Ασκήσεις

ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

Γραμμική Άλγεβρα

ΑΣΚΗΣΕΙΣ I - Επανάληψη

Υπενθυμίσεις

1. Έστω V, W διανυσματικοί χώροι επί ενός σώματος $\mathbb{F}$ με $dim_{\mathbb{F}}(V) = m,\ dim_{\mathbb{F}}(W) = n < \infty$ και έστω $f : V \to W$ γραμμική. Θεωρούμε $\widehat{a} := (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ και $\widehat{b} := (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ διατεταγμένες βάσεις των V και W αντίστοιχα. Έστω $(f : \widehat{a}, \widehat{b}) := A$ ο πίνακας αναπαράστασης της f ως προς τις βάσεις αυτές. Τότε,
$$[f(x)]_{\widehat{b}} = A[x]_{\widehat{a}}, \quad \forall x \in V.$$

2. Έστω V, W, U διανυσματικοί χώροι επί ενός σώματος $\mathbb{F}$ με $dim_{\mathbb{F}}(V),\ dim_{\mathbb{F}}(W),\ \ dim_{\mathbb{F}}(U) < \infty$. Θεωρούμε $\widehat{a},\ \widehat{b},\ \widehat{c}$ διατεταγμένες βάσεις των V, W, U αντίστοιχα. Έστω $f : V \to W$ και $g : W \to U$ γραμμικές απεικονίσεις. Τότε,
$$(g \circ f : \widehat{a}, \widehat{c}) = (g : \widehat{b}, \widehat{c}) \cdot (f : \widehat{a}, \widehat{b}).$$

3. Έστω V, W διανυσματικοί χώροι επί ενός σώματος $\mathbb{F}$ με $dim_{\mathbb{F}}(V),\ dim_{\mathbb{F}}(W) < \infty$. Θεωρούμε $\widehat{a},\ \widehat{b}$ διατεταγμένες βάσεις των V, W αντίστοιχα. Έστω $f : V \to W$ γραμμική. Τότε,
$$f \text{ ισομορφισμός} \quad \Leftrightarrow \quad (f : \widehat{a}, \widehat{b}) \quad \text{αντιστρέψιμος}.$$

4. Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{n\times m}$. Λέμε οτι ο A είναι ισοδύναμος με το B αν υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ και $Q \in \mathbb{F}^{m\times m}$ τέτοιοι ώστε $B = PAQ$ και συμβολίζουμε $A \sim B$.

Άσκηση 1 *Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ αντιστρέψιμοι. Τότε, ο πίνακας AB είναι επίσης αντιστρέψιμος.*

Λύση Έστω $\widehat{a}$ μια διατεταγμένη βάση του $\mathbb{F}^n \cong \mathbb{F}^{n\times 1}$. Θεωρούμε τις (γραμμικές) απεικονίσεις
$$\gamma_A : \mathbb{F}^{n\times 1} \to \mathbb{F}^{n\times 1} \quad \text{με} \quad \mathbb{F}^{n\times 1} \ni X \mapsto \gamma_A(X) := AX \in \mathbb{F}^{n\times 1},$$
$$\gamma_B : \mathbb{F}^{n\times 1} \to \mathbb{R}^{n\times 1} \quad \text{με} \quad \mathbb{F}^{n\times 1} \ni X \mapsto \gamma_B(X) := BX \in \mathbb{F}^{n\times 1}$$
και
$$\gamma_{AB} : \mathbb{F}^{n\times 1} \to \mathbb{F}^{n\times 1} \quad \text{με} \quad \mathbb{F}^{n\times 1} \ni X \mapsto \gamma_{AB}(X) := ABX \in \mathbb{F}^{n\times 1}.$$
Οι απεικονίσεις αυτές είναι γραμμικοί ισομορφισμοί. Έχουμε οτι
$$(\gamma_A : \widehat{a}, \widehat{a}) = A, \quad (\gamma_B : \widehat{a}, \widehat{a}) = B \quad \text{και} \quad (\gamma_{AB} : \widehat{a}, \widehat{a}) = AB.$$
Έτσι, $\gamma_{AB} = \gamma_A \circ \gamma_B =$σύνθεση ισομορφισμών άρα ισομορφισμός$\Rightarrow$ AB αντιστρέψιμος.

Άσκηση 2 *Δείξτε οτι η ισοδυναμία πινάκων αποτελεί μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $\mathbb{F}^{n\times m}$.*

Λύση

1. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times m}$. Τότε $A \sim A$. Πράγματι, $A = I_{n\times n} A I_{m\times m}$.

2. Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{n\times m}$ με $A \sim B$. Τότε $B \sim A$. Πράγματι, αφού $A \sim B$, υπάρχουν $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ και $Q \in \mathbb{F}^{m\times m}$ αντιστρέψιμοι τέτοιοι ώστε $B = PAQ$. Τότε,

$$P^{-1}PAQ = P^{-1}B \Rightarrow AQ = P^{-1}B \Rightarrow AQQ^{-1} = P^{-1}BQ^{-1} \Rightarrow A = P^{-1}BQ^{-1}.$$

3. Έστω $A, B, C \in \mathbb{F}^{n\times m}$ με $A \sim B$ και $B \sim C$. Τότε $A \sim C$. Πράγματι, αφού $A \sim B$, υπάρχουν $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ και $Q \in \mathbb{F}^{m\times m}$ αντιστρέψιμοι τέτοιοι ώστε $B = PAQ$ και αφού $B \sim C$, υπάρχουν $R \in \mathbb{F}^{n\times n}$ και $Z \in \mathbb{F}^{m\times m}$ αντιστρέψιμοι τέτοιοι ώστε $C = RBZ$. Τότε, από την προηγούμενη Άσκηση, αφού οι πίνακες R, P είναι αντιστρέψιμοι, θα είναι και ο πίνακας RP αντιστρέψιμος και αφού οι πίνακες Q, Z είναι αντιστρέψιμοι, θα είναι και ο πίνακας QZ αντιστρέψιμος. Έτσι,

$$C = R(PAQ)Z = (RP)A(QZ)$$

με τους RP και QZ αντιστρέψιμους, άρα $A \sim C$.

Άσκηση 3 *Εστω $f : V \to W$ μια γραμμική απεικόνιση όπου V, W διανυσματικοί χώροι επί ενός σώματος $\mathbb{F}$ με $dim_{\mathbb{F}}(V), dim_{\mathbb{F}}(W) < \infty$. Δείξτε οτι*

1. *$f(0_V) = 0_W$ και $f(v - w) = f(v) - f(w)$, $\forall v, w \in V$.*

2. *Αν $V' \subset V$, $W \subset W$ διανυσματικοί υπόχωροι των V και W αντίστοιχα, να δειχθεί οτι τα σύνολα $f(V)$ και $f^{-1}(W')$ είναι διανυσματικοί υπόχωροι των W και V αντίστοιχα.*

Λύση

1. Έχουμε

$$f(0_V) = f(0_{\mathbb{F}} \cdot 0_V) = 0_{\mathbb{F}} \cdot f(0_V) = 0_W,$$

από τη γραμμικότητα της f. Επίσης,

$$\begin{aligned} f(v - w) &= f(v + (-w)) = f(v) + f(-w) = f(v) + f((-1)w) \\ &= f(v) - 1_{\mathbb{F}} f(w) = f(v) - f(w). \end{aligned}$$

2. Είναι

$$f(V') = \{w \in W \mid \exists v \in V' \ : \ f(v) = w\}.$$

Το σύνολο $f(V')$ είναι μη κενό, αφού το $0_V \in V'$, διότι ο V' είναι διανυσματικός υπόχωρος του $V \Rightarrow f(0_V) = 0_W \in f(V')$. Τώρα, αν $u_1, u_2 \in f(V')$, υπάρχουν $w_1, w_2 \in W$ τέτοια ώστε $f(w_1) = u_1$ και $f(w_2) = u_2$. Συνεπώς, $u_1 + u_2 = f(w_1) + f(w_2) \Rightarrow w_1 + w_2 \in f(V')$. Τέλος, αν $\lambda \in \mathbb{F}$ και $w \in f(V')$, τότε υπάρχει $v \in V'$ με $f(v) = w$. Επομένως, $\lambda w = \lambda f(v) = f(\lambda v)$. Αλλά το $\lambda v \in V'$, αφού ο V' είναι διανυσματικός υπόχωρος του V. Έπεται λοιπόν οτι $f(\lambda v) \in f(V')$. Από γνωστό θεώρημα, έχουμε οτι ο $f(V')$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του W. Ομοίως δείχνουμε οτι και ο $f^{-1}(W')$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του V.

Άσκηση 4 *Έστω $f : V \to W$ μια γραμμική απεικόνιση όπου V, W διανυσματικοί χώροι επί ενός σώματος $\mathbb{F}$ με $dim_{\mathbb{F}}(V) = n < \infty$ και $dim_{\mathbb{F}}(Imf) = r < \infty$. Δείξτε οτι υπάρχει μια διατεταγμένη βάση $\widehat{a}$ του V και μια διατεταγμένη βάση $\widehat{b}$ του W τέτοιες ώστε*

$$(f : \widehat{a}, \widehat{b}) \equiv \mathcal{M}_{\widehat{b}}^{\widehat{a}} = \begin{bmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Λύση Επιλέγουμε μια διατεταγμένη βάση του kerf : $\widehat{\gamma} = (a_{r+1}, a_{r+2}, \ldots, a_n)$ και την επεκτείνουμε σε μια διατεταγμένη βάση $\widehat{a}$ του V ως εξής

$$\widehat{a} = (a_1, \ldots, a_r, a_{r+1}, a_{r+2}, \ldots, a_n).$$

Το σύνολο $\{f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_r)\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του W. Το επεκτείνουμε σε μια βάση $\{f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_r), b_{r+1}, b_{r+2}, \ldots, b_m\}$ του W. Τότε, η

$$\widehat{b} = (f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_r), b_{r+1}, b_{r+2}, \ldots, b_m)$$

αποτελεί βάση του W και

$$(f : \widehat{a}, \widehat{b}) \equiv \mathcal{M}_{\widehat{b}}^{\widehat{a}} = \begin{bmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις ΙΙ - Δακτύλιοι, Ισοτιμίες

Υπενθυμίσεις

Ορισμός 0.0.1 *Έστω $m \in \mathbb{Z}$. Δύο ακέραιοι a και b θα λέγονται ισότιμοι modulo m (ή ισοϋπόλοιποι modulo m) αν ο m διαιρεί τη διαφορά $a - b$. Γράφουμε $a \equiv b \; mod \; m$, δηλ.*

$$a \equiv b \; mod \; m \quad \Leftrightarrow \quad m/(a-b).$$

Πρόταση 0.0.1 *Έστω $m \in \mathbb{Z}_+$ και $a.b \in \mathbb{Z}$. Τότε,*

1. *Ισχύει $a \equiv b \; mod \; m \;\Leftrightarrow$ οι a και b αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο όταν διαιρεθούν με το m.*
2. *Υπάρχει ακριβώς ένας ακέραιος r με $a \equiv r \; mod \; m$, όπου $0 \leq r < m$.*

Πρόταση 0.0.2 *Αν $a \equiv b \; mod \; m$ και $c \equiv d \; mod \; m$, τότε*

$$(a+c) \equiv (b+d) \; mod \; m, \quad \text{και} \quad ac \equiv bd \; mod \; m,$$

δηλ. οι ισοτιμίες συμπεριφέρονται καλά ως προς την πρόσθεση και πολλαπλασιασμό στους ακεραίους.

Πόρισμα 0.0.1 *Αν $a \equiv b \; mod \; m$ και $c \in \mathbb{Z}$, τότε*

$$(a+c) \equiv (b+c) \; mod \; m, \quad ac \equiv bc \; mod \; m \quad \text{και} \quad a^n \equiv b^n \; mod \; m,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Πρόταση 0.0.3

1. *Αν $ac \equiv bc \; mod \; (cm)$, όπου $c \neq 0$, τότε $a \equiv b \; mod \; m$.*
2. *Αν $ac \equiv bc \; mod \; m$, όπου τουλάχιστον ένας από τους c, m είναι $\neq 0$, τότε $a \equiv b \; mod \; \frac{m}{d}$, όπου $d =$μκδ(c, m).*

Σχέσεις Ισοδυναμίας

Ορισμός 0.0.2 *Έστω A ένα μη κενό σύνολο. Μια σχέση στο A είναι ένα υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου $A \times A := \{(a,b) \; : \; a, b \in A\}$. Έστω X μια σχέση στο A. Αντί να γράφουμε $(a,b) \in X$, γράφουμε $a \sim B$. Μια σχέση στο A λέγεται σχέση ισοδυναμίας (στο A) αν*

1. *$a \sim a, \; \forall a \in A$ [Ανακλαστική Ιδιότητα]*
2. *Αν $a \sim b$, τότε $b \sim a$, για $a, b \in A$ [Συμμετρική Ιδιότητα]*
3. *Αν $a \sim b$ και $b \sim c$, τότε $a \sim c$, για $a, b, c \in A$ [Μεταβατική Ιδιότητα]*

Έστω $A \neq \emptyset$ και X μια σχέση ισοδυναμίας στο A. Αν $a, b \in A$ με $a \sim b$, θα λέμε οτι το a είναι ισοδύναμο με το b. Το σύνολο

$$[a] := \{x \in A \; : \; x \sim A\}$$

είναι το σύνολο των ισοδύναμων με το a στοιχείων και θα λέγεται κλάση ισοδυναμίας του a.

Πρόταση 0.0.4 *Έστω $A \neq \emptyset$ και X μια σχέση ισοδυναμίας στο A. Έστω $a, b \in A$. Τότε,*

1. $[a] = [b] \quad \Leftrightarrow \quad a \sim b.$
2. $[a] \cap [b] = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad a \nsim b.$
3. *Το σύνολο A μπορεί να παρασταθεί ώς ένωση ξένων κλασεων ισοδυναμίας, δηλ.*

$$A = \bigcup_{a \in A} [a],$$

όπου $[a] \cap [a'] = \emptyset$, για κάθε $a, a' \in A$ με $a \neq a'$.

