

### Θεώρημα 1

Έστω  $f$  μια συνεχής και 1-1 συνάρτηση σε ένα ανοικτό διάστημα  $I = (a, \beta)$ . Τότε η  $f$  είναι γνησίως μονότονη.

#### Απόδειξη

Έστωσαν  $x_1, x_2 \in I$  με  $x_1 < x_2$ . Τότε, αφού  $f$  1-1, θα είναι είτε  $f(x_1) < f(x_2)$  είτε  $f(x_1) > f(x_2)$ . Υποθέτουμε ότι ισχύει το πρώτο και θα αποδείξουμε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα. Έστωσαν  $y_1, y_2 \in I$  με  $y_1 < y_2$  και διαφορετικά με τα  $x_1, x_2$ . Θεωρούμε τα ευθύγραμμα τμήματα  $x$  και  $y$  που ενώνουν τα σημεία  $x_1, y_1$  και  $x_2, y_2$  αντίστοιχα. Αυτά έχουν παραμετρικοποιήσεις

$$x(t) = ty_1 + (1-t)x_1 \text{ και } y(t) = ty_2 + (1-t)x_2, \quad t \in [0,1]$$

αντίστοιχα. Είναι για κάθε  $t \in [0,1]$ ,  $a < x(t) < y(t) < \beta$ . Θεωρούμε η συνάρτηση  $g$  με τύπο

$$g(t) = f(y(t)) - f(x(t))$$

η οποία είναι συνεχής στο  $[0,1]$  ως σύνθεση συνεχών. Αφού η  $f$  είναι 1-1, έπεται ότι  $g(t) \neq 0, \forall t \in [0,1]$  και άρα από το ΘΕΤ, η  $g$  δεν μπορεί να αλλάξει πρόσημο. Αλλά,  $g(0) = f(y(0)) - f(x(0)) = f(x_2) - f(x_1)$  και  $g(1) = f(y(1)) - f(x(1)) = f(y_2) - f(y_1) > 0$ , δηλ.  $f(y_2) > f(y_1)$ . Ομοίως, αποδεικνύουμε ότι αν  $f(x_1) > f(x_2)$  η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα.  $\square$

Έτσι, μια συνεχής και 1-1 συνάρτηση σε ένα ανοικτό διάστημα θα είναι είτε γνησίως αύξουσα είτε γνησίως φθίνουσα σε αυτό.

#### Παράδειγμα

Αν  $a \neq 0$  και  $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ , τότε είδαμε ότι η (συνεχής) συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$  δεν είναι 1-1. Αυτό είναι άμεσο από το πιο πάνω αποτέλεσμα, αφού αν η συνάρτηση  $f$  ήταν 1-1, τότε θα ήταν γνησίως μονότονη, άτοπο.

### Θεώρημα 2

Έστω  $f: (a, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  μια παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε  $f' \geq 0, \forall x \in (a, \beta)$ . Αν το σύνολο

$$Z(f) \equiv \{x \in (a, \beta) | f'(x) = 0\}$$

είναι διακριτό (αποτελείται από μεμονωμένα σημεία), τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα (στο  $(a, \beta)$ ) αλλά και αντίστροφα.

#### Απόδειξη

[Η υπόθεση ότι το σύνολο  $Z(f) \equiv \{x \in (a, \beta) | f'(x) = 0\}$  είναι διακριτό είναι ισοδύναμη με την υπόθεση ότι το σύνολο αυτό έχει κενό εσωτερικό.]

Υποθέτουμε ότι το σύνολο  $Z(f)$  έχει κενό εσωτερικό. Υποθέτουμε ότι η  $f$  δεν είναι γνησίως αύξουσα (στο  $(a, \beta)$ ). Τότε, υπάρχουν  $c, d \in (a, \beta)$  με  $c < d$  τέτοια ώστε  $f(c) \geq f(d)$ . Τότε,  $f(c) = f(d)$  και ιδιαίτερα,  $f(c) = f(x) = f(d)$  για κάθε  $x \in (c, d)$ . Συνεπώς,  $f'(x) = 0, \forall x \in (c, d)$ , δηλ. το σύνολο  $Z(f)$  έχει μη κενό εσωτερικό, άτοπο.

**Αντίστροφα**, υποθέτουμε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα (στο  $(a, \beta)$ ). Έστω ότι το σύνολο  $Z(f)$  έχει μη κενό εσωτερικό. Τότε υπάρχει ένα (ανοικτό) διάστημα  $(c, d)$  τέτοιο ώστε να είναι  $f'(x) = 0, \forall x \in (c, d)$ . Τότε, η  $f$  είναι σταθερή στο σύνολο αυτό και άρα όχι γνησίως αύξουσα, άτοπο.  $\square$

#### Παράδειγμα

Έστω η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = x + \eta \mu x$ . Είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγισίμων με  $f'(x) = 1 + \sigma \nu x$ . Είναι

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

και αρα το σύνολο  $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$  είναι το σύνολο με τα κρίσιμα σημεία της  $f$  το οποίο είναι διακριτό (περιέχει μεμονωμένα (isolated) σημεία). Επίσης, για  $x \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ , έχουμε ότι  $f'(x) = 1 + \sin x > 0$  αφού  $|\sin x| < 1$  στο σύνολο αυτό. Συνεπώς, σύμφωνα με το πιο πάνω Θεώρημα, η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα παντού.

