

ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ #1

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
[ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ]**

ΣΧΟΛΙΚΗΣ ΧΡΟΝΙΑΣ 2018-2019

ΙΩΑΚΕΙΜ ΙΩΑΝΝΗΣ

<http://ioakimioannis.com>

Μέρος Α

- Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \text{τοξημ}\left(\frac{x}{2}\right)$. Να βρείτε την f' , όπου αυτή ορίζεται.
- Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 16y = -32$.
(α) Αφού δείξετε ότι η πιο πάνω εξίσωση αναπαριστά κύκλο, να προσδιορίσετε την ακτίνα και το κέντρο του.
(β) Έστω ο κύκλος που καθορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις
$$\begin{cases} x = x(t) = 5\sqrt{2}\sin(t) + 9 \\ y = y(t) = 5\sqrt{2}\eta\mu(t) - 1 \end{cases}, t \in [0, 2\pi)$$
Να δείξετε ότι οι δυο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά και να βρεθεί το σημείο επαφής τους.
- Θεωρούμε μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(2) = 0$ και $f'(x) = \frac{1}{x}, x \in (0, +\infty)$. Αποδείξτε ότι $f(x) \leq \frac{x}{2} - 1, x \in (0, +\infty)$.
- Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = -x^2 + 2x + 8, x \in [0, 4]$. Να βρεθεί το πεδίο τιμών της. Επίσης, να δείξετε ότι επαληθεύεται το Θεώρημα Μέσης τιμής στο εν λόγω διάστημα, να ευρεθεί το σημείο που ικανοποιεί το Θεώρημα αυτό και να δωθεί Γεωμετρική ερμηνεία αυτού.
- (α) Αν A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με
$$P(B) = \frac{1}{4} \qquad P(A|B) = \frac{1}{6} \qquad P(A \cup B) = \frac{3}{8}$$
Να ελέγξετε κατά πόσον αυτά είναι **ανεξάρτητα**.
(β) Να υπολογίσετε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης ΑΡΑΚΑΣ. Πόσοι από αυτούς αρχίζουν με το Γράμμα Α και τελειώνουν με διαφορετικό γράμμα από το Α;
- Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4ax, a > 0$ και τα σημεία $A(at^2, 2at)$ και $B(a\rho^2, 2a\rho)$ αυτής ($t \neq \rho$). Να βρείτε την εξίσωση της χορδής AB .
- Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια δις παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή δεύτερη παράγωγο για την οποία $f'(0) = 4, f(0) = 1$ και η οποία ικανοποιεί τη σχέση
$$f''(x) - 2f'(x) - 8f(x) = 0.$$
(α) Αν $h(x) = f'(x) + 2f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι $h'(x) - 4h(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
(β) Να προσδιορίσετε την f .
(γ) Να υπολογίσετε το $\sum_{k=0}^{\infty} f(-4k)$
- Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 - \eta\mu^2 x}}, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$
(α) Να βρείτε τα ακρότατα της f και να προσδιορίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.
(β) Να αποδείξετε ότι
$$\frac{\pi\sqrt{2}}{4} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \leq \frac{\pi}{2}$$
- Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται όταν το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη με εξίσωση $y = \ln\left(\frac{1}{x}\right), x > 0$, την εφαπτομένη της καμπύλης αυτής στο σημείο της με $x = \frac{1}{e}$ και τον άξονα των τετμημένων περιστραφεί πλήρως γύρω από τον άξονα των τετμημένων.
- Να υπολογίσετε το
$$\int \frac{x^{2017}}{(x+1)^{2019}} dx$$

Μέρος Β

- ① (α) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 e^{1-x}$. Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού της, τα σημεία τομής με τους άξονες, τα διαστήματα μονοτονίας, τα ακρότατα, τα σημεία καμπής και τις ασύμπτωτές της, να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

(β) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από πλήρη περιστροφή γύρω από την ευθεία $x = 2$ του χωρίου (S) που περικλείεται από τα γραφήματα των καμπύλων (C_1) και (C_2) καθοριζόμενα από τις εξισώσεις $y = \tan x, x \in [0, 1]$ και $y = \tan x, x \in [0, 1]$ αντίστοιχα και τον άξονα των τετμημένων.

- ② Για $m \in \{2, 3, \dots\}$ θεωρούμε την ακολουθία $(\alpha_n^m)_{n \in \{0, 1, 2, \dots, m\}}$ με $\alpha_n^m = 3^{\frac{n}{m}}$.

(α) Για κάθε $m \in \{2, 3, \dots\}$, να δείξετε ότι $\alpha_{n+1}^m - \alpha_n^m = 3^{\frac{n}{m}} \left(3^{\frac{1}{m}} - 1 \right)$ για κάθε $n \in \{0, 1, 2, 3, \dots, m\}$

(β) Αν $m \in \{2, 3, \dots\}$ και $\delta_n^m = \alpha_{n+1}^m - \alpha_n^m, n \in \{0, 1, 2, 3, \dots, m\}$, να υπολογίσετε (συναρτήσει του m) το άθροισμα

$$S_m = \sum_{n=0}^m (\alpha_n^m)^2 \cdot \delta_n^m$$

- ③ Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, όπου $a > b > 0$ και σημείο $M(\alpha \sin \theta, \beta \cos \theta)$ με $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Αν η εφαπτομένη της έλλειψης στο M τέμνει τον άξονα Ox στο σημείο P και τον άξονα των Oy στο σημείο Γ ενώ η κάθετη αυτής στο σημείο M τέμνει τον άξονα Ox στο σημείο Σ .