Το σύνολο των ακεραίων modulo m Έστω $m \in \mathbb{N}$. Στο σύνολο $\mathbb{Z}$ θεωρούμε τη σχέση $\sim$ που ορίζεται ως εξής:

$$a \sim b \quad \Leftrightarrow \quad a \equiv mod\, m.$$

Η πιο πάνω σχέση είναι μια σχέση ισοδυναμίας:

1. $a \equiv a \; mod \; m$, για κάθε $a \in \mathbb{Z}$, αφού $m/(a-a)$, για κάθε $a \in \mathbb{Z}$.
2. Αν $a \equiv b \; mod \; m$, τότε $b \equiv a \; mod \; m$, αφού $m/(a-b) \Rightarrow m/[-(a-b)]$, δηλ, $m/(b-a)$.
3. Αν $a \equiv b \; mod \; m$ και $b \equiv c \; mod \; m$, τότε $a \equiv c \; mod \; m$, αφού $m/(a-b)$ και $m/(b-c) \Rightarrow m/[(a-b)+(b-c)]$, δηλ.$m/(a-c)$.

Για να δηλώσουμε την εξάρτηση της σχέσης αυτής από το φυσικό αριθμό m, γράφουμε $a \sim_m b$. Θα δούμε τώρα τη μορφή των στοιχείων του συνόλου $[a]$, για $a \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
[a] &= \{z \in \mathbb{Z} \; : \; z \equiv a \; mod \; m\} \\
&= \{z \in \mathbb{Z} \; : \; m/(z-a)\} \\
&= \{z \in \mathbb{Z} \; : \; z - a = km \text{ για κάποιο } k \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{a + km \; : \; k \in \mathbb{Z}\}.
\end{aligned}$$

Επομένως, τα στοιχεία της κλάσης $[a]$ είναι της μορφής

$$a + km, \; k \in \mathbb{Z}.$$

Γράφουμε $[a] = a + m\mathbb{Z}$, για να δηλώσουμε αυτό. Από την Προηγούμενη Πρόταση, έχουμε οτι

$$[a] = [b] \quad \Leftrightarrow \quad a \equiv mod\, m.$$

Το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας που ορίζονται με τη σχέση αυτή συμβολίζεται με $\mathbb{Z}_m$, δηλ.

$$\mathbb{Z}_m := \{[a] \; : \; a \in \mathbb{Z}\}.$$

Παραδείγματα 0.0.1

1. $m = 2$.
   Έχουμε
   $$[0] = \{2k \ : \ k \in \mathbb{Z}\},$$
   δηλ. το $[0]$ αποτελείται από όλους τους άρτιους αριθμούς. Επίσης,
   $$[1] = \{2k+1 \ : \ k \in \mathbb{Z}\},$$
   δηλ. το $[1]$ αποτελείται από όλους τους περιττούς αριθμούς. Αλλά, οι άρτιοι αριθμοί είναι ισότιμοι modulo m, δηλ.
   $$\ldots[-6] = [-4] = [-2] = [0] = [2] = [4] = [6] = \ldots$$
   και οι περιττοί αριθμοί επίσης ισότιμοι modulo m, δηλ.
   $$\ldots[-5] = [-3] = [-1] = [1] = [3] = [5] = \ldots,$$
   άρα, $\mathbb{Z}_2 = \{[0],[1]\} = \{[-4],[-3]\} = \{[-4],[1]\}$ κ.ο.κ.. Γενικά,
   $$\mathbb{Z}_2 = \{[a_0],\ [a_1]\}, \quad \text{όπου } a_0 \ \equiv 0 \ mod 2,\ a_1 \ \equiv 1 \ mod 2.$$

2. $m = 3$.
   Έχουμε
   $$\begin{aligned} [0] &= \{3k \ : \ k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots,-3,0,3,\ldots\} \\ [1] &= \{3k+1 \ : \ k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots,-2,1,4,\ldots\} \\ [2] &= \{3k+2 \ : \ k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots,-1,2,5,\ldots\}. \end{aligned}$$
   Αλλά,
   $$\begin{aligned} \ldots &= [-3] = [0] = [3] = \ldots \\ \ldots &= [-2] = [1] = [4] = \ldots \\ \ldots &= [-1] = [2] = [5] = \ldots. \end{aligned}$$
   Επομένως, $\mathbb{Z}_3 = \{[0],[1],[2]\} = \{[-3],[-2],[-1]\} = \{[-3],[1],[2]\}$ κ.ο.κ.. Γενικά,
   $$\mathbb{Z}_2 = \{[a_0],\ [a_1],[a_2]\}, \quad \text{όπου } a_0 \ \equiv 0 \ mod 3,\ a_1 \ \equiv 1 \ mod 3,\ a_2 \ \equiv 2 \ mod 3.$$

Γενικότερα, έχουμε

Πρόταση 0.0.5 *Για κάθε $m \in \mathbb{Z}_+$ έχουμε οτι*
$$\mathbb{Z}_m = \{[0],[1],\ldots,[m-1]\}.$$
Γενικότερα,
$$\mathbb{Z}_m = \{[a_0],[a_1],\ldots,[a_{m-1}]\},$$
όπου $a_i \in \mathbb{Z}$ τέτοιοι ώστε $a_i \ \equiv \ i \ \mod m,\ i \in \{0,1,2,\ldots,m-1\}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Οι κλάσεις ισοδυναμίας $[a_i],\ i \in \{0,1,2,\ldots,m-1\}$ είναι διακεκριμένες: Αν $[a_i = [a_j]$ για $i,j \in \{0,1,2,\ldots,m-1\}$, τότε έχουμε οτι $i \ \equiv \ j \ mod\ m$, οπόταν από Πρόταση έχουμε οτι $i = j$. Κάθε κλάση ισοδυναμίας $[a]$ ανήκει στο σύνολο $\{[a_0],[a_1],\ldots,[a_{m-1}]\}$: Πράγματι από τον αλγόριθμο διαίρεσης, έχουμε οτι $a = qm + r$, όπου $0 \le r \le m-1$. Επομένως, $a \ \equiv \ r \ mod\ m$ και άρα $[a] = [r] = [a_r]$. Δείξαμε λοιπόν οτι $\mathbb{Z}_m \subseteq \{[a_0],[a_1],\ldots,[a_{m-1}]\}$. Συνεπώς, $\mathbb{Z}_m = \{[a_0],[a_1],\ldots,[a_{m-1}]\}$.■

Πρόσθεση και πολλαπλασιασμός στο $\mathbb{Z}_m$

$$\begin{aligned} + &: \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z} \quad \text{με} \quad (a,b)\mapsto a+b \\ \cdot &: \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z} \quad \text{με} \quad (a,b)\mapsto a\cdot b. \end{aligned}$$

Ομοίως,

$$\begin{aligned} + &: \mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_m\to\mathbb{Z}_m \quad \text{με} \quad ([a],[b])\mapsto [a+b] \\ \cdot &: \mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_m\to\mathbb{Z}_m \quad \text{με} \quad ([a],[b])\mapsto [a\cdot b]. \end{aligned}$$

Αποδεικνύεται εύκολα οτι οι πιο πάνω αντιστοιχίες είναι πράγματι απεικονίσεις.

Αντιστροφή στοιχείων στο $\mathbb{Z}_m$ Θέλουμε να επιλύσουμε την εξίσωση $[a][x]=[b]$ στο $\mathbb{Z}_m$. Ένα στοιχείο $[a]\in\mathbb{Z}_m$ λέγεται αντιστρέψιμο αν υπάρχει $[b]\in\mathbb{Z}_m$ τέτοιο ώστε $[a][b]=[1]$, δηλ. αν υπάρχει ακέραιος b τέτοιος ώστε $ab \equiv 1 \ mod\ m$. Για παράδειγμα, στο $\mathbb{Z}_6$ το $[5]$ είναι αντιστρέψιμο αφού $[5][5]=[1]$.

Άσκηση 1 *1. Έστω $[a]$ ένα αντιστρέψιμο στοιχείο του $\mathbb{Z}_m$. Δείξτε οτι υπάρχει μοναδικό στοιχείο $[b]\in\mathbb{Z}_m$ τέτοιο ώστε $[a][b]=[1]$, δηλ. οτι έχει μοναδικό αντίστροφο.*

2. Το στοιχείο $[a]\in\mathbb{Z}_m$ είναι αντιστρέψιμο αν και μόνο αν μκδ$(a,m)=1$.

Λύση

1. Έστω $[a]$ ένα αντιστρέψιμο στοιχείο του $\mathbb{Z}_m$. Έστω $[b]\in\mathbb{Z}_m$ ένα αντίστροφό του, δηλ. $[a][b]=[1]$. Θα δείξουμε οτι είναι μοναδικό. Αν λοιπόν υπήρχε ένα άλλο αντίστροφο στοιχείο του $[a]$ έστω $[c]\in\mathbb{Z}_m$, δηλ. τέτοιο ώστε $[a][c]=[1]$, θα είχαμε οτι

$$[b]=[b][1]=[b]([a][c])=([b][a])[c]=([b][a])[c]=[1][c]=[c].$$

2. ($\Rightarrow$)Έστω $[b]\in\mathbb{Z}_m$ το αντίστροφο στοιχείο του $[a]$, δηλ. $[a][b]=[1]$. Τότε $ab \equiv mod\ m$, δηλ. $ab=mn+1$, για κάποιο $n\in\mathbb{Z}$. Από τη σχέση αυτή προκύπτει οτι μκδ$(m,n)=1$.

   ($\Leftarrow$) Έστω οτι μκδ$(m,n)=1$. Τότε, υπάρχουν $x,y\in\mathbb{Z}$ τέτοια ώστε $ax+my=1$, από Θεώρημα. Τότε,

$$\begin{aligned} [ax+my]=[1] &\Rightarrow [ax]+[my]=[1] \\ &\Rightarrow [a][x]+[m][y]=[1] \\ &\Rightarrow [a][x]+[0][y]=[1] \\ &\Rightarrow [a][x]=[1], \end{aligned}$$

   δηλ. το στοιχείο $[a]$ είναι αντιστρέψιμο.

Ορισμός 0.0.3 *Ένα σύνολο A εφοδιασμένο με δύο πράξεις $+,\cdot : A\times A\to A$ ονομάζεται δακτύλιος αν ισχύουν τα εξής:*

1. $(a+b)+c=a+(b+c),\ \forall a,b,c\in A.$

2. *Υπάρχει στοιχείο* $0_A \in A$ *τέτοιο ώστε* $a + 0_A = 0_A + a,\ \forall a \in A$.

3. *Για κάθε* $a \in A$ *υπάρχει στοιχείο* $a' \in A$ *τέτοιο ώστε* $a + a' = a' + a = 0_A$.

4. $a + b = b + a,\ \forall a, b \in A$.

5. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c),\ \forall a, b, c \in A$.

6. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c,\ \forall a, b, c \in A$.

7. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c,\ \forall a, b, c \in A$.

Το 0_A λέγεται το μηδενικό στοιχείο του δακτυλίου και το a' το αντίθετο του $a \equiv -a$. Και τα δύο είναι μοναδικά. Αν στο δακτύλιο A ισχύει $a \cdot b = b \cdot a,\ \forall a, b \in A$, τότε ο A θα λέγεται μεταθετικός. Αν στο δακτύλιο A υπάρχει στοιχείο 1_A με την ιδιότητα $1_A \cdot a = a \cdot 1_A$ για κάθε $a \in A$, το 1_A θα λέγεται το μοναδιαίο στοιχείο του δακτυλίου A. Σε ένα δακτύλιο A είναι δυνατόν να υπάρχουν μη μηδενικά στοιχεία a, b με την ιδιότητα $ab = 0$ (π.χ. $[2][3] = [6] = [0]$ στο $\mathbb{Z}_6$). Στην περίπτωση αυτή το a λέγεται αριστερός μηδενοδιαιρέτης του A και το b δεξιός μηδενοδιαιρέτης του A. Αν ο δακτύλιος είναι μεταθετικός, τότε οι δύο αυτοί μηδενοδιαιρέτες ταυτίζονται.

Ορισμός 0.0.4 *Ένας μεταθετικός δακτύλιος* A *με μοναδιαίο στοιχείο* $1_A \neq 0_A$ *ονομάζεται ακεραία περιοχή αν δεν έχει μηδενοδιαιρέτες.*

Ένα στοιχείο a ενός δακτυλίου A με μοναδιαίο στοιχείο 1_A λέγεται αντιστρέψιμο στο A αν υπάρχει $r \in A$ τέτοιο ώστε $ar = ra = 1_A$.

Ορισμός 0.0.5 *Ένας μεταθετικός δακτύλιος* A *με μοναδιαίο στοιχείο* $1_A \neq 0_A$ *στο οποίο κάθε μη μηδενικό στοιχείο είναι αντιστρέψιμο λέγεται σώμα.*

Παραδείγματα 0.0.2

1. *Το* $\mathbb{Z}_n$ *είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο.* $0_{\mathbb{Z}_n} = [0]$ *και* $-[a] = [-a]$. *Επίσης,* $1_{\mathbb{Z}_n} = [1]$.

2. *Οι δακτύλιοι* $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ *είναι ακεραίες περιοχές.*

3. *Οι δακτύλιοι* $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ *είναι σώματα, όχι όμως το* $\mathbb{Z}$.

Πρόταση 0.0.6 *Ο δακτύλιος* $\mathbb{Z}_n$ *είναι ακεραία περιοχή αν και μόνο αν ο* n *είναι πρώτος ή μηδέν.*

Πρόταση 0.0.7 *Κάθε πεπερασμένη ακεραία περιοχή είναι σώμα.*

Πόρισμα 0.0.2 *Ο δακτύλιος* $\mathbb{Z}_n$ *είναι σώμα αν και μόνο αν ο* n *είναι πρώτος.*

Ορισμός 0.0.6 *Ένα σύνολο* G *λέμε οτι έχει τη δομή ομάδας ή απλά οτι είναι μια ομάδα ως προς μια πράξη* $f : G \times G \to G$ *για την οποία γράφουμε* $f(x, y)) = x \circ y$, *για κάθε* $x, y \in G$ *αν ικανοποιούνται οι εξής ιδιότητες:*

1. *Υπάρχει ένα στοιχείο* $e \in G$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $x \in G$ *να ισχύει* $x \circ e = e \circ x = x$.

