Ορισμός 0.0.1 *Στο $\mathbb{C}^n$, θέτουμε*

$$\eta(z) := \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1} z_j dz_1 \wedge \ldots \wedge (j) \wedge \ldots \wedge dz_n,$$

όπου με (j) εννοούμε οτι απουσιάζει ο όρος z_j. Η Διαφορική Μορφή η λέγεται Διαφορική Μορφή Leray και η σημασία της θα φανεί μέσω των επόμενων παρατηρήσεων:

$$\begin{aligned}
\eta(z) &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1} z_j dz_1 \wedge \ldots \wedge (j) \wedge \ldots \wedge dz_n \\
\Rightarrow d\eta(z) &= d\left(\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1} z_j dz_1 \wedge \ldots \wedge (j) \wedge \ldots \wedge dz_n\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1} dz_j \wedge dz_1 \wedge \ldots \wedge (j) \wedge \ldots \wedge dz_n \\
&= \sum_{j=1}^{n} dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_j \wedge \ldots \wedge dz_n \\
&= n dz_1 \wedge dz_2 \wedge \ldots \wedge dz_n
\end{aligned}$$

και θέτοντας $w(z) := dz_1 \wedge dz_2 \wedge \ldots \wedge dz_n$, η τελευταία σχέση γράφεται

$$\eta(z) = nw(z).$$

Εντελώς ανάλογα, βλέπουμε οτι

$$\eta(\overline{z}) = nw(\overline{z}),$$

δηλ. $d\eta(\overline{z}) = \overline{\partial}\eta(\overline{z}) = nw(\overline{z})$. Τώρα, για κάθε $z_0 \in \mathbb{C}^n$ και για κάθε $r > 0$, από το Θεώρημα του Stokes έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\mathbb{B}(z_0,r)} \eta(\overline{z}) \wedge w(z) &= \int_{\mathbb{B}(z_0,r)} d[\eta(\overline{z}) \wedge w(z)] \\
&= \int_{\mathbb{B}(z_0,r)} [\overline{\partial}\eta(\overline{z})] \wedge w(z) \\
&= n\int_{\mathbb{B}(z_0,r)} w(\overline{z}) \wedge w(z).
\end{aligned}$$

Όμως,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{B}(z_0,r)} w(\overline{z}) \wedge w(z) &= r^{2n}\int_{\mathbb{B}(0,1)} w(\overline{z}) \wedge w(z) \\
&= r^{2n}\int_{\mathbb{B}(0,1)} (-1)^{\binom{n}{2}}(dz_1 \wedge d\overline{z}_1) \wedge \ldots \wedge (dz_n \wedge d\overline{z}_n) \\
&= (-1)^{\binom{n}{2}} r^{2n}(2i)^n \int_{\mathbb{B}(0,1)} dVol(z) \\
&= (-1)^{\frac{n^2-n}{2}} \cdot r^{2n} \cdot (2i)^n \cdot Vol(\mathbb{B}(0,1)).
\end{aligned}$$

0.0.1 Ο τύπος των Bochner-Martinelli

Θεώρημα 0.0.1 *Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ένα ανοικτό σύνολο με C^1 σύνορο. Έστω επίσης $f \in C^1(\overline{\Omega})$. Τότε, για κάθε $z \in \Omega$ ισχύει*

$$f(z) = \frac{1}{nW(n)} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)\eta(\overline{\zeta} - \overline{z}) \wedge \omega(\zeta)}{|\zeta - z|^{2n}} - \frac{1}{nW(n)} \int_{\Omega} \frac{\overline{\partial} f(\zeta)}{|\zeta - z|^{2n}} \wedge \eta(\overline{\zeta} - \overline{z}) \wedge \omega(\zeta)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ
Έστω $z \in \Omega$ σταθεροποιημένο και $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε $0 < \epsilon < \text{dist}(z, \partial\Omega)$. Έστω

$$\Omega_\epsilon := \{\zeta \in \Omega : |\zeta - z| > \epsilon\} = \Omega \setminus \overline{\mathbb{B}(z,\epsilon)}.$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Stokes στο Ω_ϵ, στη μορφή

$$u(\zeta) := \frac{f(\zeta)\eta(\overline{\zeta} - \overline{z}) \wedge \omega(\zeta)}{|\zeta - z|^{2n}},$$