(α) Να δείξετε ότι ισχύει

$$\frac{a^2}{(OP)^2} + \frac{b^2}{(O\Gamma)^2} = 1 \quad \text{και} \quad (OP) \cdot (O\Sigma) = (\varepsilon \cdot a)^2,$$

όπου ε η εκκεντρότητα της έλλειψης.

(β) Να ευρεθεί εκείνη η τιμή του $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ για την οποία το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την έλλειψη, το ευθύγραμμο τμήμα (ΓP) και τον άξονα των τετμημένων γίνεται το μέγιστο δυνατό το οποίο και να προσδιορίσετε.

- ④ Ένας καθηγητής Μαθηματικών τοποθετεί μια ομάδα n μαθητών σε μια ευθεία γραμμή.

(α) Αν στους μαθητές υπάρχουν 2 ζεύγη διδύμων, να βρείτε, συναρτήσει του n , την πιθανότητα του ενδεχομένου όπως τα 4 αδέρφια να μη στέκονται το ένα δίπλα στο άλλο.

(β) Να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό μαθητών που απαιτούνται ώστε η πιθανότητα που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα να είναι τουλάχιστον $\frac{3}{4}$.

(γ) Αν $n \leq 300$, να βρείτε, συναρτήσει του n , την πιθανότητα του ενδεχομένου όπως η παράταξη των μαθητών να περιέχει τουλάχιστον 2 άτομα που να έχουν γενέθλια την ίδια μέρα του χρόνου (1 χρόνος = 365 μέρες).

- ⑤ Δίνεται η **συνεχής** συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(1010 - x) + f(1010 + x) = \frac{\alpha}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι

$$\int_0^{2020} f(2020 - x) dx = \int_0^{2020} f(x) dx = 505\alpha$$

(β) Υπολογίστε το

$$\int_0^{2020} \frac{3 + e^{1010-x}}{1 + e^{1010-x}} dx$$

Λύσεις

Μέρος Α

1. Εύρεση του π.ο. της συνάρτησης (στο οποίο αυτή αντιστρέφεται) $f(x) = \text{τοξημ}\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\frac{x}{2} \in [-1, 1] \Leftrightarrow -1 \leq \frac{x}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$$

και αρα

$$y = \text{τοξημ}\left(\frac{x}{2}\right), x \in [-2, 2] \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \eta\mu y, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Εύρεση της παραγώγου συνάρτησης

Ξέρουμε, από τη θεωρία, ότι η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του συνόλου του π.ο. της, δηλ. στο $(-2, 2)$ και (παραγωγίζοντας πεπλεγμένα) $\forall x \in (-2, 2)$

$$\frac{x}{2} = \eta\mu y \Leftrightarrow \frac{1}{2} = y' \cdot \sigma\upsilon\nu y \Leftrightarrow y' = \frac{1}{2\sigma\upsilon\nu y}$$

(είναι $\sigma\upsilon\nu y \neq 0, \forall y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$). Αλλά,

$$\sigma\upsilon\nu^2 y + \eta\mu^2 y = 1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2 y = 1 - \eta\mu^2 y$$

και αφού $\sigma\upsilon\nu y > 0, \forall y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, η πιο πάνω δίνει

$$\sigma\upsilon\nu y = \sqrt{1 - \eta\mu^2 y} = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}$$

Συνεπώς, από τα πιο πάνω,

$$y' = \frac{1}{2\sigma\upsilon\nu y} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}, x \in (-2, 2)$$

2. (α) Είναι

$$x^2 + y^2 - 16y = -32 \Leftrightarrow x^2 + (y - 8)^2 = 32$$

και αρα το γράφημα της καμπύλης που περιγράφεται από την πιο πάνω εξίσωση αναπαριστά κύκλο με κέντρο το σημείο $K_1 = (0, 8)$ και ακτίνα $R_1 = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

(β) Έχουμε

$$\begin{cases} x = x(t) = 5\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu(t) + 9 \\ y = y(t) = 5\sqrt{2}\eta\mu(t) - 1 \end{cases}, t \in [0, 2\pi) \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) - 9 = 5\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu(t) \\ y(t) + 1 = 5\sqrt{2}\eta\mu(t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi)$$

και αρα το γράφημα της καμπύλης που περιγράφεται από το πιο πάνω ζεύγος παραμετρικών εξισώσεων αναπαριστά κύκλο με κέντρο το σημείο $K_2 = (-9, 1)$ και ακτίνα $R_2 = 5\sqrt{2}$. Τώρα,

$$d(K_1, K_2) = \sqrt{(-9 - 0)^2 + (1 - 8)^2} = 9\sqrt{2}$$

και $R_1 + R_2 = 9\sqrt{2}$. Δηλ. η διάκεντρος των 2 κύκλων είναι ίση με την απόσταση των κέντρων τους, άρα αυτοί εφάπτονται εξωτερικά. Θα βρούμε το σημείο επαφής, λύνοντας σύστημα των δυο εξισώσεων:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 16y = -32 \\ (x + 9)^2 + (y + 1)^2 = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 16y = -32 \\ x^2 + y^2 + 2y - 18x = -32 \end{cases} \Leftrightarrow -16y = 2y - 18x \Leftrightarrow x = y$$

Αντικαθιστώντας (π.χ. στην 1η) έχουμε

$$\Leftrightarrow x^2 + x^2 - 16x + 32 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

Άρα το σημείο επαφής τους είναι το $(4, 4)$.