2. *Για κάθε* $x \in G$, *υπάρχει ένα* $y \in G$ *τέτοιο ώστε* $x \circ y = y \circ x = e$, *όπου* e *ένα στοιχείο της* G *όπως στο προηγούμενο.*

3. *Για κάθε* $x, y, z \in G$, *ισχύει* $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$, *δηλ. ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα.*

Γραμμική Άλγεβρα

ΑΣΚΗΣΕΙΣ III - Πολυώνυμα

Διαίρεση πολυωνύμων:

$$p(x) = q(x)h(x) + r(x) \quad \text{όπου } deg(r(x)) < deg(h(x)).$$

Άσκηση 1 *Έστω R μια ακεραία περιοχή. Τότε*

1. *Ο $R[x]$ είναι ακεραία περιοχή.*
2. *Αν $\phi(x), \theta(x) \in R[x]$ μη μηδενικά, τότε*
   (α') $deg(\phi(x)\theta(x)) = deg(\phi(x)) + deg(\theta(x))$.
   Ισχύει η πιο πάνω σχέση αν R είναι τυχαίος μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο·
   (β') *Είτε $\phi(x)+\theta(x) = 0$ είτε $deg(\phi(x)+\theta(x)) \leq \max\{deg(\phi(x)), deg(\theta(x))\}$. Πότε ισχύει γνήσια η ανισότητα;*

ΛΥΣΗ

1. Επειδή ο R είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο, έχουμε οτι ο $R[x]$ είναι μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο. Επίσης, $1_{R[x]} = 1_R \neq 0_R = 0_{R[x]}$. Ο $R[x]$ δεν έχει μηδενοδιαιρέτες:
   Έστωσαν $f(x), g(x) \in R[x]$ μη μηδενικά. Τότε,
   $$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$
   και
   $$g(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i.$$
   με $a_n, b_m \neq 0$. Έχουμε
   $$f(x)g(x) = (a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_1)x + \ldots + (a_nb_m)x^{n+m} = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i+j=k} (a_ib_j) \right) x^k. \quad (1)$$
   Επειδή ο R δεν έχει μηδενοδιαιρέτες, ισχύει οτι $a_nb_m \neq 0$, και άρα $f(x)g(x) \neq 0$.
2. (α') Αν $\phi(x), \theta(x) \in R[x]$ μη μηδενικά, τότε από την (1) έπεται οτι
   $$deg(\phi(x)\theta(x)) = deg(\phi(x)) + deg(\theta(x)).$$
   Για τυχαίο δακτύλιο R με μοναδιαίο στοιχείο ισχύει για $f(x), g(x) \in R[x]$:
   $$deg(f(x)g(x)) \leq deg(f(x)) + deg(g(x)).$$
   Αυτό διότι αν ο $R[x]$ έχει μηδενοδαιρέτες, είναι δυνατόν να ισχύει γνήσια η πιο πάνω ανισότητα. Για παράδειγμα, $f(x) = [2]x + [1]$ και $g(x) = [3]x + [1]$ στο $\mathbb{Z}_6[x]$. Τότε, $f(x)g(x) = [6]x^2 + [5]x + [4] = [0]x^2 + [5]x + 4 = [5]x + [4]$ το οποίο έχει βαθμό 1.

(β')

Άσκηση 2 *Έστω $\phi \in \mathbb{F}_n[x]$. Δείξτε οτι υπάρχει $\theta \in \mathbb{F}_n[x]$ τέτοιο ώστε $\phi \cdot \theta = 1 \Leftrightarrow$ το ϕ (άρα και το θ) είναι σταθερό μη μηδενικό πολυώνυμο.*

ΛΥΣΗ ($\Rightarrow$) Έχουμε $\phi(x)\theta(x) = 1 \Leftrightarrow deg(\phi(x)\theta(x)) = deg(1) \Leftrightarrow deg(\phi(x)) + deg(\theta(x)) = 0 \Leftrightarrow deg(\phi(x)) = deg(\theta(x)) = 0$ (διότι $deg(\phi(x)), deg(\theta(x)) \geq 0$) $\Leftrightarrow \phi(x)$ (και άρα και το $\theta(x)$) είναι σταθερό μη μηδενικό πολυώνυμο.

($\Leftarrow$) Αν $\phi(x) = c \neq 0$, τότε για $\theta(x) := c^{-1}$ έχουμε $\phi(x)\theta(x) = 1$.

Άσκηση 3 *Έστω $\phi, \theta \in \mathbb{F}_n[x]$. Δείξτε οτι $\phi \cdot \theta = 0 \Leftrightarrow$ τουλάχιστον ένα από τα ϕ και θ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.*

ΛΥΣΗ ($\Rightarrow$) Έστω οτι $\phi(x)\theta(x) = 0$. Αν $\phi, \theta, \neq 0$, τότε $deg(\phi(x)), deg(\theta(x)) \geq 0$, επομένως

$$deg(\phi(x) \cdot \theta(x)) = \deg(\phi(x)) + deg(\theta(x)) \geq 0.$$

Άρα, $\phi(x) \cdot \theta(x) \neq 0$, άτοπο. Συνεπώς, ένα τουλάχιστον από τα ϕ και θ είναι μη μηδενικό.

($\Leftarrow$) Αν ένα τουλάχιστον από τα ϕ και θ είναι μηδενικό, τότε (προφανώς) $\phi(x)\theta(x) = 0$.

Άσκηση 4 *Δείξτε οτι δεν υπάρχει πολυώνυμο $\phi \in \mathbb{R}_n[x]$ τέτοιο ώστε*

$$(\phi(x))^{12} = (x+1)^{23} + (x-4)^{2013}.$$

ΛΥΣΗ $deg(\phi(x)) = n \Rightarrow deg[(\phi(x)]^{12} = 12n$. Επίσης, $deg[(x+1)^{23} + (x-4)^{2013}] = 2013$. Για να υπήρχε τέτοιο πολυώνυμο, θα έπρεπε $12n = 2013$, το οποίο δεν μπορεί να γίνει, αφού $n = \frac{2013}{12} \notin \mathbb{N}$.]

Άσκηση 5 *Κάντε τις ακόλουθες διαιρέσεις πολυωνύμων $p(x)/q(x)$ αν*

1. $p(x) = x^4, \quad q(x) = x - 1.$
2. $p(x) = x^3 - 12x^2 - 42, \quad q(x) = x - 3.$
3. $p(x) = x^3 + x^2 - 1, \quad q(x) = x - 1.$

Λύση

1.

$$\begin{array}{r|l}
 & x^3 + x^2 + x + 1 \\
\hline
x - 1 & x^4 \\
 & \underline{-x^4 + x^3} \\
 & x^3 \\
 & \underline{-x^3 + x^2} \\
 & x^2 \\
 & \underline{-x^2 + x} \\
 & x \\
 & \underline{-x + 1} \\
 & 1
\end{array}$$

Άρα,

$$\frac{x^4}{x-1} = x^3 + x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1}$$

ή

$$x^4 = (x^3 + x^2 + x + 1)(x-1) + 1.$$

2.

$$\begin{array}{r|rrr}
 & x^2 & -9x & -27 \\
\hline
x-3 & x^3 - 12x^2 & & -42 \\
 & -x^3 + 3x^2 & & \\
\cline{2-2}
 & -9x^2 & & \\
 & 9x^2 - 27x & & \\
\cline{2-3}
 & -27x & -42 & \\
 & 27x & -81 & \\
\cline{2-3}
 & & -123 &
\end{array}$$

Άρα,

$$\frac{x^3 - 12x^2 - 42}{x-3} = x^2 - 9x - 27 - \frac{123}{x-3}$$

ή

$$x^3 - 12x^2 - 42 = (x^2 - 9x - 27)(q-3) - 123.$$

3.

$$\begin{array}{r|rrr}
 & x^2 & +2x & +2 \\
\hline
x-1 & x^3 & +x^2 & -1 \\
 & -x^3 & +x^2 & \\
\cline{2-2}
 & 2x^2 & & \\
 & -2x^2 & +2x & \\
\cline{2-3}
 & 2x & -1 & \\
 & -2x & +2 & \\
\cline{2-3}
 & 1 & &
\end{array}$$

Άρα,

$$\frac{x^3 + x^2 - 1}{x-1} = x^2 + 2x + 2 + \frac{1}{x-1}$$

ή

$$x^3 + x^2 - 1 = (x^2 + 2x + 2)(x-1) + 1.$$

Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ IV - Ιδιοτιμές, Ιδιοδιανύσματα, Χαρακτηριστικό πολυώνυμο

Συμβολισμοί: $\mathcal{L}(V,V) \equiv End(V) = \{f : V \to V \mid f \text{ γραμμική}\}$

Άσκηση 1 *Έστω V διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης επί του σώματος $F = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. Έστω $\widehat{a}$ μια διατεταγμένη βάση του V και $f \in \mathcal{L}(V,V)$. Αν $p \in \mathbb{F}_n[x]$, τότε ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης $p(f)$ ως προς την $\widehat{a}$ είναι ο $p(A)$, όπου $A = (f : \widehat{a}, \widehat{a})$, δηλ. $(p(f) : \widehat{a}, \widehat{a}) = p(A)$.*

Άσκηση 2 *Έστω η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $f(x,y,z) := (x+y, y+z, x+z)$. Θεωρούμε το πολυώνυμο $p(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 2$. Να υπολογιστεί ο πίνακας της $p(f)$ ως προς την κανονική βάση $\widehat{e} := \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ του $\mathbb{R}^3$ και ακολούθως ως προς τη βάση $\widehat{a} := \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$.*

Άσκηση 3 *Έστω V διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης επί του σώματος $F = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. Έστω $f \in \mathcal{L}(V,V)$ και $p \in \mathbb{F}_n[x]$. Αν λ είναι μια ιδιοτιμή της f, δείξτε οτι και το $p(\lambda)$ είναι μια ιδιοτιμή της $p(f)$.*

Άσκηση 4 *Έστω η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $f(x,y) = (x+2y, 3x+2y)$. Βρείτε τον πίνακα της f ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$. Ακολούθως, βρείτε τις ιδιοτιμές της f.*

Άσκηση 5 *Έστω η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $f(x,y,z) = (4x, 2y-5z, y-2z)$. Βρείτε τον πίνακα της f ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$. Ακολούθως, βρείτε τις ιδιοτιμές της f.*

Άσκηση 6

Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ιδιοτιμές του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 7 *Έστω $a \neq 0$ αριθμός. Δείξτε ότι τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ παράγουν ένα μονοδιάστατο χώρο. Βρείτε μια βάση του χώρου αυτού.*

Άσκηση 8 *Βρείτε τις ιδιοτιμές και μια βάση για τους ιδιόχωρους του πίνακα $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.*

Άσκηση 9 *Βρείτε τις ιδιοτιμές και μια βάση για καθέναν από τους ιδιόχωρους του πίνακα*

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 10 *Έστω $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ γραμμική, δηλ. $f \in End(\mathbb{R}^4)$. Έστω*

$$A := (f : \widehat{a}, \widehat{a}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ο πίνακας αναπαράστασης της f ως προς κάποια διατεταγμένη βάση $\widehat{a}$ του $\mathbb{R}^4$. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι ιδιόχωροι της f.

Άσκηση 11 *Έστω V διανυσματικός χώρος επί του σώματος $\mathbb{F}$ με $dim_{\mathbb{F}}(V) < \infty$. Έστω $f : V \to V$ ισομορφισμός. Δείξτε οτι*

1. *Η f^{-1} είναι γραμμική.*
2. *Αν το $\lambda \in \mathbb{F}$ είναι ιδιοτιμή της f, τότε $\lambda \neq 0$.*
3. *$\lambda \in \mathbb{F}$ ιδιοτιμή της $f \Leftrightarrow$ το λ^{-1} είναι ιδιοτιμή της f^{-1}.*
4. *Για κάθε $\lambda \in V \setminus \{0\}$, είναι $V_f(\lambda) = V_{f^{-1}}(\lambda^{-1})$.*
5. *f διαγωνίσιμη $\Leftrightarrow$ f^{-1} διαγωνίσιμη.*

Άσκηση 1 *Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ αντιστρέψιμος. Αν λ, δείξτε οτι $\lambda \neq 0$ και οτι το λ^{-1} είναι ιδιοτιμή του A^{-1}.*

Άσκηση 12 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ πεπερασμένης διάστασης. Έστω $f \in End(V)$ τέτοια ώστε $f \circ f = f$.*

(i) Δείξτε ότι $V = Kerf \oplus Imf$.

(ii) Βρείτε τις ιδιοτιμές και τους αντίστοιχους ιδιοχώρους της f.

Άσκηση 13 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ πεπερασμένης διάστασης. Έστω $f, g \in End(V)$ τέτοιες ώστε $f \circ g = g \circ f$ και η f έχει ν διακεκριμένες ιδιοτιμές, όπου $\nu = dim_{\mathbb{F}} V$. Δείξτε οτι η g είναι διαγωνίσιμη.*

Άσκηση 14 *Θεωρούμε το σύστημα*

$$\begin{cases} x_1'(t) &= 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\ x_2'(t) &= -x_1 + 3x_2 - x_3 \\ x_3'(t) &= -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 \end{cases}$$

με αρχική συνθήκη $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (1, 0, 0)$ όπου οι $x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ i = 1, 2, 3$ είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Να προσδιορίσετε όλες τις μή τετριμμένες λύσεις του συστήματος.

Γραμμική Άλγεβρα

ΑΣΚΗΣΕΙΣ IV - Ιδιοτιμές, Ιδιοδιανύσματα, Χαρακτηριστικό πολυώνυμο

Συμβολισμοί: $\mathcal{L}(V,V) \equiv End(V) = \{f : V \to V \mid f \text{ γραμμική}\}$

Άσκηση 1 *Έστω V διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης επί του σώματος $F = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. Έστω $\widehat{a}$ μια διατεταγμένη βάση του V και $f \in \mathcal{L}(V,V)$. Αν $p \in \mathbb{F}_n[x]$, τότε ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης $p(f)$ ως προς την $\widehat{a}$ είναι ο $p(A)$, όπου $A = (f : \widehat{a}, \widehat{a})$, δηλ. $(p(f) : \widehat{a}, \widehat{a}) = p(A)$.*

Λύση Ισχύουν: αν $f, g \in \mathcal{L}(V,V)$, και $\widehat{a}$ μια διατεταγμένη βάση του V, τότε

$$(f + g : \widehat{a}, \widehat{a}) = (f : \widehat{a}, \widehat{a}) + (g : \widehat{a}, \widehat{a}),$$

$$(f \circ g : \widehat{a}, \widehat{a}) = (f : \widehat{a}, \widehat{a})(g : \widehat{a}, \widehat{a})$$

και (αν $\lambda \in \mathbb{F}$), τότε

$$(\lambda f : \widehat{a}, \widehat{a}) = \lambda(f : \widehat{a}, \widehat{a}).$$

Έστω οτι $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$. Τότε, $p(f) = a_n f^n + \ldots + a_1 f + a_0 1_V$. Τότε, έχουμε

$$\begin{aligned}
(p(f) : \widehat{a}, \widehat{a}) &= (a_n f^n : \widehat{a}, \widehat{a}) + \ldots + (a_1 f : \widehat{a}, \widehat{a}) + (a_0 1_V : \widehat{a}, \widehat{a}) \\
&= a_n (f^n : \widehat{a}, \widehat{a}) + \ldots + a_1 (f : \widehat{a}, \widehat{a}) + a_0 (1_V : \widehat{a}, \widehat{a}) \\
&= a_n (f : \widehat{a}, \widehat{a})^n + \ldots + a_1 (f : \widehat{a}, \widehat{a}) + a_0 (1_V : \widehat{a}, \widehat{a}) \\
&= a_n A^n + \ldots + a_1 A + a_0 I_{m \times m} \\
&= p(A),
\end{aligned}$$

όπου $m = \dim(V)$.