### Παρατήρηση

Μια διαφορίσιμη συνάρτηση  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  είναι μή-φθίνουσα αν και μόνο αν  $f'(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in (a, b)$ . Όμως, η συνθήκη  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in (a, b)$  για μια διαφορίσιμη συνάρτηση  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  είναι αρκετή αλλά όχι ικανή για να είναι η  $f$  γνησίως αύξουσα. Το τελευταίο όμως Θεώρημα μας δίνει και μια ικανή συνθήκη. Υπάρχουν παραδείγματα γνησίως μονότονων συναρτήσεων με άπειρα κρίσιμα σημεία εντός ενός κλειστού και φραγμένου διαστήματος. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot (2 - \eta\mu(\ln x) - \sigma\upsilon\nu(\ln x)), & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι  $f'(x) \geq 0, \forall x \in (0, 1]$  και  $Z(f') = \{e^{-2n\pi}, n \in \mathbb{N}\}$  το οποίο σύνολο έχει σημείο συσσώρευσης το  $x = 0$  στο οποίο η συνάρτηση είναι συνεχής αλλά όχι παραγωγίσιμη.

### Πρόταση 1

Έστω  $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Τότε

- i. Η  $f$  είναι 1-1 και επί του συνόλου  $[f(\alpha), f(\beta)]$
- ii. Η  $f^{-1}: [f(\alpha), f(\beta)] \rightarrow [\alpha, \beta]$  είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση.

### Απόδειξη

- i. Κατ'αρχάς, δεν μπορεί να είναι  $f(\alpha) = f(\beta)$ , αφού  $\alpha < \beta$  και η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα. Επίσης,  $f(\alpha), f(\beta) \in R(f)$ . Ακόμα, από γνωστό μας αποτέλεσμα έπεται ότι η  $f$  είναι 1-1. Θα δείξουμε ότι είναι επί του συνόλου  $[f(\alpha), f(\beta)]$ . Έστω  $y \in [f(\alpha), f(\beta)]$ . Τότε, από το ΘΕΤ στο  $[\alpha, \beta]$ , υπάρχει  $\xi \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο ώστε  $f(\xi) = y$ . Συνεπώς,  $[f(\alpha), f(\beta)] \subseteq R(f)$ . Αντίστροφα, αφού η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση, έπεται ότι αν  $x \in [\alpha, \beta]$ , τότε  $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$ , δηλ.  $f(x) \in [f(\alpha), f(\beta)]$ . Συνεπώς,  $R(f) \subseteq [f(\alpha), f(\beta)]$ . Έτσι,  $[f(\alpha), f(\beta)] = R(f)$ , δηλ.  $f([\alpha, \beta]) = [f(\alpha), f(\beta)]$ .

- ii. Η  $f$  είναι 1-1 και επί αρα αντιστρέφεται. Από το Θεώρημα 2, έχουμε ότι η  $f$  είναι γνησίως μονότονη. Υποθέτουμε χωρίς απώλεια της γενικότητας ότι είναι γνησίως αύξουσα. Έστω  $y_0 \in [f(\alpha), f(\beta)]$ . Τότε, από το πρώτο ερώτημα, έχουμε ότι υπάρχει  $x_0 \in [\alpha, \beta]$  με  $y_0 = f(x_0)$ . Θα δείξουμε ότι  $\lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) = x_0$ . Έστω  $\varepsilon > 0$ . Αν  $x_0 \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ , τότε, αφού η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα, έπεται ότι  $f(x_0) \in (f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon))$ . Επιλέγουμε

$$\delta = \min\{f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon), f(x_0) - f(x_0 + \varepsilon)\} \equiv \delta(\varepsilon).$$

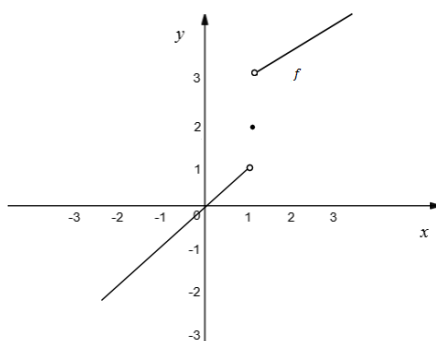
Τότε  $f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) - \delta$  και  $f(x_0) + \delta < f(x_0 + \varepsilon)$ . Συνεπώς, αν  $y \in (f(x_0) - \delta, f(x_0) + \delta)$ , τότε  $y \in (f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon))$ . Έτσι, έπεται ότι η  $f^{-1}$  είναι γνησίως αύξουσα και αρα  $f^{-1}(y) \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ . Επίσης, δείξαμε ότι αν δείξαμε ότι αν  $|y - y_0| < \delta$ , τότε  $|x - x_0| < \varepsilon$ , δηλ.  $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$  και αρα  $\lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) = x_0$ , ήτοι η  $f^{-1}$  είναι γνησίως αύξουσα.

