

ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ #2

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
[ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ]**

ΣΧΟΛΙΚΗΣ ΧΡΟΝΙΑΣ 2018-2019

ΙΩΑΚΕΙΜ ΙΩΑΝΝΗΣ

<http://ioakimioannis.com>

Μέρος Α

1. Αν $\alpha = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2(1 - \sin x)}$, να υπολογίσετε το

$$\int_0^{\alpha} (x^2 + e^{5x}) dx$$

2. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x + 2y = c$, όπου c σταθερά.

(α) Να βρείτε την **ελάχιστη** ακέραια τιμή της σταθεράς c για την οποία η πιο πάνω εξίσωση αναπαριστά κύκλο. Για την τιμή αυτή να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου που προκύπτει.

(β) Να γράψετε την παραμετρική εξίσωση του κύκλου που προκύπτει στο πιο πάνω ερώτημα.

3. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $3\alpha x^2 + 2\beta x = \alpha + \beta$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0, 1)$.

4. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 - 2x - 5, x \in [-2, 3]$. Να βρεθούν τα ακρότατα (τοπικά και ολικά) της συνάρτησης και να χαρακτηριστεί το είδος τους. Επίσης, να δείξετε ότι επαληθεύεται το Θεώρημα Μέσης τιμής στο εν λόγω διάστημα, να ευρεθεί το σημείο που ικανοποιεί το Θεώρημα αυτό και να δωθεί Γεωμετρική ερμηνεία αυτού.

5. Αν A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με

$$2P(A') = P(A)$$

$$6P(B) = 1 + P(A')$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{9},$$

να υπολογίσετε τις πιθανότητες:

(α) $P(A \cup B)$, (β) $P(A|B)$ και (γ) $P(A \cap B')$

6. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 8x$ και τα σημεία $A(2t^2, 4t)$ και $B(2\rho^2, 4\rho)$ αυτής ($t \neq \rho$). Αν η χορδή AB περνά από το σημείο $\Gamma(5, 2)$.

(α) να δείξετε ότι: $2t\rho + 5 = t + \rho$

(β) να βρείτε την εξίσωση του σχήματος στο οποίο ανήκει ο Γ .Τ. του μέσου της χορδής.

7. Να βρείτε μια συνάρτηση $f: \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή πρώτη παράγωγο για την οποία $f(0) = 0$ και η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1} + e^x \cdot \eta \mu x$$

8. Αν $\alpha > 1$ και

$$\alpha^2 \int_{-\alpha}^{-1} \frac{1}{x^3} dx = \frac{9\alpha^2}{8} - \int_{\alpha}^{\alpha^2} x dx$$

να υπολογίσετε την τιμή του α .

9. Οι καμπύλες $y = 3\eta \mu x$, $y = 4\sigma \nu \nu x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) τέμνονται στο σημείο A και συναντούν τον άξονα των x στα O και B αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μικτόγραμμου χωρίου OAB

10. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$. Η εφαπτομένη της στο σημείο $P(1, 2)$ τέμνει τον άξονα των y στο σημείο A . Αν O είναι η αρχή των αξόνων, να υπολογίσετε:

(α) το εμβαδόν του μικτόγραμμου χωρίου OPA

(β) τον όγκο του στερεού που παράγει το μικτόγραμμο χωρίο OPA , όταν περιστραφεί γύρω από τον άξονα Oy .



Λύσεις

1. Είναι

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2(1 - \sin x)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \sin x}$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x) = 1 - 1 = 0$$

και άρα το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \sin x}$ αποτελεί απροσδιοριστία τύπου $\frac{0}{0}$. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2)'}{(1 - \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\eta\mu x}$$

το οποίο αποτελεί απροσδιοριστία τύπου $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x)'}{(\eta\mu x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sin x} = \frac{2}{\sin 0} = 2$$

Συνεπώς, από τον κανόνα του L'Hôpital:

$$2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2)''}{(1 - \sin x)''} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2)'}{(1 - \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \sin x}$$

Συνεπώς, $\alpha = 1$ και

$$\int_0^1 (x^2 + e^{5x}) dx = \int_0^1 (x^2 + e^{5x}) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{1}{5} e^{5x} \right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{e^5}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15} + \frac{e^5}{5}$$