3. Έστω $x > 2$. Από το ΘΜΤ, θα έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (2, x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.
Αλλά,

$$\frac{f(x) - \overbrace{f(2)}^{=0}}{x - 2} = \frac{f(x)}{x - 2}$$

και αφού από υπόθεση είναι $f'(\xi) = \frac{1}{\xi}$, θα έχουμε ότι

$$\frac{f(x)}{x - 2} = \frac{1}{\xi}$$

Όμως, $\xi \in (2, x) \Rightarrow 0 < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{2}$ και άρα $\frac{f(x)}{x - 2} < \frac{1}{2}$, δηλ. $f(x) < \frac{x}{2} - 1$. Ομοίως και στην περίπτωση που $0 < x < 2$. Για $x = 2$ ισχύει η ισότητα. Συνεπώς, $f(x) \leq \frac{x}{2} - 1, x \in (0, +\infty)$.

4. Η μελέτη της συνάρτησης θα δωθεί με ύλη Β Λυκείου. Η εναλλακτική είναι με χρήση εργαλείων του Δ.Λ.

Κατ'αρχάς, αφού η f είναι συνεχής ορισμένη σε κλειστό διάστημα, από το **Θεώρημα Μέγιστης/Ελάχιστης Τιμής**, αυτή θα παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή $f_{\max}$ και $f_{\min}$ αντίστοιχα και μάλιστα το πεδίο τιμών της είναι το (κλειστό) διάστημα $[f_{\min}, f_{\max}]$. Έχουμε:

$$f(x) = -x^2 + 2x + 8 = -(x - 1)^2 + 9, \quad x \in [0, 4]$$

και άρα η συνάρτηση έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο με $x = 1$, την τιμή $f(1) = 9$. Επίσης, $f(0) = 8$ και $f(4) = 0$. Συνεπώς, ως συνέπεια του ίδιου Θεωρήματος, έχουμε $f_{\min} = 0$ και $f_{\max} = 9$, δηλ. το πεδίο τιμών της είναι το (κλειστό) διάστημα $[0, 9]$.

Τώρα, ως πολυωνυμική, η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 4]$ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του, άρα από το ΘΜΤ του Δ.Λ. έχουμε ότι υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $\xi \in (0, 4)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0}, \quad \text{δηλ. } f'(\xi) = -2$$

Αλλά, $f'(x) = -2x + 2, \forall x \in [0, 4]$ και άρα

$$f'(\xi) = -2 \Leftrightarrow -2\xi + 2 = -2 \Leftrightarrow \xi = 2$$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι η εφαπτομένη του γραφήματος της συνάρτησης στο σημείο με $x = 2$ είναι παράλληλη με την ευθεία που περνά από τα άκρα του διαστήματος του π.ο. της.

5. (α) Τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Θα υπολογίσουμε τις $P(A)$ και $P(A \cap B)$:

$$P(A|B) = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{24}$$

$$P(A \cup B) = \frac{3}{8} \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} \Leftrightarrow P(A) + \frac{1}{4} - \frac{1}{24} = \frac{3}{8} \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{6}$$

Άρα,

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24} = P(A \cap B)$$

και άρα τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα.

(β) Το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης ΑΡΑΚΑΣ είναι

$$\frac{6!}{3!} = 120$$

Θα βρούμε πόσοι από αυτούς αρχίζουν με το Γράμμα Α και τελειώνουν με διαφορετικό γράμμα από το Α.

Βήμα 1: επιλογή του πρώτου γράμματος $\rightarrow$ 1 τρόπος (το ψηφίο Α)

Βήμα 2: επιλογή των 4 ενδιάμεσων γραμμάτων $\rightarrow$ πλήθος αναγραμματισμών των Α,Α,Κ,Σ $\frac{4!}{2!} = 12$ τρόποι

Βήμα 2: επιλογή τελευταίου γράμματος $\rightarrow$ 1 από τα Ρ,Κ,Σ 3 τρόποι.

Από την Πολλαπλασιαστική αρχή, το ζητούμενο πλήθος είναι ίσο με $1 \cdot 12 \cdot 3 = 36$

6. $y^2 = 4ax, a > 0$ και τα σημεία $A(at^2, 2at)$ και $B(ap^2, 2ap)$ αυτής ($t \neq p$)

Βρίσκουμε την κλίση της ευθείας AB

Κατ'αρχάς αφού $t \neq p$, έπεται ότι η ευθεία δεν είναι παράλληλη με τον άξονα των τεταγμένων

$$\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2ap - 2at}{ap^2 - at^2} = \frac{2a(p - t)}{a(p - t)(p + t)} = \frac{2}{p + t}$$

και αρα

$$(AB): y - y_B = \lambda_{AB}(x - x_B) \Leftrightarrow (AB): y - 2ap = \frac{2}{p + t}(x - ap^2) \Leftrightarrow (AB): (p + t)y - 2x = 2apt$$

7. Έχουμε

$$\begin{cases} f''(x) - 2f'(x) - 8f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ f'(0) = 4, f(0) = 1 \end{cases}$$

(α) Είναι $\forall x \in \mathbb{R} h(x) = f'(x) + 2f(x) \Rightarrow h'(x) = f''(x) + 2f'(x)$ και αρα

$$h'(x) - 4h(x) = f''(x) + 2f'(x) - 4f'(x) - 8f(x) = f''(x) - 2f'(x) - 8f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

από υπόθεση.