□

**Θεώρημα 3** (Κριτήριο Δευτέρας Παραγώγου)

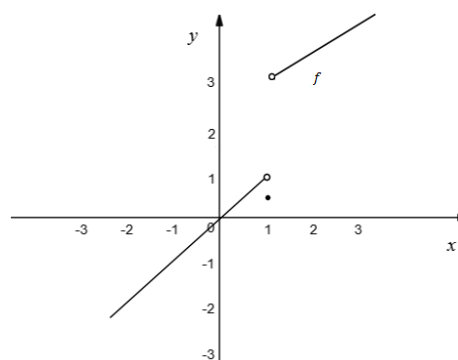
Έστω  $f$  μια συνάρτηση δυο φορές παραγωγίσιμη σε ένα σημείο της  $x_0$  με  $f'(x_0) = 0$ . Τότε:

- Αν  $f''(x_0) > 0$ , τότε η  $f$  λαμβάνει τοπικό ελάχιστο στο σημείο  $x_0$
- Αν  $f''(x_0) < 0$ , τότε η  $f$  λαμβάνει τοπικό μέγιστο στο σημείο  $x_0$

**Παράδειγμα**

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 < 2 = f(1) < 3 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

Η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση



$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 < f(1) \text{ και } f(1) > 3 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

Η  $f$  δεν είναι γνησίως μονότονη συνάρτηση

**Διαδικασία Εύρεσης Ακροτάτων Συνεχούς συνάρτησης σε κλειστό διάστημα**

Η Διαδικασία Εύρεσης Ακροτάτων Συνεχούς συνάρτησης σε κλειστό διάστημα που θα δούμε αμέσως τώρα αφεύλεται στο **Θεώρημα Μέγιστης/Ελάχιστης Τιμής**.

Έστω  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνεχής συνάρτηση.

**Βήμα 1:** Προσδιορίζουμε τα κρίσιμα σημεία της  $f$  στο (ανοικτό) διάστημα  $(a, b)$ .

**Βήμα 2:** Προσδιορίζουμε τις τιμές της  $f$  στα κρίσιμα σημεία της αλλά και στα άκρα της  $a$  και  $b$ .

**Βήμα 3:** Η μέγιστη τιμή των τιμών στο προηγούμενο βήμα είναι το (ολικό) μέγιστο της  $f$  στο (κλειστό) διάστημα  $[a, b]$  ενώ η ελάχιστη τιμή των τιμών στο προηγούμενο βήμα είναι το (ολικό) ελάχιστο της  $f$  στο (κλειστό) διάστημα  $[a, b]$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ**

1. Θα βρούμε τα απόλυτα μέγιστα/ελάχιστα των πιο κάτω συναρτήσεων στα διαστήματα που δίνονται:

i.  $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 1, x \in [-2, 3]$

Η  $f$  ως πολυώνυμο είναι συνεχής και παραγωγίσιμη (παντού). Στο κλειστό διάστημα  $[-2, 3]$ , η  $f$  λαμβάνει (απόλυτο) μέγιστο και (απόλυτο) ελάχιστο. Έχουμε  $\forall x \in [-2, 3]$

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2) = 12x(x - 2)(x + 1)$$

και άρα  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1, 0, 2$ . Στα κρίσιμα αυτά σημεία είναι  $f(0) = 1, f(-1) = -4$  και  $f(2) = -3$  ενώ στα άκρα του διαστήματος  $[-2, 3]$  είναι  $f(-2) = 33$  και  $f(3) = 37$ . Συνεπώς, το απόλυτο μέγιστο λαμβάνεται στο σημείο  $(3, f(3)) = (3, 37)$  ενώ το απόλυτο ελάχιστο λαμβάνεται στο σημείο  $(2, f(2)) = (2, -31)$

ii.  $g(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1}, x \in [0, 3]$

Αφού  $x^2 - x + 1 \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ , η  $g$  ορίζεται σε όλο το  $\mathbb{R}$ . Είναι δε παραγωγίσιμη παντού και μάλιστα

$$g'(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(x^2 - x + 1)^2}$$

και

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ . Στα κρίσιμα αυτά σημεία είναι  $g(-1) = -\frac{1}{3}$  και  $g(1) = 1$  ενώ στα άκρα του διαστήματος  $[0,3]$  είναι  $g(0) = 0$  και  $g(3) = \frac{3}{7}$ . Συνεπώς, το απόλυτο μέγιστο λαμβάνεται στο σημείο  $(1, g(1)) = (1, 1)$  ενώ το απόλυτο ελάχιστο λαμβάνεται στο σημείο  $(-1, g(-1)) = (-1, -1/3)$

iii.  $h(x) = (x-8) \cdot \sqrt[3]{x}, x \in [0,8]$

Η συνάρτηση  $h$  είναι καλά ορισμένη αφού  $x \in [0,8]$  όπου και έχει νόημα η κυβική ρίζα. Η  $h$  είναι συνεχής στο  $[0,8]$  και παραγωγίσιμη στο  $(0,8]$ . Έτσι, το  $x = 0$  είναι κρίσιμο σημείο. Τώρα, για  $x \in (0,8]$ ,

$$h'(x) = \frac{8}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}}(2-x) = \frac{4(2-x)}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

και άρα  $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ . Στο κρίσιμο αυτό σημείο είναι  $h(2) = 6\sqrt[3]{2} \approx 7.56$  ενώ στα άκρα του διαστήματος  $[0,8]$  είναι  $h(0) = 0$  και  $h(8) = 0$ . Συνεπώς, το απόλυτο μέγιστο λαμβάνεται στο σημείο  $(2, h(2)) = (2, 7.56)$  ενώ το απόλυτο ελάχιστο λαμβάνεται στο σημείο  $(0, h(8)) = (0, 0)$ .

iv.  $i(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu(2x), x \in [0, \pi/2]$