2. (α) 1ος τρόπος

Είναι $a = -4, b = 2, c = -c$. Έχουμε $a^2 + b^2 - 4c = 16 + 4 - 4(-c) = 20 + 4c$ και άρα η εξίσωση αυτή εκφράζει κύκλο αν $20 + 4c > 0$ δηλ. ισοδύναμα αν $c > -5$. Έτσι, η ελάχιστη ακέραια τιμή της σταθεράς c για την οποία η πιο πάνω εξίσωση αναπαριστά κύκλο είναι η $c = -4$. Ο δε κύκλος (για $c = -4$) έχει κέντρο το σημείο $K\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) \equiv K(2, -1)$ και ακτίνα

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{4} = 1$$

2ος τρόπος

Είναι

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4x + 2y - c &= 0 & \Leftrightarrow & (x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) - c - 5 = 0 \\ & & \Leftrightarrow & (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = c + 5 \end{aligned}$$

και άρα, για να εκφράζει κύκλο, θα πρέπει $c > -5$. με κέντρο το σημείο $K(2, -1)$ και ακτίνα $R = \sqrt{c + 5}$.

Έτσι, η ελάχιστη ακέραια τιμή της σταθεράς c για την οποία η πιο πάνω εξίσωση αναπαριστά κύκλο είναι η $c = -4$. Ο δε κύκλος (για $c = -4$) έχει κέντρο το σημείο $K(2, -1)$ και ακτίνα $R = \sqrt{-4 + 5} = \sqrt{1} = 1$.

(β) Παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου αυτού: $\begin{cases} x = x(t) = \sin(t) + 2 \\ y = y(t) = \eta\mu(t) - 1 \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$

3. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = ax^3 + \beta x^2 - (a + \beta)x$. Είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, 1)$ και $f(0) = 0 = f(1)$. Συνεπώς από το Θεώρημα του Rolle, θα έχουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας $c \in (0, 1)$ τέτοιος ώστε $0 = f'(c)$. Αλλά,

$$f'(c) = 0 \Leftrightarrow 3ac^2 + 2\beta c - (a + \beta) = 0 \Leftrightarrow 3ac^2 + 2\beta c = a + \beta$$



και το ζητούμενο έπεται.

4. Είναι $f(x) = (x-1)^2 - 6$, $x \in [-2,3]$ και αρα το γράφημα της συνάρτησης εκφράζει παραβολή με κορυφή στο σημείο $(1, -6)$ στο οποίο λαμβάνει τοπικό μέγιστο.. Επίσης, $f(-2) = 3$ και $f(3) = -2$. Έτσι, αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής, το ολικό της μέγιστο είναι το 3 ενώ το ολικό της ελάχιστο το -6 (και τοπικό μέγιστο το -2).

Σημείωση: Το σημείο $(1, -6)$ είναι και σημείο ολικού ελαχίστου αφού η συνάρτηση είναι κυρτή. Η f είναι συνεχής στο $[-2,3]$ και παραγωγίσιμη στο $(-2,3)$ ως πολυωνυμική. Έτσι, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού, θα υπάρχει $c \in (-2,3)$ τέτοιος ώστε

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(-2)}{3 - (-2)}$$

δηλ. $f'(c) = -1$. Έχουμε

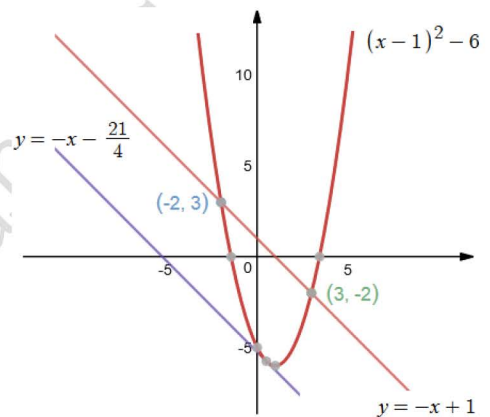
$$f'(c) = -1 \Leftrightarrow 2c - 2 = -1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$$

Γεωμετρική ερμηνεία

Στο σημείο $c = \frac{1}{2} \in (-2,3)$, ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής ισούται με το μέσο ρυθμό μεταβολής σε όλο το διάστημα $(-2,3)$. Δηλ. στο οποίο η εφαπτομένη στο σημείο αυτό είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία -2 και 3.