Άσκηση 2 *Έστω η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $f(x,y,z) := (x+y, y+z, x+z)$. Θεωρούμε το πολυώνυμο $p(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 2$. Να υπολογιστεί ο πίνακας της $p(f)$ ως προς την κανονική βάση $\widehat{e} := \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ του $\mathbb{R}^3$ και ακολούθως ως προς τη βάση $\widehat{a} := \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$.*

ΛΥΣΗ Έχουμε οτι

$$A := \mathcal{M}_{\widehat{e}}^{\widehat{e}}(f) \equiv (f : \widehat{e}, \widehat{e}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Από την προηγούμενη Άσκηση, είναι

$$(p(f) : \widehat{e}, \widehat{e}) \equiv \mathcal{M}_{\widehat{e}}^{\widehat{e}}(f) = p(A) = A^3 - 2A^2 + 3A - 2I_{2\times 2}.$$

Τώρα, θα προσδιορίσουμε τον πίνακα της $p(f)$ ως προς τη βάση $\widehat{a}$ μέσω της σχέσης

$$(p(f) : \widehat{a}, \widehat{a}) = (id : \widehat{e}, \widehat{a}) \cdot (p(f) : \widehat{e}, \widehat{e}) \cdot (id : \widehat{a}, \widehat{e}).$$

Βρίσκουμε οτι

$$(p(f) : \widehat{a}, \widehat{a}) \equiv \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 3 *Έστω V διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης επί του σώματος $F = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. Έστω $f \in \mathcal{L}(V, V)$ και $p \in \mathbb{F}_n[x]$. Αν λ είναι μια ιδιοτιμή της f, δείξτε οτι και το $p(\lambda)$ είναι μια ιδιοτιμή της $p(f)$.*

Λύση Έστω λ ιδιοτιμή που αντιστοιχεί στο ιδιοδιάνυσμα v, δηλ. $f(v) = \lambda v$. Άρα, $f^2(v) = f(f(v)) = \lambda(f(v)) = \lambda^2 v$ και γενικά $f^k(v) = \lambda^k v$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$. Επομένως, αν $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ τότε $(p(f))(v) = (a_n f^n + \ldots + a_1 f + a_0 1_V)(v) = (a_n \lambda^m + \ldots + a_1 \lambda + a_0)v = p(\lambda)v$ το οποίο σημαίνει ότι το $p(\lambda)$ είναι μια ιδιοτιμή του $p(f)$.

Άσκηση 4 *Έστω η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $f(x, y) = (x + 2y, 3x + 2y)$. Βρείτε τον πίνακα της f ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$. Ακολούθως, βρείτε τις ιδιοτιμές της f.*

Λύση $\widehat{a} = \{(1, 0), (0, 1)\}$. Τότε

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Έχουμε

$$|A - tI_{2\times 2}| = \begin{vmatrix} 1-t & 2 \\ 3 & 2-t \end{vmatrix} = -t^2 - 3 - t - 4 = (t+1)(t-4).$$

Άρα, οι ιδιοτιμές της f ως προς τον A είναι οι $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 4$.

Άσκηση 5 *Έστω η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $f(x, y, z) = (4x, 2y - 5z, y - 2z)$. Βρείτε τον πίνακα της f ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$. Ακολούθως, βρείτε τις ιδιοτιμές της f.*

Λύση $\widehat{a} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Τότε

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Έχουμε

$$|A - tI_{3\times 3}| = \begin{vmatrix} 4-t & 0 & 0 \\ 0 & 2-t & -5 \\ 0 & 1 & t-2-t \end{vmatrix} = (4-t)[-(2-t)(2+t)+5] = (4-t)(t^2+1) = -(t-4)(t^2+1).$$

Άρα, η f ως προς τον A έχει μόνο μια ιδιοτιμή, την $\lambda_1 = 4$ αν το σώμα $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Αν το σώμα είναι το $\mathbb{C}$, τότε, έχει και τις $\lambda_2 = i,\ \lambda_3 = -i$.

Άσκηση 6

Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ιδιοτιμές του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Λύση

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -3 & -3 \\ -3 & t+5 & -3 \\ -6 & 6 & t-4 \end{vmatrix} = t^3 - 12t - 16 = t^3 - 4t - 8t - 16$$

$$= t(t^2 - 4) - 8t - 16 = (t+2)[(t-2) - 8] = (t+2)^2(t-4).$$

Άσκηση 7 *Έστω $a \neq 0$ αριθμός. Δείξτε ότι τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ παράγουν ένα μονοδιάστατο χώρο. Βρείτε μια βάση του χώρου αυτού.*

Λύση Έστω $v_1 = (x, y)$ ένα ιδιοδιάνυσμα του A. Τότε $Av_1 = \lambda v_1$ ή ισοδύναμα

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + ay = \lambda x \\ y = \lambda y \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = 1,\ y = 0.$$

Δηλ. κάθε ιδιοδιάνυσμα είναι της μορφής $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς, $V = \text{span}\{(1, 0)\}$ και $V = \dim_{\mathbb{R}}(V) = 1$.

Άσκηση 2 *Βρείτε τις ιδιοτιμές και μια βάση για τους ιδιόχωρους του πίνακα* $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & 4 \\ 2 & t-3 \end{vmatrix} = (t-1)(t-3) - 8 = t^2 - 4t - 5 = (t-5)(t+1).$$

Άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι 5 και -1. Αν (x, y) είναι ένα ιδιοδιάνυσμα τότε

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

το οποίο δίνει τις εξισώσεις $(1 - \lambda)x + 4y = 0$ και $2x + (3 - \lambda)y = 0$. Θέτουμε $x = 1$ και βρίσκουμε $y = \frac{-2}{3-\lambda}$. Άρα τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα έχουν τη μορφή $\begin{pmatrix} 1 \\ -2/(3-\lambda) \end{pmatrix}$. Αντικαθιστώντας $\lambda = 5$ και $\lambda = -1$ παίρνω $v_1 = (1, 1)$ και $v_2 = (1, -1/2)$. Άρα για την ιδιοτιμή 5 ο ιδιόχωρος (που είναι μονοδιάστατος) έχει βάση το v_1 και για την ιδιοτιμή -1 ο μονοδιάστατος υπόχωρος που παράγεται έχει βάση το v_2. Παρατηρήστε ότι αν αντικαθιστούσαμε το x με οποιονδήποτε άλλον αριθμό (εκτός του 1) θα παίρναμε αντί των v_1, v_2 κάποια πολλαπλάσιά τους. Επομένως δεν θα άλλαζαν ούτε οι ιδιόχωροι ούτε βέβαια η διάστασή τους.

Άσκηση 8 *Βρείτε τις ιδιοτιμές και μια βάση για καθέναν από τους ιδιόχωρους του πίνακα*

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Λύση

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 \\ 0 & -2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3).$$

Άρα, $\lambda_1 = 2$(διπλή) και το $\lambda_2 = 3$. Αν τώρα (x, y, z) είναι ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$ τότε εργαζόμενοι όπως προηγούμενα παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{matrix} (2 - \lambda)x + y = 0 \\ (1 - \lambda)y - z = 0 \\ 2y + (4 - \lambda)z = 0 \end{matrix}.$$

Για $\lambda = 2$ παίρνουμε το διάνυσμα $v_1 = (x, 0, 0)$ και άρα ο ιδιόχωρος V_1 που παράγεται είναι μονοδιάστατος και μιά βάση του είναι το διάνυσμα $(1, 0, 0)$. Για $\lambda_2 = 3$ το διάνυσμα που παίρνουμε είναι το $v_2 = (x, x, -2z)$. Άρα ο ιδιόχωρος V_2 που παράγεται είναι μονοδιάστατος και μια βάση του είναι το διάνυσμα $(1, 1, -2)$.

Άσκηση 9 *Έστω $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ γραμμική, δηλ. $f \in End(\mathbb{R}^4)$. Έστω*

$$A := (f : \widehat{a}, \widehat{a}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ο πίνακας αναπαράστασης της f ως προς κάποια διατεταγμένη βάση $\widehat{a}$ του $\mathbb{R}^4$. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι ιδιόχωροι της f.

Λύση

$$\chi_f(\lambda) = |A - \lambda I_{4\times 4}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3 \to r_3 - r_2 \\ r_4 \to r_4 - 2r_2}}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & -1 \\ 0 & \lambda+1 & -(\lambda+1) & 0 \\ 0 & 2\lambda-1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2\lambda-1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_2 \to r_2 - r_1 \\ r_3 \to r_3 + r_1 \\ r_4 \to r_4 + r_1}}{=} (\lambda+1) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 & 0 \\ \lambda & 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1-\lambda & 2(\lambda-1) & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1)(1-\lambda)(1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 & 0 \\ \lambda & 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1)(1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} \lambda & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(\lambda+1)(1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2(\lambda-1)^2.$$

Συνεπώς, οι ιδιοτιμές της f είναι $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$ με πολλαπλότητα 2 η κάθε μια. Για τον ιδιόχωρο V_1 που αντιστοιχεί στην $\lambda_1 = 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} V_1 &= \ker(f - id_{\mathbb{R}^4}) = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : A_1(x,y,z,w)^T = (0,0,0,0)\right\} \\ &= \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_4, x_2 = x_3\right\} \\ &= <(1,0,0,1),(0,1,1,0)> \end{aligned}$$

και για τον ιδιόχωρο V_2 που αντιστοιχεί στην $\lambda_2 = -1$ έχουμε

$$\begin{aligned} V_2 &= \ker(f + id_{\mathbb{R}^4}) = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : A_2(x,y,z,w)^T = (0,0,0,0)\right\} \\ &= \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 = x_3 = x_2,\ x_2 + x_3 = x_4 - x_1\right\} \\ &= <(1,2,0,3),(0,1,1,2)>. \end{aligned}$$

Άσκηση 10 *Έστω V διανυσματικός χώρος επί του σώματος $\mathbb{F}$ με $dim_{\mathbb{F}}(V) < \infty$. Έστω $f : V \to V$ ισομορφισμός. Δείξτε οτι*

1. *Η f^{-1} είναι γραμμική.*
2. *Αν το $\lambda \in \mathbb{F}$ είναι ιδιοτιμή της f, τότε $\lambda \neq 0$.*
3. *$\lambda \in \mathbb{F}$ ιδιοτιμή της $f \Leftrightarrow$ το λ^{-1} είναι ιδιοτιμή της f^{-1}.*
4. *Για κάθε $\lambda \in V \setminus \{0\}$, είναι $V_f(\lambda) = V_{f^{-1}}(\lambda^{-1})$.*
5. *f διαγωνίσιμη $\Leftrightarrow$ f^{-1} διαγωνίσιμη.*

Λύση

1. Η f^{-1} υπάρχει αφου f 1-1 και επί. Έστω $v_1, v_2 \in V$. Θα δείξουμε οτι $f^{-1}(v_1 + v_2) = f^{-1}(v_1) + f^{-1}(v_2)$. Αφού f επί, έχουμε οτι $f^{-1}(v_1) = w_1$ για κάποιο $w_1 \in V$ και $f^{-1}(v_2) = w_2$ για κάποιο $w_2 \in V$. Τότε,
$$v_1 = f(w_1), \quad v_2 = f(w_2). \tag{2}$$
Έτσι, αφού f γραμμική,
$$\begin{aligned} f(w_1 + w_2) &= f(w_1) + f(w_2) \overset{(2)}{=} v_1 + v_2 \\ \Rightarrow f^{-1}(f(w_1 + w_2)) &= f^{-1}(v_1 + v_2) \\ \Rightarrow w_1 + w_2 &= f^{-1}(v_1 + v_2), \end{aligned}$$
δηλ.
$$f^{-1}(v_1 + v_2) = f^{-1}(v_1) + f^{-1}(v_2).$$
Ακολούθως θα δείξουμε οτι αν $\lambda \in \mathbb{F}$ και $v \in V$, τότε $f^{-1}(\lambda v) = \lambda f^{-1}(v)$. Πράγματι, αφού $v \in V$ και f επί, θα υπάρχει $w \in V$ τέτοιο ώστε
$$f^{-1}(v) = w, \tag{3}$$
άρα $v = f(w)$. Έτσι,
$$\begin{aligned} f(\lambda w) &= \lambda f(w) = \lambda v \Rightarrow f^{-1}(f(\lambda w)) = f^{-1}(\lambda v) \\ \Rightarrow \lambda w &= f^{-1}(\lambda v) \\ \overset{(3)}{\Rightarrow} f^{-1}(\lambda v) &= \lambda f^{-1}(v). \end{aligned}$$
Έπεται λοιπόν οτι η f^{-1} είναι γραμμική.

2. Έστω $\lambda \in \mathbb{F}$ ιδιοτιμή της f. Έστω $v \in V \setminus \{0\}$ ένα ιδιοδιάνυσμα της f που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ, δηλ. $f(v) = \lambda v$. Αν $\lambda = 0$, τότε $f(v) = \lambda v = 0$ και αφού f γραμμική, θα είναι $v = 0$, άτοπο. Άρα, $\lambda \neq 0$.