Η  $i$  είναι συνεχής και παραγωγίσιμη (παντού). Τώρα, για  $x \in [0, \pi/2]$ ,

$$i'(x) = -2\eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu(2x)$$

και άρα  $i'(x) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu(2x)$ . Αλλά,

$$\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu(2x) \Leftrightarrow \eta\mu x = 1 - 2\eta\mu^2 x \Leftrightarrow 2\eta\mu^2 x + \eta\mu x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\eta\mu x - 1)(\eta\mu x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left(\eta\mu x = \frac{1}{2}\right) \vee (\eta\mu x = -1)$$

$$x \in [0, \pi/2] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

Είναι

$$i\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6}\right) + \eta\mu\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad i(0) = 2\sigma\upsilon\nu(0) + \eta\mu(0) = 2 \text{ και } i\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}\right) + \eta\mu(\pi) = 0.$$

Έτσι, το απόλυτο μέγιστο λαμβάνεται στο σημείο  $(2, h(2)) = (2, 7.56)$  ενώ το απόλυτο ελάχιστο λαμβάνεται στο σημείο  $\left(\frac{\pi}{6}, i\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$  ενώ το απόλυτο ελάχιστο λαμβάνεται στο σημείο  $\left(\frac{\pi}{2}, i\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

v.  $\kappa(x) = x^2 \cdot e^{-\frac{x}{2}}, x \in [-1,6]$

Η  $\kappa$  είναι συνεχής και παραγωγίσιμη (παντού στο  $[-1,6]$ ). Τώρα, για  $x \in [-1,6]$ ,

$$\kappa'(x) = x \cdot e^{-\frac{x}{2}} \left(2 - \frac{x}{2}\right)$$

και άρα  $\kappa'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, 4$ . Στα κρίσιμα αυτά σημεία είναι  $\kappa(0) = 0$  και  $\kappa(4) = 16 \cdot e^{-4} \approx 9.7$  ενώ στα άκρα του διαστήματος  $[-1,6]$  είναι και  $\kappa(-1) = \sqrt{e} \approx 1.6487$  και  $\kappa(6) = 36 \cdot e^{-3} \approx 1.7923$ . Συνεπώς, το απόλυτο μέγιστο λαμβάνεται στο σημείο  $(4, \kappa(4)) = (4, 9.7)$  ενώ το απόλυτο ελάχιστο λαμβάνεται στο σημείο  $(0, \kappa(0)) = (0, 0)$ .

2. Θα δείξουμε ότι  $\eta\mu x \leq x, \forall x \in [0, 2\pi]$ . Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = x - \eta\mu x, x \in [0, 2\pi]$ . Είναι παραγωγίσιμη και  $f'(x) = 1 - \sigma\upsilon\nu x, x \in [0, 2\pi]$ . Έχουμε  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, 2\pi$  (στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ ).

Παρατηρούμε ότι  $f'(x) \geq 0, \forall x \in [0, 2\pi]$  και άρα η συνάρτηση είναι αύξουσα στο διάστημα αυτό. Επειδή είναι συνεχής, ελέγχουμε τις τιμές στα άκρα του διαστήματος:  $f(0) = 0$  και  $f(2\pi) = 2\pi$ . Δηλ.

$$\max_{x \in [0, 2\pi]} f(x) = 2\pi \text{ και } \min_{x \in [0, 2\pi]} f(x) = 0$$

Συνεπώς,  $f(x) \geq 0, \forall x \in [0, 2\pi]$ , δηλ.  $\eta\mu x \leq x, \forall x \in [0, 2\pi]$ .

3. Θα βρούμε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $f$  με τύπο  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$  στο διάστημα  $\left[-\frac{1}{2}, 4\right]$ . Η συνάρτηση είναι συνεχής (και παραγωγίσιμη) στο (κλειστό) διάστημα  $\left[-\frac{1}{2}, 4\right]$  με

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

Είναι  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, 2 \in \left[-\frac{1}{2}, 4\right]$ . Στα σημεία αυτά, η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικά ακρότατα. Είναι

$$f(0) = 1, \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}, \quad f(2) = -3 \text{ και } f(4) = 17$$

και άρα

$$\max_{x \in \left[-\frac{1}{2}, 4\right]} f(x) = f(4) = 17 \text{ και } \min_{x \in \left[-\frac{1}{2}, 4\right]} f(x) = f(2) = -3$$

### Παρατήρηση

- i. Η απαίτηση  $f' > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο του  $I$  είναι αναγκαία γιατί στα άκρα του διαστήματος δεν ξέρουμε τι γίνεται αλλά ούτε και μας ενδιαφέρει ως προς τον έλεγχο της μονοτονίας (στην περίπτωση συνεχούς συνάρτησης).
- ii. Το αντίστροφο του πιο πάνω θεωρήματος δεν ισχύει εν γένει. Για παράδειγμα η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = x^3$  είναι παραγωγίσιμη παντού και μάλιστα  $f'(0) = 0$ , όμως, η συνάρτηση είναι παντού γνησίως αύξουσα.
- iii. Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα σημείο  $x_0$  στο οποίο λαμβάνει τοπικό μέγιστο, τότε δε σημαίνει ότι η συνάρτηση είναι αύξουσα αριστερά και φθίνουσα δεξιά του σημείου αυτού. Για παράδειγμα, θεωρήστε τη συνάρτηση  $f$  με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \eta\mu^2\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

και  $x_0 = 0$ .