Σημείωση: Είναι $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -1$ και $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{23}{4}$ και η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $\left(\frac{1}{2}, -\frac{23}{4}\right)$

είναι η $y = -x - \frac{21}{4}$ και η οποία είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία -2 και 3 και το οποίο έχει εξίσωση $y = -x + 1$.



5. (α) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Αλλά,

$$2P(A') = P(A) \Rightarrow 2(1 - P(A)) = P(A) \Rightarrow P(A) = \frac{2}{3}$$

$$\text{και } P(A') = 1 - P(A) = \frac{1}{3}$$

και

$$6P(B) = 1 + P(A') = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow P(B) = \frac{2}{9}$$

Συνεπώς,

$$P(A \cup B) = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} - \frac{1}{9} = \frac{2}{3} + \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$$

(β) Είναι

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{2}{9}} = \frac{1}{2}$$

(γ) Είναι

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

6. (α) Βρίσκουμε την εξίσωση της ευθείας AB :

$$\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2}{t + \rho}$$

και αρα

$$(AB): y - y_B = \lambda_{AB}(x - x_B) \Leftrightarrow (AB): y - 4\rho = \frac{2}{t + \rho}(x - 2\rho^2) \Leftrightarrow (AB): (t + \rho)y - 2x - 4\rho t = 0$$



Αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες του σημείου $\Gamma(5,2)$ στην εξίσωση αυτή, προκύπτει το ζητούμενο.

(β) Έχουμε:

$$x_M = x = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{x_A + x_B}{2} = t^2 + \rho^2$$

και

$$y_M = y = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{y_A + y_B}{2} = 2(t + \rho)$$

Έτσι,

$$\begin{cases} y = 2(t + \rho) \\ x = t^2 + \rho^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 4(t + \rho)^2 = 4(t^2 + \rho^2 + 2t\rho) \\ x = t^2 + \rho^2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{y^2}{4} = x + 2t\rho$$

Αλλά, είδαμε ότι $2t\rho + 5 = t + \rho$, δηλ. $2t\rho = (t + \rho) - 5 = \frac{y}{2} - 5$ και από τις 2 αυτές εξισώσεις, λαμβάνουμε ότι η εξίσωση του σχήματος στο οποίο ανήκει ο Γ.Τ. του μέσου της χορδής είναι η

$$\frac{y^2}{4} = x + \frac{y}{2} - 5$$

7. $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right],$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1} - e^x \cdot \eta\mu x \Leftrightarrow \int f'(x) dx = \int \frac{dx}{x^2 + x + 1} - \int e^x \cdot \eta\mu x dx$$

Αλλά,

$$\int \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

το οποίο υπολογίζεται θέτοντας

$$u = \frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}(2x + 1)$$

$$\int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctan} \left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x + 1) \right) + c_1$$

και

$$\begin{aligned} I = \int e^x \cdot \eta\mu x dx &= \int \eta\mu x \cdot (e^x)' dx = \eta\mu x \cdot e^x - \int e^x \cdot (\eta\mu x)' dx \\ &= \eta\mu x \cdot e^x - \int e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x dx = \eta\mu x \cdot e^x - \int (e^x)' \cdot \sigma\upsilon\nu x dx \\ &= \eta\mu x \cdot e^x - \left(e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \int e^x \cdot (\sigma\upsilon\nu x)' dx \right) \\ &= \eta\mu x \cdot e^x - e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \int e^x \cdot \eta\mu x dx \\ &= e^x \cdot (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) - I \end{aligned}$$

και αρα

$$I = \frac{e^x}{2} \cdot (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) + c_2$$

Συνεπώς,

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}(2x + 1) + \frac{e^x}{2} \cdot (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) + c, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