(β) Είναι $h(0) = f'(0) + 2f(0) = 4 + 2 = 6$. Τώρα, θεωρούμε τη συνάρτηση h με τύπο $u(x) = e^{-4x}h(x)$. Είναι

$$u'(x) = (e^{-4x}h(x))' \Rightarrow u'(x) = -4e^{-4x}h(x) + e^{-4x}h'(x) = e^{-4x} \underbrace{(h'(x) - 4h(x))}_{=0} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

και αρα, από γνωστό μας Πόρισμα, είναι $u(x) = c$ για κάποια πραγματική σταθερά c , δηλ. $e^{-4x}h(x) = c$, δηλ. $h(x) = ce^{4x}, \forall x \in \mathbb{R}$. Αλλά, $h(0) = 6$ και αρα $c = 6$. Συνεπώς,

$$u(x) = 6e^{4x}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Είναι $\forall x \in \mathbb{R}$

$$(e^{2x}f(x))' = 2e^{2x}f(x) + e^{2x}f'(x) = e^{2x}(f'(x) + 2f(x)) = u(x)e^{2x} = 6e^{4x} \cdot e^{2x} = 6e^{6x}$$

Τώρα,

$$(e^{2x}f(x))' = 6e^{6x} \Rightarrow \int (e^{2x}f(x))' dx = 6 \int e^{6x} dx \Rightarrow e^{2x}f(x) = e^{6x} + c \Rightarrow f(x) = e^{4x} + ce^{-2x}$$

Αλλά, $f(0) = 1$ και αρα $c + 1 = 1$, δηλ. $c = 0$. Έτσι,

$$f(x) = e^{4x}, \forall x \in \mathbb{R}$$

(γ) Έχουμε

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(-4k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-16k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{e^{16k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e^{16}}\right)^k$$

Αλλά, $\left|\frac{1}{e^{16}}\right| < 1$ και αρα η πιο πάνω σειρά συγκλίνει και (γεωμετρική σειρά) μάλιστα

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e^{16}}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{e^{16}}} = \frac{e^{16}}{e^{16} - 1}$$

8. (α) Είναι $\eta\mu^2 x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ και αρα η f είναι καλά ορισμένη. Επίσης, στο π.ο. της είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \frac{\eta\mu\sigmaυν x}{(2 - \eta\mu^2 x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\eta\mu(2x)}{2(2 - \eta\mu^2 x)^{\frac{3}{2}}}$$

Τα κρίσιμα λοιπόν σημεία της f είναι όλα τα $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ τέτοια ώστε $f'(x) = 0$, δηλ. τα $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ τέτοια ώστε $\eta\mu(2x) = 0$, δηλ. τα $x = 0, \frac{\pi}{2}$. Παρατηρούμε ότι $f'(x) > 0, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και αρα είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Συνεπώς, λόγω της συνέχειας στα άκρα του διαστήματος,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = f(0) \leq f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad (*)$$

δηλ. $f_{\max} = 1$ και $f_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(β) Η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και αρα κατα Riemann ολοκληρώσιμη στο διάστημα αυτό. Από τη σχέση (*) και τη γνωστή μας ιδιότητα του ολοκληρώματος Riemann, έχουμε ότι

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx$$

Αλλά,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \quad \text{και} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2}$$

και αρα

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{4} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \leq \frac{\pi}{2}.$$

9. Έχουμε

$$y = \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x, x > 0$$

και για $x > 0$ είναι

$$y'(x) = -\frac{1}{x}$$

Η κλίση της εφαπτομένης της συνάρτησης στο σημείο της με $\left(\frac{1}{e}, -\ln\left(\frac{1}{e}\right)\right) = \left(\frac{1}{e}, -1\right)$ είναι

$$y'\left(\frac{1}{e}\right) = -e$$

και αρα η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο αυτό είναι

$$y - 1 = -e\left(x - \frac{1}{e}\right)$$

δηλ. η

$$y = 2 - ex$$

Η ευθεία αυτή τέμνει τον άξονα των τετμημένων (βάζουμε $y = 0$) στο σημείο $\left(\frac{2}{e}, 0\right)$. Έτσι,

$$V = V_1 - V_2 = \pi \int_{\frac{1}{e}}^1 y^2 dx - \frac{(AM)^2 \cdot (AB)}{3} \pi = \pi \int_{\frac{1}{e}}^1 \ln^2 x dx - \frac{1^2}{3} \left(\frac{2}{e} - \frac{1}{e}\right) \pi$$

Κατα τα γνωστά (ολοκλήρωση κατα μέρη) έχουμε ότι

$$\int \ln^2 x dx = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + c$$

και αρα

$$V = \pi [x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x]_{\frac{1}{e}}^1 - \frac{\pi}{3e} = \dots = \pi \left(2 - \frac{5}{e} - \frac{1}{3e} \right) \text{ κ. μ.}$$

10. Είναι

$$\int \frac{x^{2017}}{(x+1)^{2019}} dx = \int \frac{x^{2017}}{(x+1)^{2017}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} dx = \int \left(\frac{x}{x+1} \right)^{2017} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} dx$$

Παρατηρούμε ότι

$$\left(\frac{x}{x+1} \right)' = \frac{1}{(x+1)^2}$$

και αρα

$$\int \frac{x^{2017}}{(x+1)^{2019}} dx = \int \left(\frac{x}{x+1} \right)^{2017} d \left(\frac{x}{x+1} \right) = \frac{1}{2017} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{2018} + c$$

Διαφορετικά, με τη διαδικασία των μετασχηματισμών, θα έπρεπε π.χ. να θέσουμε $\frac{x}{x+1} := u$.

Μέρος Β [Μόνο οι 1, 2, 3, 5]

1 (α) Εύρεση πεδίου ορισμού:

Η συνάρτηση f γράφεται ως $h \cdot g$ όπου h και g οι συναρτήσεις με τύπους $h(x) = (x-2)^2$ και $g(x) = e^x$ αντίστοιχα. Κατα συνέπεια,

$$D(f) = D(g) \cap D(h)$$

Αλλά, $D(g) = \mathbb{R} = D(h)$ και άρα $D(f) = \mathbb{R}$.

