι $f''(x) > 0$ (άρα στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω) και άρα, αφού $f''(0) = 0$, από γνωστό μας Θεώρημα, η συνάρτηση θα έχει σημείο καμπής το $(0, (0)) = (0, 2)$.

Εύρεση ασυμπτώτων

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2}{e^x}$$

το οποίο αποτελεί απροσδιοριστία τύπου $\frac{+\infty}{+\infty}$ αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ και άρα, εφαρμόζοντας τον κανόνα του De L'Hospital,



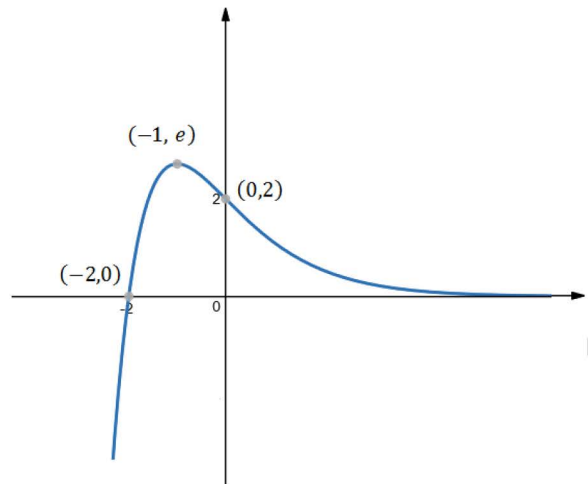
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Έτσι, ο άξονας των τετμημένων είναι οριζόντια ασύμπτωτή της. Τώρα,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+2)e^{-x} \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+2) \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} \right) \end{aligned}$$

$$= (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$$

Σημείωση: το (μοναδικό) σημείο τοπικού μεγίστου είναι και σημείο ολικού μεγίστου για το γράφημα της συνάρτησης.



[Άσκηση 2]

Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4ax$, $a > 0$ και τυχαίο σημείο της $P(ap^2, 2ap)$, $p > 0$. Η εφαπτομένη και η κάθετη της καμπύλης στο σημείο P τέμνουν τον άξονα των τεταγμένων στα σημεία A και B αντίστοιχα. Από το σημείο P φέρουμε ευθεία PG κάθετη στον άξονα των τετμημένων (G το ίχνος της κάθετης). Να βρείτε:

(α) την τιμή του p ώστε το (τετράπλευρο) $PBA\Gamma$ να είναι παραλληλόγραμμο.

(β) Την εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο Γεωμετρικός Τόπος του κέντρου βάρους (σημείο τομής των διαμέσων) του τριγώνου $AB\Gamma$.

Λύση

$$(α) y^2 = 4ax \Leftrightarrow (y = 2\sqrt{ax}) \vee (y = -2\sqrt{ax})$$

Αφού $p > 0$, έπεται ότι το σημείο $P(ap^2, 2ap)$ ευρίσκεται πάνω στον κλάδο της παραβολής ο οποίος έχει εξίσωση $y = 2\sqrt{ax}$.

Εύρεση της εξίσωσης της εφαπτομένης στο σημείο $P(ap^2, 2ap)$

Παραγωγίζοντας πεπλεγμένα την εξίσωση της καμπύλης, έχουμε

$$2y \frac{dy}{dx} = 4a \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y} \quad (y \neq 0)$$

και αρα $y(ap^2) = \frac{2a}{2ap} = \frac{1}{p}$. Έτσι, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο αυτό είναι η

$$y - 2ap = \frac{1}{p}(x - ap^2)$$

Θέτοντας στην εξίσωση της εφαπτομένης $x = 0$, βρίσκουμε το σημείο $A: A(0, ap)$

Εύρεση της εξίσωσης της καθέτου στο σημείο $P(ap^2, 2ap)$

Είναι $\lambda_{καθ.} \cdot \lambda_{εφ.} = -1$ και αρα $\lambda_{καθ.} = -p$. Έτσι, η εξίσωση της καθέτου στο σημείο αυτό είναι η

$$y - 2ap = -p(x - ap^2)$$

Θέτοντας στην εξίσωση της καθέτου $x = 0$, βρίσκουμε το σημείο $B: B(0, 2ap + ap^3)$. Παρατηρούμε ότι το σημείο Γ ανήκει πάνω στην ευθεία με εξίσωση $x = ap^2$ και στον άξονα των τετμημένων, άρα $\Gamma(ap^2, 0)$. Προφανώς $AB \parallel P\Gamma$ και αρα αρκεί $PB \parallel A\Gamma$. Αλλά,

$$\begin{aligned} PB \parallel A\Gamma &\Leftrightarrow \lambda_{PB} = \lambda_{A\Gamma} &\Leftrightarrow \frac{ap^3}{-ap^2} = \frac{ap}{-ap^2} &\Leftrightarrow \rho^3 = \rho &\Leftrightarrow \rho^3 - \rho = 0 \\ &&\Leftrightarrow \rho(\rho + 1)(\rho - 1) &\Leftrightarrow \rho = 1 &(\text{αφού } \rho > 0) \end{aligned}$$