παίρνουμε

$$\int_{\partial\Omega} u(\zeta) - \int_{\partial\overline{\mathbb{B}(z,\epsilon)}} u(\zeta) = \int_{\Omega_\epsilon} d(u(\zeta)). \tag{1}$$

Όμως,

$$\begin{aligned} d(u(\zeta)) &= \partial u(\zeta) + \overline{\partial} u(\zeta) = \overline{\partial} u(\zeta) \\ &= \frac{\overline{\partial} f(\zeta) \wedge \eta(\overline{\zeta} - \overline{z}) \wedge \omega(\zeta)}{|\zeta - z|^{2n}} + f(\zeta) \cdot \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}_j} \left(\frac{\overline{\zeta}_j - \overline{z}_j}{|\zeta - z|^{2n}}\right)\right] \omega(\overline{\zeta}) \wedge \omega(\zeta) \end{aligned} \tag{2}$$

(3)

Όμως,

$$\frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}_j} \left(\frac{\overline{\zeta}_j - \overline{z}_j}{|\zeta - z|^{2n}}\right) = \frac{1}{|\zeta - z|^{2n}} - n\frac{|\overline{\zeta}_j - \overline{z}_j|^2}{|\zeta - z|^{2n+2}},$$

[αφού] άρα,

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}_j} \left(\frac{\overline{\zeta}_j - \overline{z}_j}{|\zeta - z|^{2n}}\right) = n\frac{1}{|\zeta - z|^{2n}} - n\sum_{j=1}^n \frac{|\overline{\zeta}_j - \overline{z}_j|^2}{|\zeta - z|^{2n+2}} = 0.$$

Συνεπώς η (2) γίνεται

$$d(u(\zeta)) = \frac{\overline{\partial} f(\zeta) \wedge \eta(\overline{\zeta} - \overline{z}) \wedge \omega(\zeta)}{|\zeta - z|^{2n}}.$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν στην (1), έχουμε

$$\int_{\partial\Omega} u(\zeta) - \int_{\partial\overline{\mathbb{B}(z,\epsilon)}} u(\zeta) = \int_{\Omega_\epsilon} \frac{\overline{\partial} f(\zeta) \wedge \eta(\overline{\zeta} - \overline{z}) \wedge \omega(\zeta)}{|\zeta - z|^{2n}}.$$

Ακολούθως

$$\int_{\partial\overline{\mathbb{B}(z,\epsilon)}} u(\zeta) = f(z)\int_{\partial\overline{\mathbb{B}(z,\epsilon)}} \frac{\eta(\overline{\zeta}-\overline{z})\wedge\omega(\zeta)}{|\zeta-z|^{2n}} + \int_{\partial\overline{\mathbb{B}(z,\epsilon)}} \frac{(f(\zeta)-f(z))\eta(\overline{\zeta}-\overline{z})\wedge\omega(\zeta)}{|\zeta-z|^{2n}}.$$

Αφού $|f(\zeta)-f(z)| < C|\zeta-z|$, και κάθε όρος της $\eta(\overline{\zeta}-\overline{z})$ έχει έναν παράγοντα από κάποιο $(\overline{\zeta}_j-\overline{z}_j)$, έπεται οτι στο δεύτερο ολοκλήρωμα η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι της τάξεως του $|\zeta-z|^{-2n+2} \approx \epsilon^{-2n+2}$ και αφού το χωρίο πάνω στο οποίο γίνεται η ολοκλήρωση έχει εμβαδόν$\approx \epsilon^{-2n+2}$, έπεται οτι

$$\int_{\partial\overline{\mathbb{B}(z,\epsilon)}} \frac{(f(\zeta)-f(z))\eta(\overline{\zeta}-\overline{z})\wedge\omega(\zeta)}{|\zeta-z|^{2n}} \overset{\epsilon\to 0+}{\longrightarrow} 0.$$

