ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΔΕΙΓΜΑ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ – ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Μάθημα: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

Διάρκεια: 45 λεπτά

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ 1 ΣΕΛΙΔΑ

Σημείωση: α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
β) Χορηγείται τυπολόγιο Μαθηματικών.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ.

<u>ΜΕΡΟΣ Α΄</u>: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1) α) $\int(4x^3+x)dx$

~~β)~~ $\cancel{\int\left(2x^2-\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx}$

2) α) $\int(\text{τεμ}^2x-\text{συν}2x)\,dx$

β) $\int \text{ημ}^3x\,\text{συν}x\,dx$

3) $\int\frac{\sqrt{\text{τοξημ}x}-3x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

4) $\int x^5\ln x\,dx$

~~5)~~ $\cancel{\int\frac{x+8}{x^2+6x+10}dx}$, ~~θέτω $x+3=u$ ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο.~~

<u>ΜΕΡΟΣ Β΄</u>: Να λύσετε και τις 2 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 25 μονάδες.

1) α) να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$. Με τη χρήση της αντικατάστασης $x=2\text{ημ}\theta,\ -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο.

β) να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int\frac{8}{3+5\text{ημ}2x}dx$. Με τη χρήση της ~~αντικατάστασης εφ$x=t$ ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο.~~

2. α) Να δείξετε ότι: $I_\nu=\int\text{εφ}^\nu x\,dx=\frac{\text{εφ}^{\nu-1}x}{\nu-1}-I_{\nu-2}\ ,\ \nu\geq3$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int\text{εφ}^6x\,dx$

ΤΕΛΟΣ

« Δεν υπάρχουν ιδέες, υπάρχουν μονάχα άνθρωποι που κουβαλούν τις ιδέες, κι αυτές παίρνουν το μπόι του ανθρώπου που τις κουβαλάει."»

- Ν. Καζαντζάκης [1]

Προτεινόμενες Λύσεις

Μέρος Α'

1.

(α) $\boxed{\int (4x^3 + x)\,dx = x^4 + \frac{x^2}{2} + c}$

(β) $\boxed{\int \left(2x^2 - \sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + 2\sqrt{x} + c}$

2.

(α) $\int \left(\tau\varepsilon\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu(2x)\right) dx = \int \tau\varepsilon\mu^2 x dx - \int \sigma\upsilon\nu(2x) dx = \boldsymbol{\varepsilon\varphi x} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\eta\mu x} + \boldsymbol{c}$

$$(\beta) \int \eta\mu^3(x)\cdot\sigma\upsilon\nu(x)dx = \int \eta\mu^3(x)\, d\big(\eta\mu(x)\big)$$

$$\eta\mu(x) = u \qquad = \int u^3 \cdot du = \frac{\eta\mu^4(x)}{4} + c$$

3.

$$\int \frac{\sqrt{\tau o\xi\eta\mu x} - 3x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{\sqrt{\tau o\xi\eta\mu x}}{\sqrt{1-x^2}} dx - 3\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Για το

$$I_1 = \int \frac{\sqrt{\tau o\xi\eta\mu x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

θέτουμε $\tau o\xi\eta\mu x = u \Rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ και αρα

$$I_1 = \int \sqrt{u}du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}(\tau o\xi\eta\mu x)^{\frac{3}{2}} + c_1$$

και για το

$$I_2 = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

θέτουμε $1 - x^2 = u \Rightarrow du = -2xdx \Rightarrow -\frac{1}{2}du = xdx$ και αρα

$$I_2 = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\int \frac{du}{2\sqrt{u}} = -\sqrt{u} + c = -\sqrt{1-x^2} + c_2$$

και αρα,

$$\boxed{\int \frac{\sqrt{\tau o\xi\eta\mu x} - 3x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{2}{3}(\tau o\xi\eta\mu x)^{\frac{3}{2}} - 3\sqrt{1-x^2} + c}$$

4.

$$\int x^5 \cdot \ln x\, dx = \int \left(\frac{x^6}{6}\right)' \cdot \ln x\, dx$$

$$= \frac{x^6}{6}\cdot\ln x - \frac{1}{6}\int x^6\cdot(\ln x)'\,dx = \frac{x^6}{6}\cdot\ln x - \frac{1}{6}\int x^6\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{x^6}{6}\cdot\ln x - \frac{1}{6}\int x^5\,dx = \boldsymbol{\frac{x^6}{6}\left(\ln x - \frac{1}{6}\right) + c}$$

5.

$$\boldsymbol{I = \int \frac{x+8}{x^2+6x+10}dx} = \int \frac{x+3+5}{x^2+6x+10}dx = \int \frac{x+3}{x^2+6x+10}dx + 5\int \frac{dx}{x^2+6x+10}$$

Κατα μέρη
$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+6x+10)}{x^2+6x+10} + 5\int \frac{dx}{(x^2+6x+9)+1}$$