(β) Έστω $M \equiv M(x_M(\alpha, \rho), y_M(\alpha, \rho))$ οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους του τριγώνου $AB\Gamma$. Είναι

$$x_M(\alpha, \rho) = \frac{x_A(\alpha, \rho) + x_B(\alpha, \rho) + x_\Gamma(\alpha, \rho)}{3} = \frac{1}{3}a\rho^2 \Leftrightarrow a\rho^2 = 3x_M(\alpha, \rho)$$

και

$$y_M(\alpha, \rho) = \frac{y_A(\alpha, \rho) + y_B(\alpha, \rho) + y_\Gamma(\alpha, \rho)}{3} = \frac{a\rho^3 + 3a\rho}{3} = \rho \frac{a\rho^2 + 3}{3} \Leftrightarrow y_M(\alpha, \rho) = \rho \frac{3x_M(\alpha, \rho) + 3}{3} = \rho x_M(\alpha, \rho) + \rho$$

δηλ.

$$y_M(\alpha, \rho) - \rho x_M(\alpha, \rho) = \rho.$$

[Άσκηση 3]

Μια εταιρεία εμφιαλώνει νερό και στο εσωτερικό του πώματος κάθε φιάλης αναγράφει τυχαία ένα από τα γράμματα A, B και Γ έτσι ώστε όλα τα γράμματα να έχουν την ίδια πιθανότητα να αναγραφούν. Όταν κάποιος συμπληρώσει και τα τρία γράμματα κερδίζει μια φιάλη νερού από την εταιρεία αυτή. Να βρείτε την πιθανότητα, κάποιος που αγόρασε μια εξάδα νερού από την εταιρεία αυτή

(α) να μην έχει συμπληρώσει και τα τρία γράμματα

(β) να έχει κερδίσει δυο φιάλες νερού.

Λύση

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

A = να αναγράφεται το γράμμα A

B = να αναγράφεται το γράμμα B

Γ = να αναγράφεται το γράμμα Γ

Ο δειγματικός χώρος του πειράματος έχει πληθάριθμο ίσο με 3^6 (3 γράμματα, 6 φιάλες)

Έχουμε

$$N(A \cup B) = 2^6, \quad N(A \cup \Gamma) = 2^6, \quad N(B \cup \Gamma) = 2^6$$

(α) Αν από το άθροισμα των 3 πιο πάνω αφαιρέσουμε το 3 (1 εξάδα με 3 A , ή 3 B , ή 3 Γ), τότε ο πληθάριθμος του ενδεχομένου

Δ = να μην έχει συμπληρώσει και τα τρία γράμματα

είναι $N(\Delta) = 3 \cdot 2^6 - 3 = 3 \cdot (2^6 - 1) = 189$ και αρα

$$P(\Delta) = \frac{N(\Delta)}{3^6} = \frac{189}{3^6}$$

(β) Ο πληθάριθμος του ενδεχομένου να έχει κερδίσει δυο φιάλες νερού

E = να έχει κερδίσει δυο φιάλες νερού

είναι να έχει βρεί ακριβώς $2A$, ακριβώς $2B$ και , ακριβώς 2Γ . Άρα

$$N(E) = \frac{6!}{2! 2! 2!} = 90$$

Έτσι,

$$P(E) = \frac{N(E)}{3^6} = \frac{90}{3^6}$$

[Άσκηση 4]

Δίνεται η καμπύλη K με εξίσωση $y = -x^2 + a^2$, $x \in \mathbb{R}$, όπου $0 < a \leq 2$ η οποία τέμνει τον άξονα των τετμημένων σε δύο σημεία. Το χωρίο E_1 περικλείεται από την καμπύλη K και τους θετικούς ημιάξονες, ενώ το χωρίο E_2 περικλείεται μεταξύ της καμπύλης K , το θετικό ημιάξονα $0x$ και την ευθεία $x = 2$.

(α) Να βρείτε την τιμή του a ώστε το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων E_1 και E_2 να είναι το ελάχιστο δυνατό.