- iv. Οι υποθέσεις της συνέχειας στο σύνολο και της παραγωγισιμότητας στο εσωτερικό του συνόλου είναι πολύ ισχυρές. Γενικά, όπως θα δούμε σε άλλο τόμο, η συνάρτηση μπορεί να έχει ουσιώδεις ανωμαλίες και το αποτέλεσμα να παύει να ισχύει. Επίσης, όπως επίσης θα δούμε αργότερα, το ότι το σύνολο στο οποίο υποτίθεται παραγωγίσιμη η συνάρτηση είναι συνεκτικό είναι ουσιώδης: μια συνάρτηση παραγωγίσιμη με  $f' > 0$  σε ένα ανοικτό συνεκτικό σύνολο είναι γν. αύξουσα σε αυτό.
- v. Δεν απαιτείται η παραγωγισιμότητα της συνάρτησης στο αναφερόμενο σημείο για να έχουμε τοπικό ακρότατο. Θεωρήστε για παράδειγμα τις συναρτήσεις  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$  ή  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $g(x) = |x|$ .

### Ερωτήσεις κατανόησης

- Πόσα το πολύ τοπικά ελάχιστα μπορεί να έχει ένα πολυώνυμο βαθμού 3?

**Απάντηση:** Το πολύ 2, από το θεώρημα στο προηγούμενο κεφάλαιο. Όμως, μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι μπορεί να έχει είτε κανένα είτε ακριβώς 2 τοπικά ακρότατα. Πράγματι, έστω

$$p(x) = ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta \quad (*)$$

Τότε, τα κρίσιμα σημεία της πολυωνυμικής συνάρτησης είναι τα σημεία στα οποία  $p'(x) = 0$  ήτοι τα σημεία στα οποία  $3ax^2 + 2\beta x + \gamma = 0$ . Όμως, το τριώνυμο  $3ax^2 + 2\beta x + \gamma$  έχει διακρίνουσα

$$\Delta = 4(\beta^2 - 3\alpha\gamma)$$

Αν λοιπόν  $\Delta = 0$ , δηλ. το τριώνυμο έχει μια διπλή ρίζα, τότε η  $p'$  δεν αλλάζει πρόσημο και αρα δεν έχει τοπικά ακρότατα. Αν  $\Delta > 0$ , τότε η συνάρτηση έχει ένα τοπικό ελάχιστο και ένα τοπικό μέγιστο. Έτσι, η συνθήκη  $\beta^2 = 3\alpha\gamma$  είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για να μην έχει Τ.Α. ένα πολυώνυμο της μορφής (\*).

➤ Έχουν όλα τα πολυώνυμα ολικά ακρότατα;

**Απάντηση:** ΟΧΙ. Μόνο πολυώνυμα άρτιου βαθμού μπορούν να έχουν ολικά ακρότατα. Για παράδειγμα, η ταυτοτική συνάρτηση ή η  $f(x) = x^3$  δεν έχουν ολικά ακρότατα (είναι γνησίως αύξουσες).

#### Θεώρημα 4

Έστω γνησίως αύξουσα συνάρτηση  $f: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  με σύνολο τιμών ένα διάστημα. Τότε η συνάρτηση είναι συνεχής (στο  $(\alpha, \beta)$ ).

#### Απόδειξη

Κάθε ασυνέχεια της συνάρτησης θα είναι αναγκαστικά άλμα ασυνέχειας. Έστω λοιπόν  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  στο οποίο η συνάρτηση παρουσιάζει άλμα ασυνέχειας. Αν  $y_0^+ = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  και  $y_0^- = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ , τότε τουλάχιστον ένα από τα διαστήματα  $(y_0^-, f(x_0))$  και  $(f(x_0), y_0^+)$  πρέπει να είναι μη κενό. Επιλέγουμε ένα  $I$  από αυτά. Τότε

$$I \subset (y_0^-, y_0^+) \subset (f(\alpha), f(\beta))$$

και αρα το σύνολο τιμών της  $f$  δεν είναι διάστημα, άτοπο.  $\square$

#### Παράδειγμα

Έστω η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = 2^x + 5^x$ ,  $x \in [-1, 1]$ . Θα βρούμε το πεδίο τιμών της  $f$ . Η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα ως άθροισμα τέτοιων και αρα  $R(f) = [f(-1), f(1)] = \left[\frac{11}{2}, 6\right]$ .

Το Θεώρημα Παραγωγίσης Αντίστροφης συνάρτησης λοιπόν ισχύει και στην περίπτωση των γνησίως αυξουσών συναρτήσεων:

#### Θεώρημα 5

Έστω  $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\alpha < \beta$ ) μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση με  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x$  στο εσωτερικό του συνόλου  $[\alpha, \beta]$ . Έστω  $g: f([\alpha, \beta]) \rightarrow [\alpha, \beta]$  η αντίστροφη της  $f$ . Τότε, η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του συνόλου  $f([\alpha, \beta])$  και ισχύει

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} \quad \forall x \text{ στο εσωτερικό του συνόλου } f([\alpha, \beta])$$

#### Παρατήρηση

- Το Θεώρημα ισχύει και για συνεχή και γνησίως αύξουσα συνάρτηση  $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\alpha < \beta$ ) με  $f'(x) < 0$  για κάθε  $x$  στο εσωτερικό του συνόλου  $[\alpha, \beta]$ .