3. Έστω $\lambda \in \mathbb{F}$ ιδιοτιμή της f. Από το προηγούμενο ερώτημα, $\lambda \neq 0$. Έστω $v \in V \setminus \{0\}$ ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην λ. Τότε,

$$f(v) = \lambda v \Rightarrow (f^{-1} \circ f)(v) = f^{-1}(\lambda v) \Rightarrow v = f^{-1}(\lambda v) \overset{f^{-1}\ \text{γραμμική}}{=} \lambda f^{-1}(v),$$

δηλ.

$$f^{-1}(v) = \lambda^{-1} v,$$

δηλ. το λ^{-1} είναι ιδιοτιμή της f^{-1}.

4. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε οτι για κάθε $\lambda \in V \setminus \{0\}$, είναι $V_f(\lambda) = V_{f^{-1}}(\lambda^{-1})$.

5. f διαγωνίσιμη $\Leftrightarrow$ f^{-1} διαγωνίσιμη.

Άσκηση 3 *Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος. Αν λ, δείξτε οτι $\lambda \neq 0$ και οτι το λ^{-1} είναι ιδιοτιμή του A^{-1}.*

Λύση Το αποτέλεσμα είναι άμεσο από την προηγούμενη άσκηση, αφού αν $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ο πίνακας ενός γραμμικού ισομορφισμού $f : V \to V$, με $\dim_{\mathbb{F}} V = n$ ως προς κάποια διατεταγμένη βάση του V, τότε ο A^{-1} είναι ο αντίστοιχος πίνακας της f^{-1}. Διαφορετικά, μπορούμε να το αποδείξουμε άμεσα ως εξής: Έστω $x \neq 0$ ένα ιδιοδιάνυσμα που αντίστοιχεί στην ιδιοτιμή λ. Τότε, αφού $x \neq 0$, έπεται οτι $\lambda \neq 0$. Επίσης έχουμε

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow A^{-1}(Ax) = A^{-1}\lambda x \Leftrightarrow x = \lambda(A^{-1}x) \Leftrightarrow A^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x,$$

απόπου επεται το ζητούμενο.

Άσκηση 15 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ πεπερασμένης διάστασης. Έστω $f \in End(V)$ τέτοια ώστε $f \circ f = f$.*

(i) Δείξτε ότι $V = Kerf \oplus Imf$.

(ii) Βρείτε τις ιδιοτιμές και τους αντίστοιχους ιδιοχώρους της f.

Λύση

(i) Για να δείξουμε οτι $V = \mathrm{Ker}f \oplus \mathrm{Im}f$, αρκεί να δείξουμε οτι $V = \mathrm{Ker}f + \mathrm{Im}f$ και $\mathrm{Ker}f \cap \mathrm{Im}f = \{0_V\}$. Για το πρώτο, αφού τα σύνολα Kerf και Imf είναι υπόχωροι του V, έπεται οτι $V \supseteq \mathrm{Ker}f + \mathrm{Im}f$. Τώρα, αν $v \in V$, έχουμε οτι $v = (v - f(v)) + f(v)$. Προφανώς, $f(v) \in \mathrm{Im}f$ και $v - f(v) \in \mathrm{Ker}f$. Πράγματι,

$$f(v - f(v)) \overset{f\ \text{γραμμική}}{=} f(v) - f(f(v)) \overset{f\circ f = f}{=} f(v) - f(v) = 0_V.$$

Συνεπώς, $v \in \mathrm{Ker}f + \mathrm{Im}f$ και άρα $V \subseteq \mathrm{Ker}f + \mathrm{Im}f$. Για το $\mathrm{Ker}f \cap \mathrm{Im}f = \{0_V\}$, θεωρούμε $v \in \mathrm{Ker}f \cap \mathrm{Im}f$. Τότε,

$$v \in \mathrm{Ker}f \Rightarrow f(v) = 0_V \tag{4}$$

και

$$v \in \mathrm{Im}f \Rightarrow \exists w \in V \ : \ f(w) = v. \tag{5}$$

Τότε,

$$v = f(w) \overset{f\circ f=f}{=} f(f(w)) \overset{(5)}{=} f(v) \overset{(4)}{=} 0_V.$$

Έτσι,

$$V = \text{Kerf} \oplus \text{Imf},$$

δηλαδή η f είναι η προβολή της Imf πάνω στον Kerf.

(ii) Θα προσδιορίσουμε τις ιδιοτιμές της f. Έστω λ ιδιοτιμή της f, δηλ. $f(u) = \lambda u$, για κάποιο $u \in V \setminus \{0_V\}$. Τότε,

$$f(f(u)) = f(\lambda u) \overset{f \text{ γραμμική}}{=} \lambda f(u) \Rightarrow (1-\lambda)f(u) = 0_V,$$

δηλ. είτε $\lambda = 1$ είτε $f(u) = 0_v$. Στη δεύτερη περίπτωση, η ιδιοτιμή είναι η $\lambda = 0$. Για τους αντίστοιχους ιδιοχώρους $v(1)$ και $V(0)$ έχουμε

$$V(0) = \{v \in V \setminus \{0_v\} \ : \ f(v) = 0v = 0\},$$

Δηλ.

$$V(0) = \text{Kerf}.$$

Επίσης,

$$V(1) = \{v \in V \setminus \{0_v\} \ : \ f(u) = v\}.$$

Θα δείξουμε οτι $V(1) = \text{Imf}$. Έστω $u \in \text{Imf}$. Τότε $u = f(w)$ για κάποιο $w \in W$. Έχουμε $f(u) = f(f(w)) \overset{f\circ f=f}{=} f(w) = u$ και άρα $u \in V(1)$. Έτσι, $V(1) \supseteq \text{Imf}$. Τώρα, αν $u \in V(1)$, τότε $f(u) = u$. Αλλά $u \in V = \text{Kerf} \oplus \text{Imf}$ και αρα $u = w + v$, όπου $v \in \text{Imf}$ και $w \in \text{Kerf}$. Έτσι,

$$u = w + v \Rightarrow f(u) = f(w) + f(v) = f(v),$$

αφού $f(w) = 0_V$, διότι $w \in \text{Kerf}$. Επομένως, $u \in \text{Imf}$ και άρα $V(1) \subseteq \text{Imf}$. Άρα,

$$V(1) = \text{Imf}.$$

Έτσι,

$$V = \text{Kerf} \oplus \text{Imf} = V(0) \oplus V(1).$$

Άρα, αν A μια βάση από ιδιοδιανύσματα του $V(0)$ και B μια βάση από ιδιοδιανύσματα του $V(1)$, μπορούμε εύκολα να βρούμε τον πίνακα της f ως προς τη βάση $A \cup B$.

Άσκηση 16 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ πεπερασμένης διάστασης. Έστω $f, g \in End(V)$ τέτοιες ώστε $f \circ g = g \circ f$ και η f έχει ν διακεκριμένες ιδιοτιμές, όπου $\nu = dim_{\mathbb{F}}V$. Δείξτε οτι η g είναι διαγωνίσιμη.*

Λύση Έστω λ μια ιδιοτιμή της f και $V_f(\lambda)$ ο αντίστοιχος ιδιόχωρος. Αν $u \in V_f(\lambda) \setminus \text{kef g}$, τότε

$$f(u) = \lambda u \Rightarrow (g \circ f)(u) = g(\lambda u) = \lambda g(u) \overset{f\circ g=g\circ f}{\Rightarrow} (f \circ g)(u) = \lambda g(u),$$

δηλ. $g(u) \in V_f(\lambda)$. Έτσι, $g\left(V_f(\lambda)\right) \subseteq V_f(\lambda)$. Συνεπώς, οι f και g έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές. Αλλά η f έχει ιδιοτιμές, $\nu = \dim_{\mathbb{F}}V$ διακεκριμένες ιδιοτιμές και άρα και η g. Έτσι, από Θεώρημα, η g είναι (επίσης) διαγωνίσιμη.

Άσκηση 17 *Έστωσαν*

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Δείξτε οτι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(1) Οι πίνακες A και B είναι όμοιοι.

(2) $\chi_A = \chi_B$.

(3) Υπάρχει μετάθεση $\sigma \in S_n$ τέτοια ώστε $b_i = a_{\sigma_{(i)}}$, $\forall i \in \{1, 2 \ldots, n\}$.

Λύση (1) $\Rightarrow$ (2) Από Θεώρημα.

(2) $\Rightarrow$ (3) Έστω οτι μ $\chi_A = \chi_B$. Αφού οι πίνακες A και B είναι διαγώνιοι, έπεται οτι

$$\chi_A(t) = (a_1 - t)\ldots(a_n - t) \quad \text{και} \quad \chi_B(t) = (b_1 - t)\ldots(b_n - t).$$

Συνεπώς, οι ιδιοτιμές του A είναι ίδιες με τις ιδιοτιμές του B, πιθανώς με μια αναδιάταξη, δηλ. υπάρχει μετάθεση $\sigma \in S_n$ τέτοια ώστε $b_i = a_{\sigma_{(i)}}$, $\forall i \in \{1, 2 \ldots, n\}$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Έστω οτι υπάρχει μετάθεση $\sigma \in S_n$ τέτοια ώστε $b_i = a_{\sigma_{(i)}}$, $\forall i \in \{1, 2 \ldots, n\}$. Θα δείξουμε οτι οι πίνακες A και B είναι όμοιοι. Θυμόμαστε οτι κάθε μετάθεση $\sigma \in S_n$ γράφεται ως γινόμενο ξένων κυκλικών μεταθέσεων και οτι κάθε μετάθεση αντιστοιχεί σε έναν στοιχειώδη πίνακα. Για παράδειγμα έστω

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}.$$

Θέλουμε να αντιμεταθέσουμε την τρίτη με την πρώτη γραμμή του πίνακα. Εφαρμόζουμε τους πίνακες

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και $P^{-1} = P$ στον πίνακα C :

$$P^{-1}CP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_3 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \end{bmatrix}.$$

Στό ζητούμενο, από υπόθεση, υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες P_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$ τέτοιοι ώστε

$$(P_m P_{m-1} \ldots P_1) \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{bmatrix} (P_1 P_2 \ldots P_m) = \begin{bmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{bmatrix},$$

και αφού $P_i = P_i^{-1}$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, έπεται οτι

$$(P_m^{-1} P_{m-1}^{-1} \ldots P_1^{-1}) \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{bmatrix} (P_1 P_2 \ldots P_m) = \begin{bmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{bmatrix}$$

και άρα οι πίνακες A και B είναι όμοιοι.

Παράρτημα Θα δούμε τώρα μια εφαρμογή του χαρακτηριστικού πολυωνύμου στις διαφορικές εξισώσεις.
Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων:
Έστω $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση. Υπενθυμίζουμε οτι αν $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης $y'(t) = \lambda y(t)$ είναι οι $y(t) = ce^{\lambda t},\ c \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{cases} x_1'(t) &= a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \\ x_2'(t) &= b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 \\ x_3'(t) &= c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \end{cases}$$

με αρχική συνθήκη $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (d_1, d_2, d_3) \in \mathbb{R}^3$, όπου οι $x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ i = 1, 2, 3$ είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Θα προσδιορίσουμε όλες τις μή τετριμμένες λύσεις του πιο πάνω συστήματος. Θεωρούμε την απεικόνιση διάνυσμα λύσης

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3\times 1} \quad \text{με} \quad t \mapsto x(t) := \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}.$$

Η αντίστοιχη παράγωγος της x είναι η

$$x' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3\times 1} \quad \text{με} \quad t \mapsto x'(t) := \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{bmatrix}.$$

Έστω

$$A := \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος. Έστω $\lambda_i,\ i = 1, 2, 3$ οι (όχι καταναγκην διακεκριμένες) ιδιοτιμές του πίνακα A. ΑΝ ο A είναι διαγωνοποιήσιμος τότε μπορούμε να προχωρήσουμε στην επίλυση: Υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες $P, Q \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ τέτοιοι ώστε οι στήλες του P να αποτελούνται από ιδιοδιανύσματα του A και ο

$$Q = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

και τέτοιοι ώστε

$$P^{-1}AP = Q. \tag{6}$$

Τότε $A = PQP^{-1}$ και το αρχικό σύστημα γράφεται στη μορφή $x'(t) = Ax(t) = PQP^{-1}x(t) \Rightarrow P^{-1}x'(t) = QP^{-1}x(t)$. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3\times 1} \quad \text{με} \quad t \mapsto y(t) := P^{-1}x(t).$$

Τότε $y'(t) := P^{-1}x'(t) = QP^{-1}x(t) = Qy(t)$. Το σύστημα αυτό είναι της μορφής

$$\begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 y_1(t) \\ \lambda_2 y_2(t) \\ \lambda_3 y_3'(t) \end{bmatrix}$$

με αντίστοιχες λύσεις

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ c_3 e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix},$$

όπου $c_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, 3$. Από τη σχέση $y(t) = P^{-1}x(t)$ παίρνουμε $x(t) = Py(t)$. Τέλος, από τις αρχικές συνθήκες προσδιορίζουμε τους συντελεστές $c_i,\ i = 1, 2, 3$.

Παράδειγμα Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{cases} x_1'(t) &= 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\ x_2'(t) &= -x_1 + 3x_2 - x_3 \\ x_3'(t) &= -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 \end{cases}$$

με αρχική συνθήκη $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (1, 0, 0)$ όπου οι $x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ i = 1, 2, 3$ είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Θα προσδιορίσουμε όλες τις μή τετριμμένες λύσεις του συστήματος. Ακολουθώντας την πιο πάνω διαδικασία με

$$A := \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

του οποίου το $\chi_A(t) = (t-1)(t-2)(t-5)$ και άρα $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 5$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα της μορφής $t(0, 1, 2),\ k(-1, 1, 2),\ l(-1, 1, -1),\ t, k, l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Έτσι,

$$P := \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad Q := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Οι λύσεις του συστήματος $y'(t) = Qy(t)$ είναι της μορφής

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{t} \\ c_2 e^{2t} \\ c_3 e^{5t} \end{bmatrix}.$$

Τότε,

$$y(t) = P^{-1}x(t) \Rightarrow x(t) = Py(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{t} \\ c_2 e^{2t} \\ c_3 e^{5t} \end{bmatrix},$$

δηλ.