(β) Αν $a = 2$, να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία $y = 2$ του χωρίου που ευρίσκεται μεταξύ της καμπύλης K και της ευθείας $y = 3$.

Λύση

Η Καμπύλη K αναπαριστά παραβολή με κορυφή το σημείο $A(0, a^2)$ στο οποίο λαμβάνει μέγιστο. Είναι δε $0 < a \leq 2 \Rightarrow 0 < a^2 \leq 4$. Επίσης, αφού $-x^2 + a^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow (a - x)(a + x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm a$, τα σημεία τομής της καμπύλης με τον άξονα των τετμημένων xx' είναι τα $(a, 0)$ και $(-a, 0)$. Ιδιαίτερα, $0 < a \leq 2 \Rightarrow -2 \leq -a < 0$. Έχουμε

$$E_1(a) = \int_0^a y \, dx = \int_0^a (a^2 - x^2) \, dx = \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a = a^3 - \frac{a^3}{3} = 2\frac{a^3}{3}$$

και

$$\begin{aligned} E_2(a) &= - \int_a^2 y \, dx = \int_a^2 (x^2 - a^2) \, dx = \left[\frac{x^3}{3} - a^2 x \right]_a^2 \\ &= \frac{8}{3} - 2a^2 - \frac{a^3}{3} + a^3 = 2\frac{a^3}{3} - 2a^2 + \frac{8}{3} = E_1(a) - 2a^2 + \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Έτσι,

$$E_1(a) + E_2(a) = 4\frac{a^3}{3} - 2a^2 + \frac{8}{3}$$

Θεωρώντας τη συνάρτηση $a \mapsto E(a) = 4\frac{a^3}{3} - 2a^2 + \frac{8}{3}$, $0 < a \leq 2$ έχουμε ότι αυτή είναι παραγωγίσιμη και μάλιστα

$$E'(a) = 4a^2 - 4a = 4a(a - 1)$$

Τα κρίσιμά της σημεία είναι αυτά στα οποία $E'(a) = 0$, δηλ. το $a = 1$. Παρατηρούμε ότι

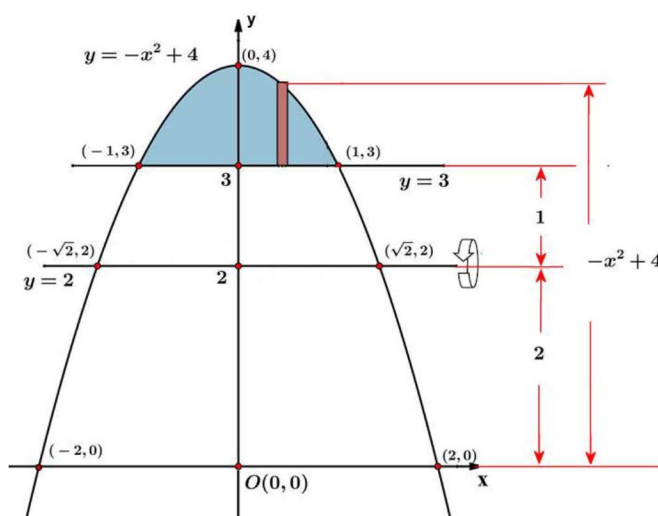
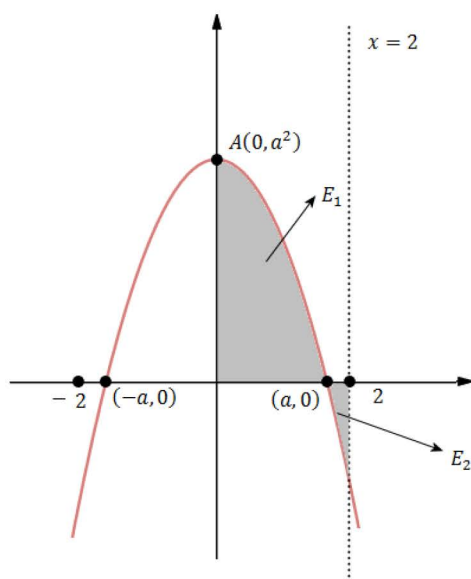
για $0 < a < 1$ είναι $E' < 0$ και αρα η E γνησίως

φθίνουσα ενώ για $1 < a < 2$ $E' > 0$ και αρα η E γνησίως αύξουσα και αρα η συνάρτηση λαμβάνει τοπικό ελάχιστο στο $(1, E(1)) = (1, 2)$. Αλλά, αφού η $a \mapsto E(a)$ είναι συνεχής και $E(2) = \frac{16}{3} > 2$, έπεται ότι για $a = 1$ αυτή λαμβάνει ΟΛΙΚΟ ελάχιστο.