Χρησιμοποιώντας την (αρχική) συνθήκη $f(0) = 0$, έχουμε ότι



$$c = \frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$$

οπότε

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}(2x+1) + \frac{e^x}{2} \cdot (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) + \frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{9}, x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$$

8. Καταρχάς, (ουσιαστικά θεωρώντας το μετασχηματισμό $y = \frac{x}{\alpha}$) είναι¹

$$\int_{\alpha}^{\alpha^2} x \, dx = \alpha \int_{\frac{\alpha}{\alpha}}^{\frac{\alpha^2}{\alpha}} \alpha y \, dy = \alpha^2 \int_1^{\alpha} y \, dy \equiv \alpha^2 \int_1^{\alpha} x \, dx$$

και (ουσιαστικά θεωρώντας το μετασχηματισμό $y = -x$)

$$\int_{-\alpha}^{-1} \frac{1}{x^3} \, dx = \int_{\alpha}^1 \frac{1}{x^3} \, dx = - \int_1^{\alpha} \frac{1}{x^3} \, dx$$

και αρα

$$\begin{aligned} \alpha^2 \int_{-\alpha}^{-1} \frac{1}{x^3} \, dx &= \frac{9\alpha^2}{8} + \int_{\alpha}^{\alpha^2} x \, dx \Leftrightarrow -\alpha^2 \int_1^{\alpha} \frac{1}{x^3} \, dx = \frac{9\alpha^2}{8} - \alpha^2 \int_1^{\alpha} x \, dx \\ \Leftrightarrow \int_1^{\alpha} x \, dx - \int_1^{\alpha} \frac{1}{x^3} \, dx &= \frac{9}{8} \Leftrightarrow \int_1^{\alpha} \left(x - \frac{1}{x^3}\right) \, dx = \frac{9}{8} \\ \Leftrightarrow \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2}\right]_1^{\alpha} &= \frac{9}{8} \Leftrightarrow \left[x^2 + \frac{1}{x^2}\right]_1^{\alpha} = \frac{9}{4} \\ \Leftrightarrow \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} &= \frac{17}{4} \Leftrightarrow 4\alpha^4 - 17\alpha^2 + 4 = 0 \end{aligned}$$

Θέτω $\alpha^4 = w$ και η πιο πάνω εξίσωση γίνεται

$$4w^2 - 17w + 4 = 0 \Leftrightarrow 4(w-4)(w-1) = 0 \Leftrightarrow w = 1, 4$$

και αρα $(\alpha^4 = 1) \vee (\alpha^4 = 4)$ η οποία είναι αληθής μόνο για $\alpha = 2$ στο διάστημα $(1, +\infty)$

9. Βρίσκουμε τα σημεία τομής των δύο καμπύλων:

$$\begin{aligned} 3\eta\mu x &= 4\sigma\upsilon\nu x \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{4}{3} \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \frac{4}{3} \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow x = \tau\omicron\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{4}{3}\right) \end{aligned}$$

$$B = \frac{\pi}{2}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} E(OAB) &= \int_0^{\tau\omicron\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{4}{3}\right)} 3\eta\mu x \, dx + \int_{\tau\omicron\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{4}{3}\right)}^{\frac{\pi}{2}} 4\sigma\upsilon\nu x \, dx = -3[\sigma\upsilon\nu x]_0^{\tau\omicron\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{4}{3}\right)} + 4[\eta\mu x]_{\tau\omicron\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{4}{3}\right)}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -3\left[\sigma\upsilon\nu\left(\tau\omicron\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{4}{3}\right)\right) - \sigma\upsilon\nu 0\right] + 4\left[\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) - \eta\mu\left(\tau\omicron\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{4}{3}\right)\right)\right] \\ &= -3\left[\frac{3}{5} - 1\right] + 4\left[1 - \frac{4}{5}\right] = \frac{6}{5} + \frac{4}{5} = 2 \, \tau. \mu \end{aligned}$$

αφού

$$x = \tau\omicron\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{4}{3}\right) \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi^2 x = \frac{16}{9} \Leftrightarrow \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{16}{9} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{9}{16} \eta\mu^2 x$$