Επίσης, από το Λήμμα έχουμε οτι

$$\begin{aligned}\int_{\partial\overline{\mathbb{B}(z,\epsilon)}} \frac{\eta(\overline{\zeta}-\overline{z})\wedge\omega(\zeta)}{|\zeta-z|^{2n}} &= \epsilon^{-2n} f(z)\int_{\partial\overline{\mathbb{B}(z,\epsilon)}} \eta(\overline{\zeta}-\overline{z})\wedge\omega(\zeta)\\ &= n\epsilon^{-2n} f(z)\int_{\partial\overline{\mathbb{B}(z,\epsilon)}} \omega(\overline{\zeta})\wedge\omega(\zeta)\\ &= nW(n)f(z).\end{aligned}$$

Τέλος, αφού η$\overline{\partial} f$ είναι φραγμένη και η παράσταση $\left|\frac{\eta(\overline{\zeta}-\overline{z})}{|\zeta-z|^{2n}}\right|$ είναι της τάξεως του $|\zeta-z|^{-2n+1}$, έπεται οτι το $\int_{\Omega_\epsilon} \frac{\overline{\partial} f(\zeta)\wedge\eta(\overline{\zeta}-\overline{z})\wedge\omega(\zeta)}{|\zeta-z|^{2n}}$ συγκλίνει απόλυτα καθώς το $\epsilon \to 0+$.
Έπεται λοιπόν οτι

$$f(z) = \frac{1}{nW(n)}\int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)\eta(\overline{\zeta}-\overline{z})\wedge\omega(\zeta)}{|\zeta-z|^{2n}} - \frac{1}{nW(n)}\int_{\Omega} \frac{\overline{\partial} f(\zeta)}{|\zeta-z|^{2n}}\wedge\eta(\overline{\zeta}-\overline{z})\wedge\omega(\zeta).$$

Πόρισμα 0.0.1 *Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ φραγμένο με C^1 σύνορο και $f \in C^1(\overline{\Omega})$ με $\overline{\partial} f = 0$ στο Ω. Τότε,*

$$f(z) = \frac{1}{nW(n)}\int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)\eta(\overline{\zeta}-\overline{z})\wedge\omega(\zeta)}{|\zeta-z|^{2n}}. \tag{4}$$

Παρατηρήσεις

1. Για $n = 1$, η (4) γίνεται

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z},$$

ο οποίος είναι ο Ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy στη μια μεταβλητή. Αυτό είναι εντελώς αναμενόμενο, γιατι η υπόθεση $\overline{\partial} f = 0$ είναι οι εξισώσεις C-R.

2. Ο πυρήνας Cauchy (:η $z \mapsto 1/(\zeta - z)$) είναι ολόμορφη συνάρτηση ως προς z. Το γεγονός αυτό μας επιτρέπει να κατασκευάζουμε ολόμορφες συναρτήσεις ολοκληρώνοντας τον πυρήνα αυτό ως προς κάποιο μέτρο. Τα πράγματα αλλάζουν όμως στις πολλές μεταβλητές:ο αντίστοιχος πυρήνας

$$\frac{1}{|\zeta-z|^{2n}}$$

δεν είναι ολόμορφος, παρόλο που στο προηγούμενο πόρισμα βλέπουμε οτι δημιουργεί ολόμορφες (δηλ. $\overline{\partial}$-κλειστές) συναρτήσεις. Η Δ.Μ.

$$\frac{\eta(\overline{\zeta} - \overline{z}) \wedge \omega(\zeta)}{|\zeta - z|^{2n}}$$

είναι $\overline{\partial}$-κλειστή ως προς z ($z \neq \zeta$), αλλά όπως είπαμε δεν είναι ολόμορφη (ως προς z). Δηλ. αυτή είναι μια $\overline{\partial}$-κλειστή Δ.Μ. μακριά απ'το σημείο που υπαρχει η ανωμαλία, οι συντελεστές της όμως δεν είναι ολόμορφες συναρτήσεις.

3. Από το τελευταίο πόρισμα συμπεραίνουμε οτι μια $\overline{\partial}$-κλειστή συνάρτηση είναι C^∞ αφού μπορούμε να παραγωγίσουμε κάτω απ'το ολοκλήρωμα όσες φορές θέλουμε.