a	0	1	2
E'	—	—	+
E	↘		↗

(β) Αν $a = 2$, τότε η καμπύλη K έχει εξίσωση $y = 4 - x^2$, $x \in \mathbb{R}$, η οποία αναπαριστά παραβολή με κορυφή το σημείο $A(0, 4)$ στο οποίο λαμβάνει μέγιστο και τέμνει τον άξονα των τετμημένων στα σημεία $(2, 0)$ και $(-2, 0)$. Καταρχάς, $3 = 4 - x^2 \Leftrightarrow x = \pm 1$ και $4 - x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$. Έχουμε Εσωτερική ακτίνα $\rho_1 = (4 - x^2) - (3 - 1) = -x^2 + 2$, Εξωτερική ακτίνα $\rho_2 = 3 - 2 = 1$ και αρα (λόγω συμμετρίας)

$$V = 2\pi \int_0^1 ((-x^2 + 2)^2 - 1^2) \, dx = \dots = \frac{56}{3}\pi \quad \text{κ. μ.}$$



[Άσκηση 5]

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g οι οποίες είναι συνεχείς στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Η συνάρτηση f είναι άρτια και για τη συνάρτηση g δίνεται ότι $g(x) + g(-x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

(α) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = -x$, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να δείξετε ότι

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)g(x) dx = \int_0^{\alpha} f(x) dx, \text{ όπου } \alpha > 0.$$

(β) Να υπολογίσετε το

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{e^{2x} + 1} dx.$$

Λύση

(α) Θεωρούμε το μετασχηματισμό

$$u: [-\alpha, \alpha] \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } u(x) = -x$$

ο οποίος είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού του και μάλιστα γνησίως φθίνουσα συνάρτηση ($\frac{du}{dx} = -1 < 0, \forall x \in [-\alpha, \alpha]$). Επίσης, η fg είναι συνεχής άρα έχει νόημα το $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)g(x) dx$ και αφού $g(x) + g(-x) = 1 \Rightarrow g(-x) = 1 - g(x), \forall x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)g(x) dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} [f(x)(1 - g(-x))] dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx - \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)g(-x) dx$$

Είναι

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = \int_{-\alpha}^0 f(x) dx + \int_0^{\alpha} f(x) dx$$

και

$$\int_{-\alpha}^0 f(x) dx = - \int_{u(-\alpha)}^{u(0)} f(-u) du = - \int_{\alpha}^0 f(-u) du = \int_0^{\alpha} f(-u) du = \int_0^{\alpha} f(u) du$$

αφού η f άρτια (και άρα $f(-x) = f(x), \forall x \in [-\alpha, \alpha]$). Συνεπώς,

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 2 \int_0^{\alpha} f(x) dx$$

Τώρα,



$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)g(-x) dx = - \int_{u(-\alpha)}^{u(\alpha)} f(-u)g(u) du = - \int_{\alpha}^{-\alpha} f(-u)g(u) du = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(u)g(u) du \equiv \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)g(x) dx$$

Έτσι,

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)g(x) dx = 2 \int_0^{\alpha} f(x) dx - \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)g(x) dx$$

και άρα

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)g(x) dx = \int_0^{\alpha} f(x) dx$$

(β) Θα εφαρμόσουμε το προηγούμενο για f και g τις συναρτήσεις με τύπους

$$f(x) = \sin x \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{1}{e^{2x} + 1}$$

αντίστοιχα. Η συνάρτηση g έχει π.ο. το $\mathbb{R}$ και μάλιστα

$$\begin{aligned} g(x) + g(-x) &= \frac{1}{e^{2x} + 1} + \frac{1}{e^{-2x} + 1} = \frac{1}{e^{2x} + 1} + \frac{1}{\frac{1}{e^{2x}} + 1} = \frac{1}{e^{2x} + 1} + \frac{1}{\frac{1 + e^{2x}}{e^{2x}}} = \frac{1}{e^{2x} + 1} + \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} \\ &= \frac{1 + e^{2x}}{e^{2x} + 1} = 1, \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

και οι δυο συναρτήσεις είναι συνεχείς σε ολό το $\mathbb{R}$. Έτσι, από το προηγούμενο ερώτημα για $\alpha = \frac{\pi}{2}$,

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \frac{1}{e^{2x} + 1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$