$x^2+6x+10 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+6x+10) + 5\int \frac{dx}{(x+3)^2+1}$$

$$= \ln\left(\sqrt{x^2+6x+10}\right) + 5\int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2+1}$$

$$= \boldsymbol{\ln\left(\sqrt{x^2+6x+10}\right) + 5\tau o\xi\varepsilon\varphi(x+3) + c}$$

Μέρος Β’

1. **(α)** Θα υπολογίσουμε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}dx$$

Θεωρούμε την αντικατάσταση $x(\theta) = 2\eta\mu\theta \Rightarrow dx = 2\sigma\upsilon\nu\theta d\theta$ και $\eta\mu\theta = \frac{x}{2}$ έχουμε

$\sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 - \eta\mu^2\theta \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \sqrt{1-\eta\mu^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$, αφού $\sigma\upsilon\nu\theta > 0$ στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Συνεπώς,

Συνεπώς,

$$\boxed{\boldsymbol{\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}dx = \int \frac{2\sigma\upsilon\nu\theta d\theta}{4\eta\mu^2\theta 2\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{1}{4}\int \frac{d\theta}{\eta\mu^2\theta} = \frac{1}{4}\int \sigma\tau\varepsilon\mu^2\theta d\theta = -\frac{\sigma\varphi\theta}{4} + c = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x} + c}}$$

(β) Θα υπολογίσουμε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{8}{3+5\eta\mu(2x)}dx = 8\int \frac{dx}{3+5\eta\mu(2x)}$$

Θεωρούμε την αντικατάσταση $t = \varepsilon\varphi x \Rightarrow x(t) = \tau o\xi\varepsilon\varphi t \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$. Επίσης,

$$\eta\mu(2x) = \frac{2\varepsilon\varphi x}{1+\varepsilon\varphi^2 x} = \frac{2t}{1+t^2}$$

και αρα

$$\int \frac{\boldsymbol{8dx}}{\boldsymbol{3+5\eta\mu(2x)}} = 8\int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{3+5\frac{2t}{1+t^2}} = 8\int \frac{dt}{3t^2+10t+3}$$

$$= 8\int \frac{1}{8}\left(\frac{3}{3t+1} - \frac{1}{t+3}\right)dt = \int \left(\frac{3}{3t+1} - \frac{1}{t+3}\right)dt$$

$$= (\ln|3t+1| - \ln|t+3|) + c = \ln\left|\frac{3t+1}{t+3}\right| + c = \boldsymbol{\ln\left|\frac{3\varepsilon\varphi x+1}{\varepsilon\varphi x+3}\right| + c}$$

2. **(α)** Για $n \geq 3$,

$$\boldsymbol{I_n} = \int \varepsilon\varphi^n x\, dx = \int \varepsilon\varphi^{n-2}x(\tau\varepsilon\mu^2 x - 1)\, dx = \int \varepsilon\varphi^{n-2}x \cdot \tau\varepsilon\mu^2 x dx - \int \varepsilon\varphi^{n-2}x dx$$

$(\varepsilon\varphi x)' = \tau\varepsilon\mu^2 x$

$$= \int \varepsilon\varphi^{n-2}x \cdot d(\varepsilon\varphi x) - I_{n-2}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{n-1}\varepsilon\varphi^{n-2}x - I_{n-2}}$$

(β) Για $n = 6$,

$$I_6 = \int \varepsilon\varphi^6 x\, dx = \int \varepsilon\varphi^4 x \cdot \varepsilon\varphi^2 x\, dx = \int \varepsilon\varphi^4 x \cdot (\tau\varepsilon\mu^2 x - 1)dx$$

$$= \int \varepsilon\varphi^4 x \cdot \tau\varepsilon\mu^2 x dx - \int \varepsilon\varphi^4 x dx$$

$(\varepsilon\varphi x)' = \tau\varepsilon\mu^2 x$

$$= \frac{1}{5}\varepsilon\varphi^5 x - I_4$$

και για το I_4 ακολουθούμε την ίδια διαδικασία:

$$I_4 = \int \varepsilon\varphi^4 x dx = \int \varepsilon\varphi^2 x \cdot \varepsilon\varphi^2 x dx = \int \varepsilon\varphi^2 x \cdot (\tau\varepsilon\mu^2 x - 1)dx$$

$$= \int \varepsilon\varphi^2 x \cdot \tau\varepsilon\mu^2 x dx - \int \varepsilon\varphi^2 x dx$$

$(\varepsilon\varphi x)' = \tau\varepsilon\mu^2 x$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon\varphi^3 x - I_2$$

και τέλος, για το I_2:

$$I_2 = \int \varepsilon\varphi^2 x dx = \int \boldsymbol{(\tau\varepsilon\mu^2 x - 1)dx = \varepsilon\varphi x - x + c_1}$$

και αρα

$$\boxed{\boldsymbol{I_6 = \frac{1}{5}\varepsilon\varphi^5 x - \frac{1}{2}\varepsilon\varphi^3 x + \varepsilon\varphi x - x + c}}$$