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_2 e^{2t} - c_3 e^{5t} \\ c_1 e^{t} + c_2 e^{2t} + c_c e^{5t} \\ 2c_1 e^{t} + 2c_2 e^{2t} - c_3 e^{5t} \end{bmatrix}.$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες (με μέθοδο απαλοιφής του Gauss ή με απλή μέθοδο αντικατάστασης κτλ) βρίσκουμε οτι $c_1 = 1,\ c_2 = -1,\ c_3 = 0$. Έτσι, οι λύσεις

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

του συστήματος είναι της μορφής

$$\begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{t} - e^{2t} \\ 2e^{t} - 2e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Γραμμική Άλγεβρα

ΑΣΚΗΣΕΙΣ IV - Ιδιότητες χαρακτηριστικού πολυωνύμου

Άσκηση 1 *Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ένας πίνακας με χαρακτηριστικό πολυώνυμο χ_A. Προσδιορίστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $-A$.*

Άσκηση 2 *Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας. Προσδιορίστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A^{-1}.*

Άσκηση 3 *Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Δείξτε οτι $\chi_A(\lambda) = \chi_{A^T}(\lambda)$.*

Άσκηση 4 *Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Δείξτε οτι οι πίνακες A και A^T έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές. Έχουν τα ίδια ιδιοδιανύσματα;*

$$V(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Άσκηση 5 *Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα*

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

καθώς και του A^T.

Άσκηση 6 *Έστω $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in M_{n\times n}(K)$ ένας τριγωνικός πίνακας. Να δείξετε οτι*

$$\chi_A(t) = (a_{11} - t)(a_{22} - t)\dots(a_{nn} - t).$$

Άσκηση 7 *Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα*

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Άσκηση 8 *Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα*

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Άσκηση 9 *Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα*

$$A := \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

Άσκηση 10 *Για ποιές τιμές του $k \in \mathbb{R}$ έχει ο πίνακας*

$$A := \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ιδιοτιμή ίση με 1;

Άσκηση 11 *Βρείτε τις ιδιοτιμές του πίνακα*

$$A = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 12 *(i) Έστω $A \in M_{n\times n}(K)$ ένας πίνακας της μορφής*

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & * \\ \vdots & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \\ & & & A_k \end{bmatrix},$$

όπου $A_i \in M_{n_i\times n_i}(K)$ και $\sum_{i=1}^k n_i = n$. Τότε,

$$\chi_A(x) = \chi_{A_1}(x)\chi_{A_2}(x)\ldots\chi_{A_k}(x).$$

(ii) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & a & b \\ 1 & 2 & c & d \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

Άσκηση 13 *Δείξτε οτι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Ισχύει το αντίστροφο;*

Άσκηση 14 *Έστω $A \in M_{n\times n}(K)$ με*

$$\chi_A(t) = (-1)^n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_0.$$

Δείξτε οτι

$$a_0 = \det(A) \quad \text{και} \quad a_{n-1} = (-1)^{n-1} tr(A).$$

Γραμμική Άλγεβρα

ΑΣΚΗΣΕΙΣ IV - Ιδιότητες χαρακτηριστικού πολυωνύμου

Άσκηση 15 *Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ένας πίνακας με χαρακτηριστικό πολυώνυμο χ_A. Προσδιορίστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $-A$.*

Λύση

$$\chi_{-A}(\lambda) = |-A - \lambda I_{n\times n}| = (-1)^n |A + \lambda I_{n\times n}| = (-1)^n \chi_A(-\lambda).$$

Άσκηση 16 *Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας. Προσδιορίστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A^{-1}.*

Λύση

$$\begin{aligned}\chi_{A^{-1}}(\lambda) &= |A^{-1} - \lambda I_{n\times n}| = |A^{-1}(I_{n\times n} - \lambda A)| = |A^{-1}| \cdot |I_{n\times n} - \lambda A| = \\ &= |A^{-1}| \cdot \left|\lambda\left(\frac{1}{\lambda} I_{n\times n} - A\right)\right| = \frac{1}{|A|}\lambda^n \cdot \left|\frac{1}{\lambda} I_{n\times n} - A\right| = \frac{\lambda^n}{|A|}\chi_A(1/\lambda).\end{aligned}$$

Άσκηση 17 *Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Δείξτε οτι $\chi_A(\lambda) = \chi_{A^T}(\lambda)$.*

ΛΥΣΗ Έχουμε:

$$\chi_{A^T}(\lambda) = |A^T - \lambda I_{n\times n}| = |A^T - (\lambda I_{n\times n})^T| = |(A - \lambda I_{n\times n})^T| = |A - \lambda I_{n\times n}| = \chi_A(\lambda).$$

Άσκηση 18 *Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Δείξτε οτι οι πίνακες A και A^T έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές. Έχουν τα ίδια ιδιοδιανύσματα;*

Λύση Από την προηγούμενη Άσκηση, $\chi_A(t) = \chi_{A^T}(t)$, άρα ο A και A^T έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές. Όμως, δεν έχουν (εν γένει) τα ίδια ιδιοδιανύσματα, για παράδειγμα,

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Τότε,

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ με ιδιόχωρο

$$V(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Οι ιδιοτιμές του A^T είναι $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ με ιδιόχωρο

$$V(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Άσκηση 19 *Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα*

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

καθώς και του A^T.

Λύση Έχουμε

$$\begin{aligned} \chi_A(t) &= |A - tI_{2\times 2}| = \begin{vmatrix} 3-t & 2 \\ 1 & 2-t \end{vmatrix} = (3-t)(2-t) - 2\cdot 1 \\ &= t^2 - 5t + 4 = (t-1)(t-4). \end{aligned}$$

Συνεπώς, οι ιδιοτιμές του A είναι οι $1, 2$. Επίσης, από προηγούμενη άσκηση, $\chi_A(t) = \chi_{A^T}(t)$.
Εύρεση Ιδιοχώρων του A :

$$\begin{aligned} V(1) &= \ker\{(A - I_{2\times 2})X \mid X \in \mathbb{R}^{2\times 1}\} \\ &= \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^{2\times 1} \mid x = -y\} \\ &= \{(x,-x)^T \in \mathbb{R}^{2\times 1} \mid x \neq 0\} \\ &= \operatorname{span}\{(1,-1,)^T\} \setminus \{(0,0)^T\} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} V(2) &= \ker\{(A - 2I_{2\times 2})X \mid X \in \mathbb{R}^{2\times 1}\} \\ &= \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^{2\times 1} \mid x = 2y\} \\ &= \{(2y,y)^T \in \mathbb{R}^{2\times 1} \mid y \neq 0\} \\ &= \operatorname{span}\{(2,1,)^T\} \setminus \{(0,0)^T\}. \end{aligned}$$

Επίσης, κάθε γραμμικός συνδυασμός

$$v = k(1,-1) + m(2,1), \quad k\cdot m \neq 0$$

είναι ιδιοδιάνυσμα του A.

Εύρεση Ιδιοχώρων του A^T :

$$\begin{aligned} V(1) &= \ker\{(A^T - I_{2\times 2})X \mid X \in \mathbb{R}^{2\times 1}\} \\ &= \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^{2\times 1} \mid 2x + y = 0\} \\ &= \operatorname{span}\{(1,-2,)^T\} \setminus \{(0,0)^T\} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} V(2) &= \ker\{(A^T - 2I_{2\times 2})X \mid X \in \mathbb{R}^{2\times 1}\} \\ &= \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^{2\times 1} \mid x = y,\ x \neq 0\} \\ &= \{(x,x)^T \in \mathbb{R}^{2\times 1} \mid x \neq 0\} \\ &= \operatorname{span}\{(1,1,)^T\} \setminus \{(0,0)^T\}. \end{aligned}$$

Επίσης, κάθε γραμμικός συνδυασμός

$$v = k(1,-2) + m(1,1), \quad k\cdot m \neq 0$$

είναι ιδιοδιάνυσμα του A^T.

Άσκηση 20 *Έστω $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in M_{n\times n}(K)$ ένας τριγωνικός πίνακας. Να δείξετε οτι*

$$\chi_A(t) = (a_{11} - t)(a_{22} - t)\dots(a_{nn} - t).$$

Λύση Υπενθυμίζουμε τι είναι τριγωνικός πίνακας:

Ένας πίνακας της μορφής

$$L = \begin{bmatrix} a_{1,1} & & & & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & & \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

λέγεται κάτω τριγωνικός (ή αριστερά τριγωνικός). Ένας πίνακας της μορφής

$$U = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & \dots & b_{1,n} \\ & b_{2,2} & b_{2,3} & \dots & b_{2,n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & b_{n-1,n} \\ 0 & & & & b_{n,n} \end{bmatrix}$$

λέγεται άνω τριγωνικός (ή δεξιά τριγωνικός). Ένας διαγώνιος πίνακας είναι ταυτόχρονα άνω και κάτω τριγωνκός.

Ξέρουμε οτι αν $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ είναι ένας άνω ή κάτω τριγωνικός πίνακας, τότε $\det(A) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$. Συνεπώς,

$$\chi_A(t) = \det(A - tI_{n\times n}) = (a_{11} - t)\dots(a_{nn} - t) = (-1)^n(t - a_{11})\dots(t - a_{nn}).$$

Άσκηση 21 *Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα*

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Λύση Αφού A διαγώνιος, έπεται οτι

$$\chi_A(t) = (-1)^3(t-2)(t-1)(t+1).$$

Συνεπώς, ο A είναι διαγωνίσιμος, αφού έχει τρείς διακεκριμένες ιδιοτιμές, τις $\pm 1, 2$. Εύρεση Ιδιοχώρων του A :

$$\begin{aligned} E(1) &= V(1) = \ker\{(A^t - I_{3\times 3})X \mid X \in \mathbb{R}^{3\times 1}\} \\ &= \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^{3\times 1} \mid x = z = 0\} \\ &= \operatorname{span}\{(0,1,0)^T\} \setminus \{(0,0,0)^T\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(-1) &= \ker\{(A^t + I_{3\times 3})X \mid X \in \mathbb{R}^{3\times 1}\} \\ &= \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^{3\times 1} \mid x = y = 0\} \\ &= \{(0,0,z)^T \in \mathbb{R}^{3\times 1} \mid z \neq 0\} \\ &= \operatorname{span}\{(0,0,1)^T\} \setminus \{(0,0,0)^T\} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} V(2) &= \ker\{(A^t - 2I_{3\times 3})X \mid X \in \mathbb{R}^{3\times 1}\} \\ &= \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^{3\times 1} \mid y = z = 0\} \\ &= \{(x,0,0)^T \in \mathbb{R}^{3\times 1} \mid x \neq 0\} \\ &= \operatorname{span}\{(1,0,0)^T\} \setminus \{(0,0,0)^T\} \end{aligned}$$

Έχουμε

$$\mathbb{R}^{3\times 1} = V(1) \oplus V(-1) \oplus V(2).$$

Άσκηση 22 *Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα*

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Λύση Έχουμε

$$\begin{aligned} \chi_A(t) &= |A - tI_{3\times 3}| = \begin{vmatrix} 1-t & -1 & 0 \\ 0 & 2-t & 0 \\ -1 & -1 & 2-t \end{vmatrix} = (2-t)\begin{vmatrix} 1-t & 1 \\ 0 & 2-t \end{vmatrix} \\ &= (2-t)(2-t)(1-t) = -(t-2)^2(t-1). \end{aligned}$$

Συνεπώς, οι ιδιοτιμές του A είναι οι $1, 2$. Η ιδιοτιμή 2 έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 2. Εύρεση Ιδιοχώρων του A :

$$\begin{aligned} V(1) &= \ker\{(A - I_{3\times 3})X \mid X \in \mathbb{R}^{3\times 1}\} \\ &= \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^{3\times 1} \mid x = z,\ y = 0\} \\ &= \{(z,0,z)^T \in \mathbb{R}^{3\times 1} \mid z \neq 0\} \\ &= \operatorname{span}\{(1,0,1)^T\} \setminus \{(0,0,0)^T\} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} V(2) &= \ker\{(A - 2I_{3\times 3})X \mid X \in \mathbb{R}^{3\times 1}\} \\ &= \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^{3\times 1} \mid x = -y\} \\ &= \{(-y,y,z)^T \in \mathbb{R}^{2\times 1} \mid y \cdot z \neq 0\} \\ &= \operatorname{span}\{(-1,1,0)^T, (0,0,1)^T\} \setminus \{(0,0,0)^T\}. \end{aligned}$$

Έχουμε $\dim_{\mathbb{R}}(V(1)) = 1$ και $\dim_{\mathbb{R}}(V(2)) = 2$. Συνεπώς, Έχουμε $\dim_{\mathbb{R}}(V(1)) + \dim_{\mathbb{R}}(V(2)) = 3 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{3\times 1})$. Έτσι,

$$\mathbb{R}^{3\times 1} = V(1) \oplus V(2).$$

Άσκηση 23 *Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα*

$$A := \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

Λύση Έχουμε

$$\begin{aligned} \chi_A(t) &= |A - tI_{3\times 3}| = \begin{vmatrix} 4-t & 0 & 3 \\ 0 & 2-t & 0 \\ -3 & 0 & 4-t \end{vmatrix} = (2-t)(t^2 - 8t + 25) \\ &= -(t-2)(t^2 - 8t + 25). \end{aligned}$$

Συνεπώς, οι ιδιοτιμές του A είναι

$$t_1 = 2, \quad t_{2,3} = 4 \pm 3i.$$

Είναι $|t_2| = |t_3| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ και $\arg(t_2) = \arctan\left(\frac{3}{4}\right)$.
$t_2 = |t_2| e^{i\arg(t_2)}$.
Εύρεση Ιδιοχώρων του A :

$$\begin{aligned} V(1) &= \ker\{(A - 2I_{3\times 3})X \mid X \in \mathbb{C}^{3\times 1}\} \\ &= \mathbb{C} - \operatorname{span}\{(0,1,0)^T\} \setminus \{(0,0,0)^T\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(4+3i) &= \ker\{(A - (4+3i)I_{3\times 3})X \mid X \in \mathbb{C}^{3\times 1}\} \\ &= \mathbb{C} - \operatorname{span}\{(-i,0,1)^T\} \setminus \{(0,0,0)^T\} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} V(4-3i) &= \ker\{(A - (4-3i)I_{3\times 3})X \mid X \in \mathbb{C}^{3\times 1}\} \\ &= \mathbb{C} - \operatorname{span}\{(i,0,1)^T = \overline{(-i,0,1)}\} \setminus \{(0,0,0)^T\}. \end{aligned}$$

Έχουμε $\dim_{\mathbb{R}}(V(1)) = 1$ και $\dim_{\mathbb{R}}(V(2)) = 2$. Συνεπώς,

$$\dim_{\mathbb{R}}(V(1)) + \dim_{\mathbb{R}}(V(2)) = 3 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{3\times 1}).$$

Έτσι,

$$\mathbb{R}^{3\times 1} = V(1) \oplus V(2).$$

Άσκηση 24 *Για ποιές τιμές του $k \in \mathbb{R}$ έχει ο πίνακας*

$$A := \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ιδιοτιμή ίση με 1;

Λύση Έχουμε

$$\begin{aligned}\chi_A(t) &= |A - tI_{3\times 3}| = \begin{vmatrix} k-t & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & k \\ 0 & 2 & 1-t \end{vmatrix} = (k-t)\begin{vmatrix} 1-t & k \\ 2 & 1-t \end{vmatrix} = (k-t)[t^2 - 2t + 1 - 2k] \\ &= -(t-k)(t^2 - 2t + 1 - 2k).\end{aligned}$$

Το πολυώνυμο $t^2 - 2t + 1 - 2k$ έχει ρίζες τους αριθμούς $1 \pm \sqrt{2k}$. Έτσι, για να έχει ιδιοτιμή 1 ο πίνακας A, θα πρέπει $k = 1$ ή $1 \pm \sqrt{2k} = 1 \Leftrightarrow k = 0$.