* Παρατηρούμε επίσης ότι $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. * (βοηθητικό)

Εύρεση σημείων τομής με άξονες: $f(0) = 0 \rightarrow (0,0)$

Εύρεση διαστημάτων μονοτονίας και Τ.Α.: Η συνάρτηση είναι δις παραγωγίσιμη με συνεχή δεύτερη παράγωγο. Είναι $\forall x \in D(f) = \mathbb{R}, f'(x) = -x(x-2)e^{1-x}$. Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, 2$. Έτσι, η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(2, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο $(0, 2)$. Παρουσιάζει δε μέγιστο στο $(2, f(2)) = (2, \frac{4}{e})$ και ελάχιστο στο $(0, f(0)) = (0, 0)$.

Κυρτότητα συνάρτησης: Είναι $\forall x \in D(f) = \mathbb{R}, f''(x) = (x^2 - 4x + 2)e^{1-x}$. Εύκολα βρίσκουμε ότι και $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f'	-	+	-	
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	
	min		max	

x	$-\infty$	$2 - \sqrt{2}$	$2 + \sqrt{2}$	$+\infty$
f''	-	+	-	
f	$\curvearrowright$	$\curvearrowleft$	$\curvearrowright$	
	Σ.Κ.		Σ.Κ.	

Έτσι, η f είναι κυρτή στα διαστήματα $(-\infty, 2 - \sqrt{2})$ και $(2 + \sqrt{2}, +\infty)$ και κοίλη στο $(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}) \approx (0.6, 3.41)$. Παρουσιάζει δε Σ.Κ. στα $2 - \sqrt{2} \approx 0.6$ και $2 + \sqrt{2} \approx 3.41$.

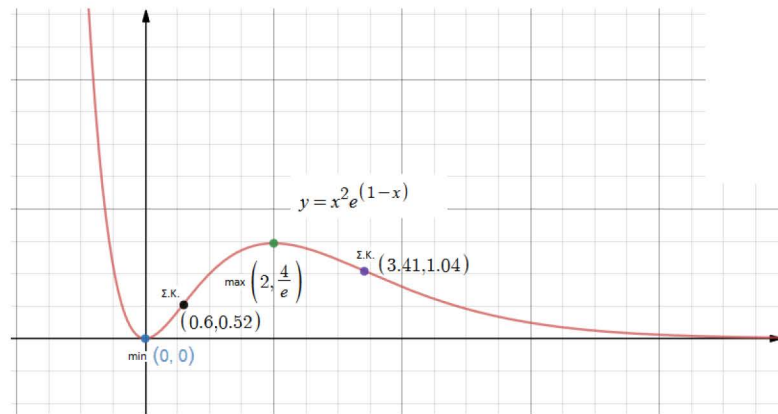
Ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνάρτησης καθώς $x \rightarrow \pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^{x-1}} = 0$$

(εφαρμόσαμε 2 φορές τον κανόνα του deL'Hospital)

και άρα ο άξονας των τετμημένων είναι οριζόντια ασύμπτωτη της συνάρτησης. Επίσης

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{1-x} = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$



(β)

$$(S) = \{0 \leq x \leq 1, \quad \text{τοξημ}x \leq y \leq \text{τοξσυν}x\}$$

Είναι $\text{τοξημ}x = \text{τοξσυν}x \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ στο διάστημα $[0,1]$. Επίσης, $y = \text{τοξημ}x \Leftrightarrow x = \eta\mu y$ και $y =$

$\text{τοξσυν}x \Leftrightarrow x = \sigma\upsilon\nu y$ και $\text{τοξημ}0 = 0, \text{τοξσυν}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{τοξσυν}1 = 0$

Εξωτερική ακτίνα : $\rho_2 = 2 - \eta\mu y$, Εσωτερική ακτίνα : $\rho_1 = 2 - \sigma\upsilon\nu y$ και

$$(S) = \left\{0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \quad \eta\mu y \leq x \leq \sigma\upsilon\nu y\right\}$$

και αρα

$$\begin{aligned} V(S) &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(2 - \eta\mu y)^2 - (2 - \sigma\upsilon\nu y)^2] dy = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\sigma\upsilon\nu y - 4\eta\mu y - \sigma\upsilon\nu(2y)) dy \\ &= 4\pi \left[\sigma\upsilon\nu y + \eta\mu y - \frac{\eta\mu(2y)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi \end{aligned}$$

2 (α) Έστω $m \in \{2, 3, \dots\}$. Έχουμε για $v \in \{0, 1, 2, 3, \dots, m\}$ σταθεροποιημένο

$$\alpha_{v+1}^m - \alpha_v^m = 3^{\frac{v+1}{m}} - 3^{\frac{v}{m}} = 3^{\frac{v}{m} + \frac{1}{m}} - 3^{\frac{v}{m}}$$

$$= 3^{\frac{1}{m}} \cdot 3^{\frac{v}{m}} - 3^{\frac{v}{m}} = 3^{\frac{v}{m}} \cdot \left(3^{\frac{1}{m}} - 1\right)$$