- ii. Το Θεώρημα ισχύει και για οποιοδήποτε διάστημα  $I$ , όχι μόνο της μορφής  $[\alpha, \beta]$ . Πράγματι, έστω  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x$  στο εσωτερικό του διαστήματος  $I$ . Έστω  $y$  σημείο στο εσωτερικό του συνόλου  $R(f)$ . Τότε, μπορούμε να βρούμε σημεία  $p, q$  στο  $R(f)$  με  $y \in (p, q)$ . Τότε, ο περιορισμός της συνάρτησης  $f$  στο διάστημα  $[p, q]$  είναι 1-1 και επί του συνόλου  $[f(p), f(q)]$ . Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Παραγωγίσιμης Αντίστροφης συνάρτησης στον περιορισμό αυτό.

### Ερωτήσεις κατανόησης

- Τί συμπέρασμα βγάζετε για μια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι παραγωγίσιμη αλλά όχι γνησίως μονότονη;

Απάντηση: Είναι σταθερή συνάρτηση:

**Απόδειξη** (Με τη χρήση παραγώγων)

Αφού η  $f$  δεν είναι γνησίως αύξουσα, τότε  $f' \leq 0$  και αφού η  $f$  δεν είναι γνησίως φθίνουσα, τότε  $f' \geq 0$ . Έτσι,  $f' = 0$  και το αποτέλεσμα έπεται από το γνωστό Πρόσχημα του ΘΜΤ.

### Εφαρμογή

Έστω η πολυωνυμική συνάρτηση  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $p(x) = x^{11} + x^8 + x^7 + x^5 + x^3$ . Τότε,

- i. **η  $p$  αντιστρέφεται.** Πράγματι, αφού  $\forall x \in \mathbb{R}$  είναι  $p'(x) = 11x^{10} + 8x^7 + 7x^6 + 5x^4 + 3x^2$ , έπεται ότι  $p'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  και  $p'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$ . Συνεπώς, η  $p$  είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση και άρα, αφού είναι και συνεχής, θα είναι και 1-1. Επιπλέον, αφού

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$$

έχουμε από το ΘΕΤ ότι  $R(p) = \mathbb{R}$ . Συνεπώς είναι και επί. Άρα, τελικά, η  $p$  είναι 1-1 και επί, άρα αντιστρέψιμη.

- ii. **η  $p^{-1}$  είναι συνεχής.** Έπεται από την Πρόταση 1.  
 iii. Επίσης, από το Θεώρημα Παραγωγίσιμης Αντίστροφης συνάρτησης, η  $p^{-1}$  είναι παραγωγίσιμη σε όλα τα σημεία εκτός αυτών τα οποία είναι  $p'(x) = 0$ , δηλ. εκτός στο  $x = 0$ . Έτσι, για  $x \neq 0$  έχουμε

$$(p^{-1})'(y) = \frac{1}{p'(p^{-1}(y))}$$

Θα βρούμε το  $(p^{-1})'(5)$ . Παρατηρούμε ότι  $p(1) = 5$  και άρα,  $1 = p^{-1}(5)$ . Έτσι,

$$(p^{-1})'(5) = \frac{1}{p'(p^{-1}(5))} = \frac{1}{p'(1)} = \frac{1}{34}$$

### Παραδείγματα συναρτήσεων οι οποίες είναι 1-1 αλλά όχι γνησίως μονότονες

Σύμφωνα με προηγούμενο Θεώρημα, η συνάρτησή μας θα πρέπει να έχει ασυνέχειες. Ας δούμε ένα παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης με 1 μόνο ασυνέχεια. Υπάρχει και παράδειγμα με αριθμησιμο πλήθος ασυνεχειών.

- ο Έστω η συνάρτηση  $f: [0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f: [0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1) \\ x - 2, & x \in [1, 2) \end{cases}$$

Η  $f$  είναι 1-1 αλλά όχι γνησίως αύξουσα, αφού  $\frac{3}{2} > \frac{1}{2}$  αλλά  $f\left(\frac{3}{2}\right) < f\left(\frac{1}{2}\right)$ . Το σημείο κλειδί είναι ότι η συνάρτηση έχει άλμα ασυνέχειας στο σημείο  $x = 1$ . Η συνάρτηση αυτή είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα  $[0, 1)$  και  $(1, 2)$  ξεχωριστά αλλά όχι στην ένωσή τους.

- ο Έστω η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

- ο Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ,  $x \neq 0$ . Είδαμε ότι η  $f$  δεν είναι 1-1.

Είναι παραγωγίσιμη στο  $D(f) = \mathbb{R}_*$  και  $\forall x \in \mathbb{R}_*$

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3}$$

Είναι  $f'(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}_*$ . Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμων της  $f'$ :

| $x$  | $-\infty$  | $0$ | $+\infty$  |
|------|------------|-----|------------|
| $f'$ | +          |     | -          |
| $f$  | $\nearrow$ |     | $\searrow$ |

Έτσι,  $f' > 0$  στο διάστημα  $(-\infty, 0)$  και άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό και αφού  $f' < 0$  στο διάστημα  $(0, +\infty)$  έπεται ότι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

**Παράδειγμα** (όχι για λύκειο)

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ -x, & \text{αν } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Η  $f$  είναι 1-1 αλλά ούτε γνησίως αύξουσα ούτε γνησίως φθίνουσα.

**Παράδειγμα συνάρτησης η οποία παρουσιάζει ασυνέχεια αλλά είναι γνησίως μονότονη**

Η  $f$  με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \leq 0 \\ x + 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

είναι γνησίως αύξουσα και έχει ασυνέχεια στο σημείο  $x = 0$ .