Άσκηση 25 *Βρείτε τις ιδιοτιμές του πίνακα*

$$A = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}.$$

Λύση Έχουμε

$$\begin{aligned}\chi_A(t) &= |A - tI_{2\times 2}| = \begin{vmatrix} \cos\phi - t & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{vmatrix} = t^2 - 2t\cos\phi + \cos^2\phi + \sin^2\phi \\ &= t^2 - 2t\cos\phi + 1.\end{aligned}$$

Επομένως, οι ιδιοτιμές του A είναι οι

$$\lambda_{1,2} = \frac{2\cos\phi \pm \sqrt{4\cos\phi - 4}}{2} = \cos\phi \pm i\sin\phi = e^{\pm i\phi}.$$

Σημείωση: Η απεικόνιση

$$f : \mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}^{2\times 1} \quad \text{με} \quad f\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\phi + y\sin\phi \\ -x\sin\phi + y\cos\phi \end{bmatrix}$$

είναι η απεικόνιση στροφής κατά γωνία$= \phi$.

Άσκηση 26 *(i) Έστω $A \in M_{n\times n}(K)$ ένας πίνακας της μορφής*

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & * \\ \vdots & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \\ & & & A_k \end{bmatrix},$$

όπου $A_i \in M_{n_i\times n_i}(K)$ και $\sum_{i=1}^k n_i = n$. Τότε,

$$\chi_A(x) = \chi_{A_1}(x)\chi_{A_2}(x)\dots\chi_{A_k}(x).$$

(ii) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & a & b \\ 1 & 2 & c & d \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

Λύση

(i) Με επαγωγή στο k.
Για $k = 1$, έχουμε οτι $A = (A_1) \Rightarrow \chi_A(t) = \chi_{A_1}(t)$.
Έστω ότι ισχύει για $k = m$, δηλ. για τον πίνακα

$$B = \begin{bmatrix} A_1 & & & * \\ \vdots & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \\ & & & A_m \end{bmatrix},$$

ισχύει οτι

$$\chi_B t = \chi_{A_1}(t) \dots \chi_{A_m}(t). \tag{7}$$

Τότε,

$$A = \begin{bmatrix} B & & * \\ 0 & A_{m+1} & \end{bmatrix}.$$

Από το επαγωγικό βήμα για $n = 2$ και την (7) έπεται οτι

$$\chi_A(t) = \chi_B(t) \cdot \chi_{A_{m+1}}(t) = \chi_{A_1}(t) \dots \chi_{A_m}(t).$$

(ii) Θέτουμε $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ και $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$. Τότε,

$$\chi_{A_1}(t) = (t-1)(t-3), \quad \chi_{A_2}(t) = (t-2)(t-3).$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & * \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

και από το προηγούμενο ερώτημα,

$$\chi_A(t) = \chi_{A_1}(t) \cdot \chi_{A_2}(t) = (t-1)(t-2)(t-3)^2.$$

Άσκηση 27 *Δείξτε οτι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Ισχύει το αντίστροφο;*

Λύση Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ όμοιοι πίνακες. Τότε, υπάρχει $P \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ αντιστρέψιμος τέτοιος ώστε

$$B = P^{-1}AP. \tag{8}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} \chi_B(t) &= \det(B - tI_{n\times n}) \overset{(8)}{=} \det(P^{-1}AP - tI_{n\times n}) \\ &= \det[(P^{-1}(A - tI_{n\times n})P = \det(P^{-1}) \cdot \det(A - tI_{n\times n}) \cdot \det(P) \\ &= \det(P^{-1}P) \cdot \det(A - tI_{n\times n}) \\ &= \det(A - tI_{n\times n}) = \chi_A(t). \end{aligned}$$

Το αντίστροφο δεν ισχύει. Για παράδειγμα, αν $A := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ και $B := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, έχουμε οτι

$$\chi_A(t) = (t-1)^2 = \quad \chi_B(t)$$

αλλά A, B όχι όμοιοι: αν ήταν, θα υπήρχε αντιστρέψιμος πίνακας $P \in M_{2\times 2}(\mathbb{F})$ με $P^{-1}AP = B$. Αλλά,

$$P^{-1}AP \overset{A=I_{2\times 2}}{=} P^{-1}P = I_{2\times 2} = A \neq B,$$

άτοπο.

Άσκηση 28 *Έστω $A \in M_{n\times n}(K)$ με*

$$\chi_A(t) = (-1)^n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_0.$$

Δείξτε οτι

$$a_0 = \det(A) \quad \textit{και} \quad a_{n-1} = (-1)^{n-1} tr(A).$$

Λύση Έχουμε

$$a_0 = \chi_A(0) = \det(A - 0I_{n\times n}) = \det(A).$$

Επίσης, αν $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$, τότε,

$$\chi_A(t) = (a_{11} - t)(a_{22} - t)\ldots(a_{nn} - t) + p(t),$$

όπου $p \in P_{n-2}[t]$, δηλ. $\deg(P) \leq n-2$. Τότε,

$$\begin{aligned} \chi_A(t) &= (a_{11} - t)(a_{22} - t)\ldots(a_{nn} - t) + p(t) \\ &= (-1)^{n-1}(a_{11} + \ldots + a_{nn})t^{n-1} + \text{υπόλοιποι όροι} \\ \Rightarrow a_{n-1} = (-1)^{n-1}\mathrm{tr}(A). \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Έπεται ότι ένας $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ είναι αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow$ ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού του πολυωνύμου είναι $\neq 0$. Αν $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, τότε κάθε μη μηδενικό πολυώνυμο $\phi(t)$ επί του $\mathbb{C}$ έχει $\#\deg(\phi)$ ρίζες στο $\mathbb{C}$, όχι κατανάγκην διακεκριμένες. Έστω λοιπόν οτι το $\chi_A(t)$ έχει ρίζες τις $\lambda_i,\ 1 \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Τότε

$$\begin{aligned} \chi_A(t) &= (-1)^n(t - \lambda_1)\ldots(t - \lambda_n) \\ \Rightarrow \chi_A(0) &= (-1)^n(-1)^n\lambda_1\ldots\lambda_n = \det(A), \end{aligned}$$

από το προηγούμενο. Επίσης, $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις V- Ελάχιστο πολυώνυμο, Διαγωνισιμότητα, Θεώρημα Cayley-Hamilton

Ορισμός 0.0.7 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ με $dim_{\mathbb{F}}(V) < \infty$. Έστω $f \in End(V)$. Τότε, υπάρχει μοναδικό πολυώνυμο $m_f \in \mathbb{F}[t]$ τέτοιο ώστε*

(i) $m_f(t) \neq 0, \;\; m_f(f) = 0$ *και ο μεγιστοβάθμιος του συντελεστής είναι το 1.*

(ii) Αν $\phi \in \mathbb{F}[t]$ με $\phi(f) = 0$, τότε $m_f(t)/\phi(t)$.

Πόρισμα 0.0.3 *Ισχύει*

$$m_f(t)/\chi_f(t).$$

Δηλ. το $m_f(t)$ είναι το πολυώνυμο με το μικρότερο βαθμό (με μεγιστοβάθμιο συντελεστή 1) τέτοιο ώστε $m_f(f) = 0$. Επίσης,

$$\text{Ρίζες του } \chi_f(t) = \text{Ρίζες του } m_f(t).$$

Θεώρημα 0.0.1 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ με $dim_{\mathbb{F}}(V) < \infty$. Έστω $f \in End(V)$. Η f είναι διαγωνίσιμη $\Leftrightarrow$ $m_f(t) = (t - \lambda_1) \dots (t - \lambda_k)$, όπου λ_i. $1 \leq i \leq n$ οι διακεκριμένες ιδιοτιμές της f.*

Πόρισμα 0.0.4 *Ένας $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ είναι όμοιος προς διαγώνιο $\Leftrightarrow$ $m_f(t) = (t - \lambda_1) \dots (t - \lambda_k)$, όπου λ_i. $1 \leq i \leq n$ οι διακεκριμένες ιδιοτιμές της f.*

Θεώρημα 0.0.2 *Έστω*

$$A = \begin{bmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & B_k \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n},$$

όπου $B_i \in \mathbb{F}^{\sigma_i \times \sigma_i}$, $\sigma_1 + \ldots + \sigma_k = n$. Τότε,

$$m_A(t) = \text{ε.κ.π.}(m_{B_1}(t), \ldots, m_{B_k}(t)).$$

Πρόταση 0.0.8 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ με $dim_{\mathbb{F}}(V) < \infty$. Έστω $f \in End(V)$. Αν W είναι ένας $f-$ αναλλοίωτος υπόχωρος του V (δηλ. $f(W) \subseteq W$, $W \neq 0_V$) τότε*

$$m_{f|_W}(t)/m_f(t).$$

Άσκηση 4 *Σωστό ή λάθος; Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Θεωρούμε ως P του πίνακα που έχει στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A. Αν Οι στήλες του P είναι γραμμικά ανεξάρτητες, τότε*

(i) Ο A είναι αντιστρέψιμος.

(ii) Ο A είναι διαγωνίσιμος.

(iii) *Ο P είναι αντιστρέψιμος.*

(iv) *Ο P είναι διαγωνίσιμος.*

Άσκηση 5 *Έστω $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ με $\chi_A(t) = -t^3 + 3t^2 - 2t$.*

1. *Είναι ο A αντιστρέψιμος;*
2. *Ποιό είναι το ίχνος του A;*
3. *Είναι ο πίνακας $(A - 9I_{3\times 3})(A - 7I_{3\times 3})$ αντιστρέψιμος;*
4. *Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα $A^2 + A - 16I_{3\times 3}$.*
5. *Υπολογίστε το $\chi_{A^2}(t)$.*

Άσκηση 6 *Έστω ο πίνακας*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε το $m_A(t)$.

Άσκηση 7 *Έστω ο πίνακας*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε το $m_A(t)$.

Άσκηση 8 *Έστω η $f \in End(\mathbb{R}^2)$ με $f(x, y) = (2x + 5y, 6x + y)$. Βρείτε το $m_f(t)$.*

Άσκηση 9 *Έστω ο πίνακας*

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Βρείτε τα $\chi_A(t)$ και $m_A(t)$.

Άσκηση 10 *Να προσδιοριστούν οι πίνακες $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ τέτοιοι ώστε $A^2 - 3A + 2I_{2\times 2} = 0$.*

Άσκηση 11 *Έστω V διανυσματικός χώρος επί του σώματος $\mathbb{F}$ με $dim_{\mathbb{F}}(V) < \infty$. Αν $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές της f, δείξτε οτι*

$$dim(V(\lambda) + V(\mu)) = dim(V(\lambda)) + dim(V(\mu)).$$

Άσκηση 12 *Έστω ο πίνακας*

$$A := \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Δείξτε οτι ο A είναι διαγωνίσιμος και ακολούθως βρείτε πίνακες P και Q τέτοιους ώστε $A = PQP^{-1}$.

Άσκηση 13 *Διαγωνοποιείστε τον πίνακα*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 14 *Έστω ο πίνακας*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Δείξτε οτι ο A είναι διαγωνίσιμος και ακολούθως βρείτε πίνακες P και Q τέτοιους ώστε $A = PQP^{-1}$.

Άσκηση 15 *Έστω ο πίνακας*

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Υπολογίστε του A^{13}.

Άσκηση 16 *Έστω $f \in End(V)$, όπου V διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ με $\mathsf{dim}_{\mathbb{F}}(V) = n < \infty$. Έστω $A = (f : \widehat{a}, \widehat{a})$ ο πίνακας αναπαράστασης της f ως προς μια διατεταγμένη βάση $\widehat{a}$ του V και λ μια ιδιοτιμή του A, τότε,*

$$\mathsf{dim}(V(\lambda)) = n - \mathsf{rank}(A - \lambda I_{n\times n}).$$

Άσκηση 17 *Να βρεθεί η διάσταση του (μοναδικού) ιδιόχωρου του πίνακα*

$$A := \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{n\times n}.$$

Άσκηση 18 *Να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για τα $a, b, c \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε ο πίνακας*

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ a & 3 & 0 \\ b & c & -2 \end{bmatrix}$$

να διαγωνοποιείται.

Θεώρημα 0.0.3 (Cayley-Hamilton) *Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Τότε, $\chi_A(A) = 0_{n\times n}$.*

Το πιο πάνω Θεώρημα μας λέει έναν τρόπο να μειώσουμε τις δυνάμεις πινάκων. Ο τρόπος είναι: Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ και $p \in \mathbb{P}_n[t]$. Αν $\chi_A(t)$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A, ο Ευκλείδειος Αλγόριθμος Διαίρεσης του p με το χ_A μας δίνει:

$$p(t) = q(t)\chi_A(t) + r(t),$$

όπου το $q(t)$ βρίσκεται μέσω της διαδικασίας της μακράς διαίρεσης και q πολυώνυμο βαθμού το πολύ $n-1$. Αν $\lambda_i,\ 1 \le i \le k$ οι (διακεκριμένες) ιδιοτιμές του A, τότε $\chi_A(\lambda_i) = 0,\ 1 \le i \le k$. Έτσι,

$$p(\lambda_i) = q(\lambda_i). \tag{9}$$

Αλλά από το Θεώρημα Cayley-Hamilton είναι $\chi_A(A) = 0$, άρα

$$p(A) = q(A)\chi_A(A) + r(A) = r(A).$$

Οι συντελεστές του $r(A)$ καθορίζονται από τις εξισώσεις (9).