(β) Έστω $m \in \{2, 3, \dots\}$. Έχουμε για $v \in \{0, 1, 2, 3, \dots, m\}$ σταθεροποιημένο,

$$\begin{aligned} S_m &= \sum_{v=0}^m (\alpha_v^m)^2 \cdot \delta_v^m = \sum_{v=0}^m \left(3^{\frac{v}{m}}\right)^2 \cdot 3^{\frac{v}{m}} \cdot \left(3^{\frac{1}{m}} - 1\right) = \sum_{v=0}^m 3^{\frac{2v}{m}} \cdot 3^{\frac{v}{m}} \cdot \left(3^{\frac{1}{m}} - 1\right) = \left(3^{\frac{1}{m}} - 1\right) \cdot \sum_{v=0}^m 3^{\frac{2v}{m}} \cdot 3^{\frac{v}{m}} \\ &= \left(3^{\frac{1}{m}} - 1\right) \cdot \sum_{v=0}^m 3^{\frac{2v}{m}} \cdot 3^{\frac{v}{m}} = \left(3^{\frac{1}{m}} - 1\right) \cdot \sum_{v=0}^m 3^{\frac{3v}{m}} = \left(3^{\frac{1}{m}} - 1\right) \cdot \sum_{v=0}^m \left(3^{\frac{3}{m}}\right)^v \\ &= \left(3^{\frac{1}{m}} - 1\right) \cdot \left[\sum_{v=0}^{m-1} \left(3^{\frac{3}{m}}\right)^v + \left(3^{\frac{3}{m}}\right)^m \right] \\ &= \left(3^{\frac{1}{m}} - 1\right) \cdot \left[\sum_{v=0}^{m-1} \left(3^{\frac{3}{m}}\right)^v + 27 \right] \end{aligned}$$

(το 27 προκύπτει ως ο τελευταίος όρος του αρχικού αθροίσματος, δηλ. ο όρος για $v = m$ και το κάνουμε αυτό για να χρησιμοποιήσω το άθροισμα m πρώτων όρων Γ.Π.)

Για τον υπολογισμό του $\sum_{v=0}^{m-1} \left(\frac{3}{m}\right)^v$, παρατηρούμε ότι οι όροι του είναι όροι Γ.Π. με λόγο $\lambda = \frac{3}{m}$ και αρα

$$\sum_{v=0}^{m-1} \left(\frac{3}{m}\right)^v = \frac{\left(\frac{3}{m}\right)^{m-1} - \frac{3}{m}}{\frac{3}{m} - 1}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} S_m &= \left(\frac{1}{3^m} - 1\right) \cdot \left[\sum_{v=0}^{m-1} \left(\frac{3}{m}\right)^v + 27\right] = \left(\frac{1}{3^m} - 1\right) \cdot \sum_{v=0}^{m-1} \left(\frac{3}{m}\right)^v + 27\left(\frac{1}{3^m} - 1\right) \\ &= \left(\frac{1}{3^m} - 1\right) \cdot \frac{\left(\frac{3}{m}\right)^{m-1} - \frac{3}{m}}{\frac{3}{m} - 1} + 27\left(\frac{1}{3^m} - 1\right) = \left(\frac{3}{m}\right)^{m-1} - \frac{3}{m} + 27\left(\frac{1}{3^m} - 1\right) \end{aligned}$$

- 3 Το σημείο M ευρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο, αφού $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Επίσης,

$$\frac{(\alpha \sin \theta)^2}{\alpha^2} + \frac{(\beta \eta \mu \theta)^2}{\beta^2} = \frac{\alpha^2 \sin^2 \theta}{\alpha^2} + \frac{\beta^2 \eta \mu^2 \theta}{\beta^2} = \sin^2 \theta + \eta \mu^2 \theta = 1$$

και αρα το σημείο $M(\alpha \sin \theta, \beta \eta \mu \theta)$ ανήκει πράγματι στην έλλειψη.

(α) Εύρεση της εξίσωσης της εφαπτομένης στο σημείο M

Παραγωγίζοντας πεπλεγμένα την εξίσωση της καμπύλης, έχουμε

$$\frac{2}{\alpha^2} x + \frac{2}{\beta^2} y \frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot \frac{x}{y}$$

και στο σημείο $M\left(\frac{\alpha \sin \theta}{x(\theta)}, \frac{\beta \eta \mu \theta}{y(\theta)}\right)$ είναι

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot \frac{\alpha \sin \theta}{\beta \eta \mu \theta} = -\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\sin \theta}{\eta \mu \theta}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο M είναι

$$\begin{aligned} y - \beta \eta \mu \theta &= -\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\sin \theta}{\eta \mu \theta} (x - \alpha \sin \theta) \Leftrightarrow \alpha \eta \mu \theta (y - \beta \eta \mu \theta) = -\beta \sin \theta (x - \alpha \sin \theta) \\ &\Leftrightarrow (\alpha \eta \mu \theta) y - \alpha \beta \eta \mu^2 \theta = -(\beta \sin \theta) x + \alpha \beta \sin^2 \theta \\ &\Leftrightarrow (\alpha \eta \mu \theta) y + (\beta \sin \theta) x = \alpha \beta (\sin^2 \theta + \eta \mu^2 \theta) \\ &\Leftrightarrow (\alpha \eta \mu \theta) y + (\beta \sin \theta) x = \alpha \beta \end{aligned}$$

Θέτοντας στην εξίσωση της εφαπτομένης $y = 0$, βρίσκουμε το σημείο $P: P\left(\frac{\alpha}{\sin \theta}, 0\right) \equiv P(\alpha \epsilon \mu \theta, 0)$