### Ασκήσεις προς λύση

1. Η καμπύλη με εξίσωση  $y = \frac{ax+\beta}{x^2-x-2}$ , όπου  $a$  και  $\beta$  είναι σταθερές, έχει στάσιμο σημείο το  $(1,1)$ . Να βρεθούν οι τιμές των σταθερών  $a$  και  $\beta$ .
2. Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς  $c \geq 0$  για την οποία η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = (c-2)(x-1) + e^{c(x-1)}$  να έχει τοπικό ακρότατο στο σημείο  $x = 1$ . Ακολούθως, για αυτή την τιμή της σταθεράς  $c$ , βρείτε τι είδους ακρότατο έχει.
3. Έστω  $f$  συνάρτηση ορισμένη σε όλο το  $\mathbb{R}$  και τέτοια ώστε:

- ο  $f$  άρτια <sup>1</sup>
- $f$  γνησίως μονότονη στο διάστημα  $[0,1]$
- $f(0) = 1$  και  $f(1) = 0$

Αποδείξτε ότι

- $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $[-1,0]$  και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $[0,1]$
- $f \circ f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $[-1,0]$  και γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $[0,1]$
- Ως εφαρμογή, δείξτε ότι η συνάρτηση  $g$  με τύπο  $g(x) = x^2(2 - x^2)$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $[-1,0]$  και γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $[0,1]$ . Υπόδειξη:  $g(x) = 1 - (1 - x^2)^2$

4. Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι πιο κάτω συναρτήσεις:

- $f(x) = x^2 + 6x + 1$
- $f(x) = -x^2 + 5x - 2$
- $f(x) = -x^3 - 6x + 3$
- $f(x) = e^x + 1$
- $f(x) = \ln x, x > 2$
- $f(x) = 1 - \frac{2}{x^2}$
- $f(x) = \frac{2x^2}{\ln x}$
- $f(x) = \frac{xe^{-x}}{(x-2)^2}$
- $f(x) = \sqrt{2x-1}$
- $f(x) = |x-1|, x > 2$
- $f(x) = |x-1|$

5. Προσδιορίστε τα τοπικά ακρότατα των πιο κάτω συναρτήσεων (α) με το κριτήριο της πρώτης παραγωγού και (β) με το κριτήριο της δευτέρας παραγωγού:

- $f(x) = (2x-1)^2$
- $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$
- $f(x) = \sin^2 x, x \in (0, 2\pi)$

6. Προσδιορίστε τα κρίσιμα σημεία των πιο κάτω συναρτήσεων καθώς και το είδος του τοπικού ακροτάτου σε όσα από τα κρίσιμα σημεία λαμβάνεται Τ.Α.:

- $f(x) = x^3 + 5x + 2$
- $f(x) = \frac{x^2}{x^2+2}$
- $f(x) = \frac{x}{x+2}$
- $f(x) = |x^2 - 9|$
- $f(x) = \frac{\eta \mu x}{\sin x + 2}, x \in (0, 2\pi)$
- $f(x) = e\varphi^2(x^2 + 2)$

7. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f$  με  $f'(x) = -x(x^2 - 3)$ . Προσδιορίστε τα κρίσιμα σημεία της  $f$  καθώς και το είδος του τοπικού ακροτάτου σε όσα από τα κρίσιμα σημεία λαμβάνεται Τ.Α..

8. Προσδιορίστε την τιμή της σταθεράς  $c$  έτσι ώστε:

- η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \frac{x^2}{x^2+c}$  να λαμβάνει Τ.Α. στο σημείο  $x = 1$ .
- η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = x^2 - \frac{c}{x}$  να λαμβάνει Τ.Α. στο σημείο  $x = 2$ .

---

<sup>1</sup> Ουμνηθείτε:  $f$  άρτια  $\Leftrightarrow (\forall x \in D(f) \Rightarrow (-x) \in D(f) \text{ και } f(x) = f(-x))$

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

### Το Θεώρημα Μέγιστης/Ελάχιστης Τιμής

#### ΘΕΩΡΗΜΑ [Μέγιστης/Ελάχιστης Τιμής]

Μια συνεχής συνάρτηση  $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  λαμβάνει ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο.

#### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

**Βήμα 1** Θα αποδείξουμε ότι η  $f$  είναι (ανω και κάτω) φραγμένη. Υποθέτουμε προς άτοπο ότι αυτή δεν είναι φραγμένη. Τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ακολουθία  $(x_n)_n$  πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε  $f(x_n) > n, \forall n \in \mathbb{N}$ . Αφού το διάστημα  $[\alpha, \beta]$  είναι φραγμένο, από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass<sup>2</sup>, θα υπάρχει υπακολουθία  $(x_{\kappa_n})_k$  της  $(x_n)_n$  τέτοια ώστε να συγκλίνει. Έστω  $x$  το όριο αυτό. Αφού το διάστημα είναι κλειστό, τότε  $x \in [\alpha, \beta]$ . Λόγω της συνέχειας της  $f$ , αφού  $x_{\kappa_n} \rightarrow x$ , έπεται ότι και  $f(x_{\kappa_n}) \rightarrow f(x)$ . Έτσι,  $f(x_{\kappa_n}) > \kappa_n \geq k, \forall k$ . Συνεπώς, η ακολουθία  $(f(x_{\kappa_n}))_k$  αποκλίνει, άτοπο. Συνεπώς, η συνάρτηση  $f$  είναι άνω φραγμένη. Ομοίως δείχνουμε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι κάτω φραγμένη.

