Εισαγωγικές Εξετάσεις 2018 [Μέρος Β / Άσκηση 1]

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = (1 - x)e^{2x}$. Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού της, τα σημεία τομής με τους άξονες, τα διαστήματα μονοτονίας, τα ακρότατα και τις ασύμπτωτές της, να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

Λύση του ΥΠΠΑΝ: http://archeia.moec.gov.cy/mc/46/2018_05_25_037_lyseis.pdf

Προτεινόμενη Λύση[1]

Εύρεση Π.Ο. της συνάρτησης

Η συνάρτηση f γράφεται ως $h \cdot g$ όπου h και g οι συναρτήσεις με τύπους $h(x) = 1 - x$ και $g(x) = e^{2x}$ αντίστοιχα. Συνεπώς, $D(f) = D(g) \cap D(h)$. Αλλά, $D(g) = \mathbb{R} = D(h)$ και αρα $D(f) = \mathbb{R}$

Σημεία τομής με τους άξονες

Αφού $e^{2x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι $f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Επίσης, $f(0) = 1$. Έτσι, τα σημεία τομής με τους άξονες είναι τα (0,1) και (1,0).

Εύρεση διαστημάτων μονοτονίας+ακρότατα

Η f είναι συνεχής συνάρτηση και ιδιαίτερα παντού παραγωγίσιμη με

$$\frac{dy}{dx} \equiv f'(x) = (1 - 2x)e^{2x}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Τα **κρίσιμα** σημεία είναι τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία $f'(x) = 0$, δηλ. το σημείο με $x = \frac{1}{2}$. Έτσι,

$\forall x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ είναι $f'(x) > 0$ και αρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό και $\forall x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ είναι $f'(x) < 0$ και αρα η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Επιπλέον, λόγω της συνέχειας της συνάρτησης στο σημείο $x = \frac{1}{2}$, μπορούμε να πούμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Τώρα, αφού $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, έπεται από το κριτήριο 1ης παραγώγου ότι το γράφημα της συνάρτησης λαμβάνει τοπικό μέγιστο στο $\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{e}{2}\right)$.

Συνοπτικά ΚΑΙ ΜΟΝΟ, έχουμε τον πίνακα μεταβολών της f'

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$
		max	

Έλεγχος Κυρτότητας

Έχουμε $\forall x \in \mathbb{R}$

[1] Επιπρόσθετα, βρίσκουμε και τα σημεία καμπής του γραφήματος της συνάρτησης

$$\frac{d^2y}{dx^2} \equiv f''(x) = -4xe^{2x}$$

και αρα $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$ Έτσι,

$\forall x \in (-\infty, 0)$ είναι $f''(x) > 0$ (άρα στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω) και $\forall x \in (0, +\infty)$ είναι $f''(x) > 0$ (αρα στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω) και αρα, αφου $f''(0) = 0$, από γνωστό μας Θεώρημα, η συνάρτηση θα έχει σημείο καμπής το $\big(0, f(0)\big) = (0,1)$.

Σημείωση (εναλλακτικά)

Αφού $f''\left(\frac{1}{2}\right) = -2e < 0$, από το **κριτήριο δευτέρας παραγώγου**, η συνάρτηση θα έχει Τοπικό Μέγιστο στο σημείο $\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{e}{2}\right)$.

Εύρεση ασυμπτώτων

Λόγω της συνέχειας της συνάρτησης, έχουμε ότι το γράφημα αυτής δεν παρουσιάζει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Τώρα,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(1-x)e^{2x} = \left(\lim_{x\to+\infty}(1-x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to+\infty} e^{2x}\right) = (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty$$

και

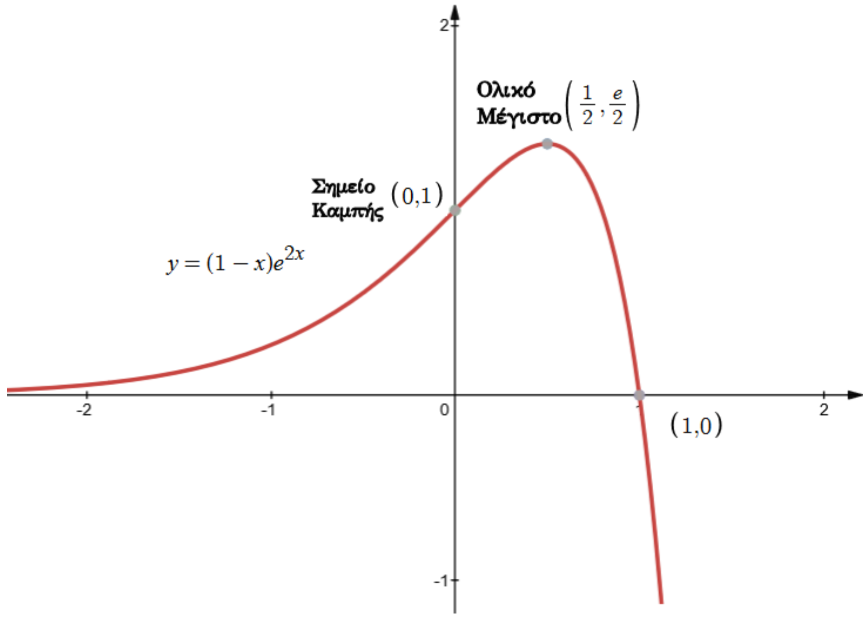
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(1-x)e^{2x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1-x}{e^{-2x}}$$

το οποίο αποτελεί απροσδιοριστία τύπου $\frac{+\infty}{+\infty}$ αφου $\lim_{x\to-\infty}(1-x) = +\infty$ και $\lim_{x\to-\infty} e^{-2x} = +\infty$ και αρα, εφαρμόζοντας κανόνα του De L'Hopital,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1-x}{e^{-2x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2e^{-2x}} = 0.$$

Έτσι, ο άξονας των τετμημένων είναι *οριζόντια ασύμπτωτή της στο* $-\infty$. Τέλος, αφού

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 \\ \left(\frac{1}{2}, \frac{e}{2}\right)\ \text{μοναδικό } T.M. \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{e}{2}\right)\ \text{ολικό μέγιστο}$$


Ολικό
Μέγιστο $\left(\frac{1}{2}, \frac{e}{2}\right)$
Σημείο
Καμπής $(0,1)$
$y = (1-x)e^{2x}$
$(1,0)$
2
-1
-2
-1
0
2