Εύρεση της εξίσωσης της καθέτου στο σημείο M

Είναι $\lambda_{\kappa \acute{\alpha} \theta.} \cdot \lambda_{\epsilon \varphi.} = -1$ και αρα $\lambda_{\kappa \acute{\alpha} \theta.} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\eta \mu \theta}{\sin \theta}$. Έτσι,

$$\begin{aligned} y - \beta \eta \mu \theta &= \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\eta \mu \theta}{\sin \theta} (x - \alpha \sin \theta) \Leftrightarrow \beta \sin \theta (y - \beta \eta \mu \theta) = \alpha \eta \mu \theta (x - \alpha \sin \theta) \\ &\Leftrightarrow (\beta \sin \theta) y - \beta^2 \sin \theta \eta \mu \theta = (\alpha \eta \mu \theta) x - \alpha^2 \beta \sin \theta \eta \mu \theta \Leftrightarrow (\beta \sin \theta) y - (\alpha \eta \mu \theta) x = \sin \theta \eta \mu \theta (\beta^2 - \alpha^2) \\ &\Leftrightarrow y - \frac{\alpha}{\beta} \frac{\eta \mu \theta}{\sin \theta} x = \frac{1}{\beta} \eta \mu \theta (\beta^2 - \alpha^2) \end{aligned}$$

Θέτοντας στην εξίσωση της καθέτου $y = 0$, βρίσκουμε το σημείο $\Sigma: \Sigma\left(\frac{\sin \theta}{\alpha} (\beta^2 - \alpha^2), 0\right)$

Είναι



$$(OP) = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\sin\theta}\right)^2} = \frac{\alpha}{\sin\theta} \text{ και } (OG) = \sqrt{\left(\frac{\beta}{\eta\mu\theta}\right)^2} = \frac{\beta}{\eta\mu\theta}$$

Συνεπώς,

$$\frac{\alpha^2}{(OP)^2} + \frac{\beta^2}{(OG)^2} = \frac{\alpha^2}{\frac{\alpha^2}{\sin^2\theta}} + \frac{\beta^2}{\frac{\beta^2}{\eta\mu^2\theta}} = \sin^2\theta + \eta\mu^2\theta = 1$$

Επίσης,

$$(OS) = \sqrt{\left(\frac{\sin\theta}{\alpha}(\beta^2 - \alpha^2)\right)^2} = \frac{\sin\theta}{\alpha}(\beta^2 - \alpha^2)$$

$$(OP) \cdot (OS) = \frac{\alpha}{\sin\theta} \cdot \frac{\sin\theta}{\alpha}(\beta^2 - \alpha^2) = \beta^2 - \alpha^2 = (\varepsilon \cdot \alpha)^2$$

Αλλά,

$$\varepsilon^2 = \frac{\gamma^2}{\alpha^2} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha^2} \Rightarrow (\varepsilon \cdot \alpha)^2 = \beta^2 - \alpha^2$$

και το ζητούμενο έπεται.

(γ) Το εμβαδόν του μικτόγραμμου χωρίου MPN , όπου $N(\alpha, 0)$ ισούται με

$$E_{\text{τριγ. \acute{ωνου } OPG}} - \frac{1}{4} E_{\text{έλλειψης}}$$

Είναι

$$E_{\text{τριγ. \acute{ωνου } OPG}} = \frac{(OP) \cdot (OG)}{2} = \frac{\frac{\alpha}{\sin\theta} \cdot \frac{\beta}{\eta\mu\theta}}{2} = \frac{\alpha\beta}{2\eta\mu\theta\sin\theta} = \frac{\alpha\beta}{\eta\mu(2\theta)}$$

και

$$\frac{1}{4} E_{\text{έλλειψης}} = \alpha \int_0^\beta \sqrt{1 - \frac{y^2}{\beta^2}} dy = \frac{\alpha}{\beta} \int_0^\beta \sqrt{\beta^2 - y^2} dy.$$

Για τον υπολογισμό του (αόριστου) ολοκληρώματος $\int \sqrt{\beta^2 - y^2} dy$ θεωρούμε την τριγωνομετρική αντικατάσταση

$$y(\theta) = \beta\eta\mu\theta, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Η αντικατάσταση αυτή μετασχηματίζει το $\int \sqrt{\beta^2 - y^2} dy$ στο

$$\int \beta\sqrt{\beta^2 - \beta^2\eta\mu^2\theta} \sin\theta d\theta = \beta \int \beta\sqrt{1 - \eta\mu^2\theta} \sin\theta d\theta$$

$$= \beta^2 \int \sqrt{\sin^2\theta} \sin\theta d\theta = \beta^2 \int \sin\theta \cdot \sin\theta d\theta = \frac{\beta^2}{2} (\theta + \eta\mu(\theta) \cdot \sin(\theta)) + c$$

όπου η σταθερά c απορρόφησε το β^2 . Επιστρέφοντας στην αρχική μας μεταβλητή, έχουμε:

$$\theta = \text{τοξημ}\left(\frac{y}{\beta}\right) \text{ και } \sin(\theta) = \sqrt{1 - \frac{y^2}{\beta^2}} = \beta\sqrt{\beta^2 - y^2}$$

και αρα

$$\int \sqrt{\beta^2 - y^2} dy = \frac{\beta^2}{2} \left(\text{τοξημ}\left(\frac{y}{\beta}\right) + y\sqrt{\beta^2 - y^2} \right) + c$$

Τελικά,

$$\frac{\alpha}{\beta} \int_0^\beta \sqrt{\beta^2 - y^2} dy = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta^2}{2} \left[\text{τοξημ}\left(\frac{y}{\beta}\right) + y\sqrt{\beta^2 - y^2} \right]_0^\beta = \frac{\beta\alpha}{2} (\text{τοξημ}1)$$

$$= \frac{\beta\alpha}{2} \left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} \pi\beta\alpha$$