#### Βήμα 2

Θα δείξουμε ότι υπάρχει  $\xi \in [\alpha, \beta]$  τέτοιο ώστε  $M = f(\xi)$  και ότι υπάρχει  $\eta \in [\alpha, \beta]$  τέτοιο ώστε  $m = f(\eta)$ . Θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{y \in \mathbb{R}: y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in [\alpha, \beta]\} = f([\alpha, \beta])$$

Έχουμε ότι  $A \neq \emptyset$  και από το προηγούμενο βήμα, το σύνολο αυτό είναι ανω και κάτω φραγμένο. Θέτουμε  $\sup A = M$  και  $\inf A = m$ . Από τον ορισμό του  $M$ , έχουμε ότι για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  μπορούμε να βρούμε  $x_n \in [\alpha, \beta]$  τέτοιο ώστε

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$$

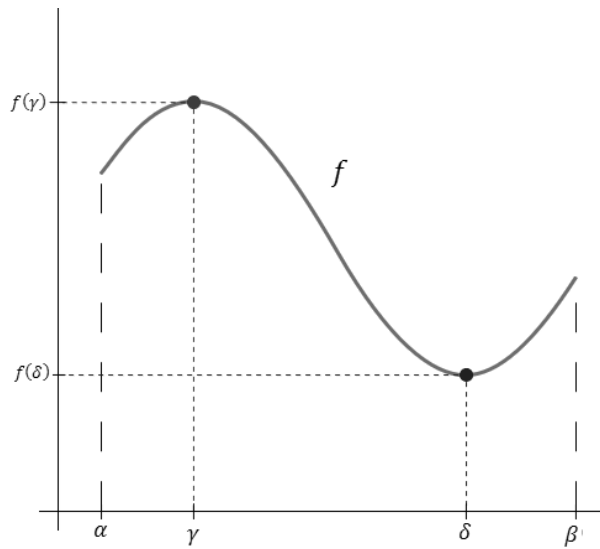
Χωρίς απώλεια της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $x_n \rightarrow \xi$  όπου  $\xi \in [\alpha, \beta]$  (στην αντίθετη περίπτωση, από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια υπακολουθία  $(x_{\kappa_n})_k$  της  $(x_n)_n$  τέτοια ώστε να συγκλίνει στον αριθμό αυτό). Τότε, από τη συνέχεια της  $f$ , έχουμε  $f(x_n) \rightarrow f(\xi)$ . Αλλά, αφού  $f(x_n) \rightarrow M$ , από τη μοναδικότητα του ορίου, έπεται ότι  $M = f(\xi)$ . □

#### Εναλλακτική ΑΠΟΔΕΙΞΗ του Βήματος 2

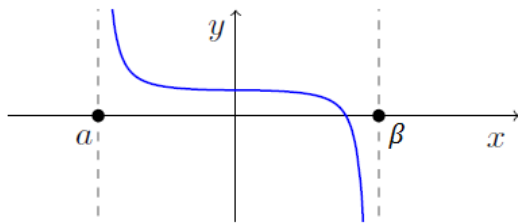
Υποθέτουμε προς άτοπο, ότι η συνάρτηση  $f$  δεν παίρνει μέγιστη τιμή. Θεωρούμε το σύνολο  $A = f([\alpha, \beta])$  όπως πιο πάνω. Τότε, από το Βήμα 1, έχουμε ότι το  $A$  είναι ανω (και κάτω) φραγμένο. Έστω λοιπόν  $\sup A \equiv M$ . Τότε, από την υπόθεσή μας, έχουμε ότι  $M \notin A$ . Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$  η οποία είναι καλά ορισμένη αφού  $M \notin A$  και αρα  $M \neq f(x), \forall x \in [\alpha, \beta]$ . Από ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων, έχουμε ότι η  $g$  είναι συνεχής και εύκολα βλέπουμε ότι δεν είναι φραγμένη, άτοπο. Έτσι, η  $f$  παίρνει μέγιστη τιμή. Ομοίως δείχνουμε ότι η  $f$  παίρνει ελάχιστη τιμή.

---

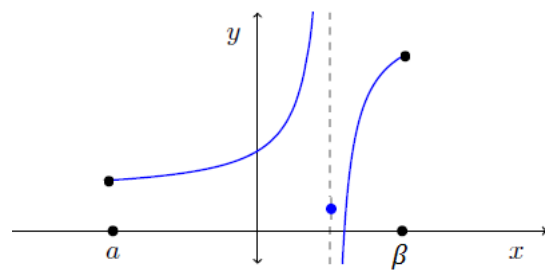
<sup>2</sup> Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.



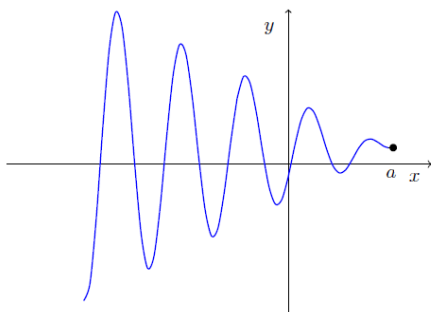
i. Αν οποιαδήποτε από τις υποθέσεις του πιο πάνω Θεωρήματος αφαιρεθεί, τότε αυτό δεν ισχύει:



$f: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής χωρίς ολικό μέγιστο ή ελάχιστο



$f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  ασυνεχής χωρίς ολικό μέγιστο ή ελάχιστο



$f: (-\infty, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής χωρίς ολικό μέγιστο ή ελάχιστο