¹ Αν f συνεχής στο $[a, \beta]$, τότε $\int_a^{\beta} f(cx) \, dx = \frac{1}{c} \int_{ca}^{c\beta} f(x) \, dx$



Αλλά,

$$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1, \text{ δηλ. } \eta\mu^2 x = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x$$

και αρα

$$\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{9}{16} \eta\mu^2 x = \frac{9}{16} (1 - \sigma\upsilon\nu^2 x) \Leftrightarrow \frac{25}{16} \sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{9}{16} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \frac{3}{5}$$

(αφού $0 < x < \frac{\pi}{2}$)

και ομοίως,

$$\eta\mu\left(\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)\right) = \frac{4}{5}$$

10. Έστω η παραβολή $y^2 = 4x$. Παραγωγίζουμε πεπλεγμένα: για $y \neq 0$,

$$y^2 = 4x \Leftrightarrow 2yy' = 4 \Leftrightarrow y' = \frac{2}{y}$$

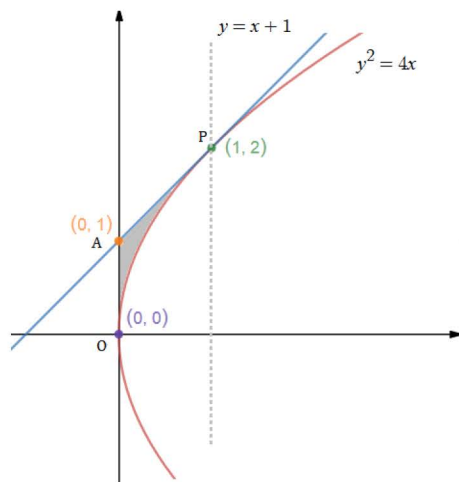
Η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο $P(1,2)$ έχει κλίση $\lambda = y'(1) = \frac{2}{y}|_{P(1,2)} = \frac{2}{2} = 1$ και έτσι, η εξίσωση (της εφαπτομένης) είναι $y - 2 = x - 1$, δηλ. $y = x + 1$. Το σημείο A τομής της ευθείας αυτής με τον άξονα των y είναι το $A(0,1)$. Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν του μικτόγραμμου χωρίου OPA μπορούμε να σκεφτούμε το χωρίο αυτό με 2 διαφορετικούς τρόπους:

ως τη διαφορά του χωρίου που περικλείεται κάτω από το γράφημα της εφαπτομένης με άκρα τα σημεία A και P και του γραφήματος της καμπύλης $y = 2\sqrt{x}$ στα ίδια άκρα:

$$\text{Εμβαδόν} = \int_0^1 (x + 1 - 2\sqrt{x}) dx = \frac{1}{6}$$

ή χωρίζοντάς το σε 2 διαφορετικά χωρία και υπολογίζοντας τα εμβαδά με διαμερίσεις ως προς τον άξονα των τεταγμένων:

$$\begin{aligned} E = E_1 + E_2 &= \int_0^1 \left(\frac{y^2}{4} - 0\right) dy + \int_1^2 \left(\frac{y^2}{4} - (y - 1)\right) dy = \int_0^1 \frac{y^2}{4} dy + \int_1^2 \left(\frac{y^2}{4} - y + 1\right) dy \\ &= \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$



Τώρα, θα βρούμε τον όγκο του στερεού που παράγει το μικτόγραμμο χωρίο OPA , όταν περιστραφεί γύρω από τον άξονα Oy . Όπως και στο δεύτερο τρόπο, χωρίζουμε το χωρίο OPA σε 2 διαφορετικά χωρία και έτσι

$$\begin{aligned} V(OPA) &= \pi \int_0^1 \left(\frac{y^2}{4}\right)^2 dy + \pi \int_1^2 \left[\left(\frac{y^2}{4}\right)^2 - (y - 1)^2\right] dy = \pi \int_0^2 \left(\frac{y^2}{4}\right)^2 dy - \pi \int_1^2 (y - 1)^2 dy \\ &= \frac{\pi}{16} \cdot \frac{32}{5} - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{5} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{15} \end{aligned}$$