Έτσι,

$$E_{MPN}(\theta) = E_{\text{τριγ. \acute{ωνου } OPG}} - \frac{1}{4} E_{\text{έλλειψης}} = \frac{\alpha\beta}{\eta\mu(2\theta)} - \frac{1}{4} \pi\beta\alpha, \quad \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

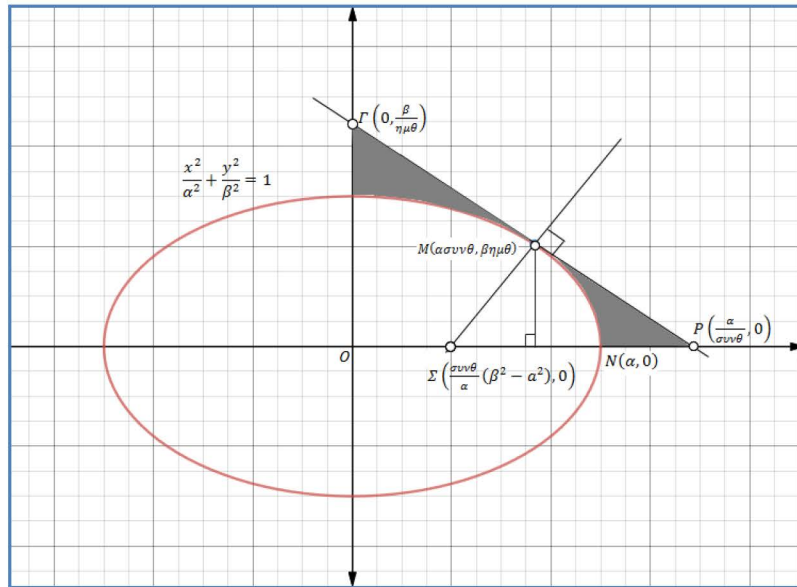
Είναι



$$E'_{MPN}(\theta) = -2 \frac{\eta\mu(2\theta)}{\sigma\upsilon\nu^2(2\theta)} = -2\varepsilon\varphi(2\theta)\tau\epsilon\mu(2\theta)$$

και εύκολα βλέπουμε ότι $E'_{MPN}(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ στο πιο πάνω διάστημα. Στο σημείο αυτό, η συνάρτηση λαμβάνει τοπικό μέγιστο. Έτσι, για $\theta = \frac{\pi}{4}$ έχουμε το μέγιστο εμβαδόν, το οποίο είναι το

$$\alpha\beta - \frac{1}{4}\pi\beta\alpha = \alpha\beta\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \tau.μ.$$



- 5 Για το $\int_0^{2020} f(2020-x) dx = \int_0^{2020} f(2 \cdot 1010 - x) dx$, θεωρούμε το μετασχηματισμό $u(x) = 2020 - x$ και αρα

$$\int_0^{2020} f(2020-x) dx = -\int_{2020}^0 f(u) du = \int_0^{2020} f(u) du \equiv \int_0^{2020} f(x) dx \quad (1)$$

Από υπόθεση, είναι

$$f(1010-x) + f(1010+x) = \frac{\alpha}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

και αρα

$$\int_{-1010}^{1010} f(1010-x) dx + \int_{-1010}^{1010} f(1010+x) dx = \int_{-1010}^{1010} \frac{\alpha}{2} dx$$

δηλ.

$$\int_{-1010}^{1010} f(1010-x) dx + \int_{-1010}^{1010} f(1010+x) dx = 2020 \frac{\alpha}{2} = 1010\alpha$$

Για τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται στο αριστερό μέλος της πιο πάνω σχέσης, θεωρούμε το μετασχηματισμό $u(x) = 1010 - x$ και λαμβάνουμε

$$\int_{-1010}^{1010} f(1010-x) dx = -\int_{2020}^0 f(x) dx = \int_0^{2020} f(x) dx$$

και

$$\int_{-1010}^{1010} f(1010+x) dx = -\int_{2020}^0 f(2020-x) dx = \int_0^{2020} f(2020-x) dx \stackrel{(1)}{=} \int_0^{2020} f(x) dx$$

Έτσι, τα πιο πάνω δίνουν

$$2 \int_0^{2020} f(x) dx = 1010\alpha$$

δηλ.

$$\int_0^{2020} f(x) dx = 505\alpha$$

Έτσι, τελικά,

$$\int_0^{2020} f(2020 - x) dx = \int_0^{2020} f(x) dx = 505\alpha$$

(β) Θα εφαρμόσουμε το πιο πάνω για

$$f(x) = \frac{3 + e^{1010-x}}{1 + e^{1010-x}}$$

Είναι

$$\begin{aligned} f(1010 - x) + f(1010 + x) &= \frac{3 + e^{1010-(1010-x)}}{1 + e^{1010-(1010-x)}} + \frac{3 + e^{1010-(1010+x)}}{1 + e^{1010-(1010+x)}} \\ &= \frac{3 + e^x}{1 + e^x} + \frac{3 + e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{3 + e^x}{1 + e^x} + \frac{e^x(3 + e^{-x})}{e^x(1 + e^{-x})} = \frac{3 + e^x}{1 + e^x} + \frac{(3e^x + 1)}{e^x + 1} = \frac{4 + 4e^x}{1 + e^x} = 4 \cdot \frac{1 + e^x}{1 + e^x} = 4 = \frac{8}{2} \end{aligned}$$

και αρα από το προηγούμενο ερώτημα,

$$\int_0^{2020} \frac{3 + e^{1010-x}}{1 + e^{1010-x}} dx = 505 \cdot 4 = 2020$$