Άσκηση 19 *Έστω ο πίνακας*

$$A := \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Απλοποιείστε τον πίνακα $A^5 - 2A^4 + 3I_{3\times 3}$.

Άσκηση 20 *Έστω* $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *με* $x_A(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b,\ b \neq 0$. *Υπολογίστε τους* A^3 *και* A^{-1}.

Άσκηση 21 *Έστω* $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ *ένας αντιστρέψιμος πίνακας. Εκφράστε τον* A^{-1} *ως γραμμικό συνδυασμό δυνάμεων του* A *τάξης το πολύ* $n-1$.

Άσκηση 22 *Έστω ο πίνακας*

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Υπολογίστε τον A^{-1}.

Άσκηση 23 *Έστω* $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ *τέτοιος ώστε* $A^4 = 0_{3\times 3}$. *Ισχύει οτι* $A^3 = 0_{3\times 3}$; *Αν όμως* $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ *τέτοιος ώστε* $A^3 = 0_{3\times 3}$, *ισχύει οτι* $A^2 = 0_{3\times 3}$;

Άσκηση 24 *Έστω* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *με μόνη ιδιοτιμή τη* $\lambda = 0$. *Δείξτε οτι* $A^n = \mathbb{O}_{n\times n}$.

Άσκηση 25 *Έστω* $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ *με* $A^m = \mathbb{O}_{n\times n}$ *για κάποιο* $m \in \mathbb{Z}_+$, *δηλ. ο* A *είναι μηδενοδύναμος. Δείξτε οτι ο* A *διαγωνοποιείται αν και μόνο αν* $A = \mathbb{O}_{n\times n}$.

Άσκηση 26 *Βρείτε ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού που να έχει ρίζα τον πίνακα*

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 27 *Βρείτε τον* A^5, *όπου*

$$A := \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 28 *Να βρεθούν τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα των πινάκων*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

και να εξεταστεί αν αυτοί είναι όμοιοι.

Άσκηση 29 *Δείξτε οτι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο. Ισχύει το αντίστροφο;*

Άσκηση 30 *Έστω $f : V \to V$ μια γραμμική απεικόνιση τέτοια ώστε $f^3 = 9f$. Δείξτε οτι η f είναι διαγωνοποιήσιμη.*

Άσκηση 31 *Έστω $f \in End(\mathbb{R}^3)$ με*

$$f(x, y, z) = (7x - y - 2z, -x + 7y + 2z, -2x + 2y + 10z).$$

Να εξεταστεί αν η f είναι διαγωνοποιήσιμη.

Άσκηση 32 *Να δειχθεί οτι αν $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, τότε $m_A(t) = m_{A^T}(t)$.*

Άσκηση 33 *Έστω $f \in End(V)$, όπου V διανυσματικός χώρος με $dim_{\mathbb{F}}(V) < \infty$ και τέτοιος ώστε $V = V_1 \oplus V_2$, όπου V_1, V_2 f-αναλλοίωτοι υπόχωροι του V. Δείξτε οτι*

$$m_f(t) = \text{ε.κ.π.}(m_{f|_{V_1}}(t), m_{f|_{V_2}}(t)).$$

Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις V- Ελάχιστο πολυώνυμο, Διαγωνισιμότητα, Θεώρημα Cayley-Hamilton

Άσκηση 1 *Σωστό ή λάθος; Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Θεωρούμε ως P του πίνακα που έχει στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A. Αν Οι στήλες του P είναι γραμμικά ανεξάρτητες, τότε*

(i) Ο A είναι αντιστρέψιμος.

(ii) Ο A είναι διαγωνίσιμος.

(iii) Ο P είναι αντιστρέψιμος.

(iv) Ο P είναι διαγωνίσιμος.

Λύση

(i) Λάθος, γιατί δεν ξέρουμε ποιές είναι οι ιδιοτιμές του A.

(ii) Σωστό.

(iii) Σωστό.

(iv) Δε γνωρίζουμε, αφού δεν ξέρουμε τα ιδιοδιανύσματα του P.

Άσκηση 2 *Έστω $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ με $\chi_A(t) = -t^3 + 3t^2 - 2t$.*

1. *Είναι ο A αντιστρέψιμος;*
2. *Ποιό είναι το ίχνος του A;*
3. *Είναι ο πίνακας $(A - 9I_{3\times 3})(A - 7I_{3\times 3})$ αντιστρέψιμος;*
4. *Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα $A^2 + A - 16I_{3\times 3}$.*
5. *Υπολογίστε το $\chi_{A^2}(t)$.*

Λύση

1. Ξέρουμε οτι $\det(A) =$ο σταθερός όρος στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A. Εδώ, ο σταθερός όρος είναι $0 = \det(A)$ και άρα ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.
2. Από προηγούμενη Άσκηση, έχουμε οτι $3 = (-1)^{3-1}tr(A)$ και άρα $tr(A) = 3$.
3. Έχουμε οτι
$$\det(A - tI_{3\times 3}) = \chi_A(t) = -t^3 + 3t^2 - 2t = -t(t^2 - 3t + 2) = -t(t-1)(t-2)$$
και άρα οι ιδιοτιμές του A είναι οι $0, 1, 2$. Άρα, αφού οι αριθμοί $7, 9$ δεν είναι ιδιοτιμές του A, έπεται οτι $\det(A - 9I_{3\times 3}) \neq 0$ και $\det(A - 7I_{3\times 3}) \neq 0$. Έτσι,
$$\det[(A - 9I_{3\times 3})(A - 7I_{3\times 3})] = \det(A - 9I_{3\times 3})\det(A - 7I_{3\times 3}) \neq 0$$
και άρα ο πίνακας αυτός είναι αντιστρέψιμος.

4. Έχουμε

$$\begin{aligned}\det(A^2 + A - 16I_{3\times 3}) &= \det[(A - 8I_{3\times 3})(A + 2I_{3\times 3})] \\ &= \det(A - 8I_{3\times 3})\det(A + 2I_{3\times 3}) = \chi_A(7)\chi_A(9).\end{aligned}$$

5. Από προηγούμενη Άσκηση ξέρουμε οτι αν λ ιδιοτιμή του A και $p \in \mathbb{C}_n[t]$, τότε $p(\lambda)$ ιδιοτιμή του $p(A)$. Έτσι, αν $p(t) = t^2$ και λ ιδιοτιμή του A, τότε $p(\lambda) = \lambda^2$ ιδιοτιμή του A^2. Έτσι, οι ιδιοτιμές του A^2 είναι οι $0, 4, 64$. Συνεπώς,

$$\chi_{A^2}(t) = -t(t-4)(t-64).$$

Άσκηση 3 *Έστω ο πίνακας*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε το $m_A(t)$.

Λύση Έχουμε

$$\chi_A(t) = |A - tI_{2\times 2}| = \begin{bmatrix} 3-t & -2 \\ 0 & -3-t \end{bmatrix} = -(t-3)(t+3).$$

Αφού $m_A(t)/\chi_A(t)$ έπεται οτι $m_A(t) = \chi_A(t)$.

Άσκηση 4 *Έστω ο πίνακας*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε το $m_A(t)$.

Λύση Έχουμε

$$\chi_A(t) = |A - tI_{3\times 3}| = -(t-2)^2(t-3).$$

Αφού $m_A(t)/\chi_A(t)$, έπεται οτι είτε $m_A(t) = (t-2)(t-3)$ είτε $m_A(t) = (t-2)^2(t-3)$. Αλλά, $(A - 2I_{3\times 3})(A - 3I_{3\times 3}) = 0_{3\times 3}$ (θυμόμαστε οτι πρέπει $m_A(A) = 0$) έπεται οτι $m_A(t) = (t-2)(t-3)$.

Άσκηση 5 *Έστω η* $f \in End(\mathbb{R}^2)$ *με* $f(x, y) = (2x + 5y, 6x + y)$. *Βρείτε το* $m_f(t)$.

Λύση Ο πίνακας της f ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^2$ είναι ο

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

Είναι $m_f(t) = m_A(t)$. Βρίσκουμε

$$\chi_A(t) = |A - tI_{2\times 2}| = (t-7)(t+4).$$

Επομένως, $m_A(t) = \chi_A(t)$.

Άσκηση 6 *Έστω ο πίνακας*

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Βρείτε τα $\chi_A(t)$ *και* $m_A(t)$.

Λύση Έχουμε

$$\chi_A(t) = |A - tI_{3\times 3}| = (-1)^3(x-2)^3,$$

αφού ο A είναι άνω τριγωνικός. Συνεπώς, είτε $m_A(t) = x - 2$, είτε $m_A(t) = (x-2)^2$, είτε $m_A(t) = (x-2)^3$. Αλλά, $(A - 2I_{3\times 3}) \neq 0_{3\times 3}$ και $(A - 2I_{3\times 3})(A - 2I_{3\times 3}) = 0_{3\times 3}$, επομένως, $m_A(t) = (x-2)^2$.

Άσκηση 7 *Να προσδιοριστούν οι πίνακες* $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *τέτοιοι ώστε* $A^2 - 3A + 2I_{2\times 2} = 0$.

Λύση Θεωρούμε το πολυώνυμο $\phi(t) = t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2) \in \mathbb{R}_2[t]$. Θα πρέπει $m_A(t)/\phi(t)$. Συνεπώς, είτε $m_A(t) = t - 1$, είτε $m_A(t) = t - 2$, είτε $m_A(t) = (t-1)(t-2)$. Αν $m_A(t) = t - 1$, τότε $A = I_{2\times 2}$. Αν $m_A(t) = t - 2$, τότε $A = 2I_{2\times 2}$. Αν $m_A(t) = (t-1)(t-2)$, τότε, A διαγωνίσιμος με ιδιοτιμές $1, 2$. Συνεπώς A όμοιος προς τον $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Άσκηση 8 *Έστω* V *διανυσματικός χώρος επί του σώματος* $\mathbb{F}$ *με* $dim_{\mathbb{F}}(V) < \infty$. *Αν* $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ *δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές της* f, *δείξτε οτι*

$$dim(V(\lambda) + V(\mu)) = dim(V(\lambda)) + dim(V(\mu)).$$

Λύση Έχουμε οτι

$$\dim(V(\lambda) + V(\mu)) = \dim(V(\lambda)) + \dim(V(\mu)) - \dim(V(\lambda) \cap V(\mu)).$$

Αλλά $\dim(V(\lambda) \cap V(\mu)) = \{0\}$. Πράγματι, αν $u \in V(\lambda) \cap \dim(V(\mu)$, τότε $f(U) = \lambda u$ και $f(u) = \mu u$, δηλ. $(\lambda - \mu)u = 0$. Αλλά $\lambda \neq \mu$, επομένως, $u = 0$.

Άσκηση 9 *Έστω ο πίνακας*

$$A := \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Δείξτε οτι ο A *είναι διαγωνίσιμος και ακολούθως βρείτε πίνακες* P *και* Q *τέτοιους ώστε* $A = PQP^{-1}$.

Λύση Ο A έχει ιδιοτιμές τις $\lambda_{1,2} = 1,\ \lambda_3 = 6$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τα $x_{1,2} = t(2,1,0) + s(-1,0,1),\ s,t \in \mathbb{C},\ s,t \neq 0$ και $x_3 = r(1,-1,2),\ r \in \mathbb{C},\ r \neq 0$. Για $t = s = r = 1$ παίρνουμε τα ιδιοδιανύσματα $(2,1,0), (-1,0,1)$ και $(1,-1,2)$. Η ορίζουσα των 3 αυτών διανυσμάτων είναι $= -5 \neq 0$, και άρα ο A είναι διαγωνίσιμος (ισοδύναμα, αφού $\dim V(\lambda_{1,2}) = 2$ και $\dim V(\lambda_3) = 1$) έπεται οτι A διαγωνίσιμος. Θέτουμε

$$Q := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

δηλ. ο Q είναι ο πίνακας με στοιχεία διαγωνίου τις ιδιοτιμές και αλλού μηδέν. Θέτουμε

$$P := \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

και βρίσκουμε τον P^{-1} :

$$(P|I) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/5 & 3/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & -2/5 & 4/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & -2/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

και αρα

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 3/5 & 1/5 \\ -2/5 & 4/5 & 3/5 \\ 1/5 & -2/5 & 1/5 \end{bmatrix}.$$

Έτσι, $A = PQP^{-1}$.

Άσκηση 10 *Διαγωνοποιείστε του πίνακα*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Λύση Έχουμε

$$\chi_A(t) = |A - tI_{2\times 2}| = \begin{vmatrix} 5-t & 4 \\ 4 & -1-t \end{vmatrix} = -(5-t)(t+1) - 16 = t^2 - 4t - 21 = (t-7)(t+3).$$

Άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι -3 και 7. Ο A έχει δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές, άρα διαγωνοποιείται. Εύρεση Ιδιοχώρων:

$$\begin{aligned} V(\lambda_1) &= V(7) = \{(A - 7I_{2\times 2})X = 0 \mid X \in \mathbb{R}^{2\times 1}\} \\ &= \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^{2\times 1} \mid y = 2x\} = \mathrm{span}\{(2,1)^T\} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} V(\lambda_2) &= V(-3) = \ker\{(A + 3I_{2\times 2})X \mid X \in \mathbb{R}^{2\times 1}\} \\ &= \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^{2\times 1} \mid y = -2x\} = \mathrm{span}\{(1,-2)^T\}. \end{aligned}$$

Θέτουμε

$$Q := \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad P := \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Τότε, $A = P^{-1}QP$.

Άσκηση 11 *Έστω ο πίνακας*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Δείξτε οτι ο A είναι διαγωνίσιμος και ακολούθως βρείτε πίνακες P και Q τέτοιους ώστε $A = PQP^{-1}$.

Λύση Ο A έχει ιδιοτιμές τις

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 1.$$

με αντίστοιχους ιδιοδιοχώρους

$$\begin{aligned} V(1) &= \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle \\ V(2) &= \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \\ V(3) &= \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Ο A διαγωνοποιείται αφού έχει τρία διακεκριμένα ιδιοδιανύσματα. Έστω

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Τότε, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = Q.$

Άσκηση 12 *Έστω ο πίνακας*

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Υπολογίστε του A^{13}.

Λύση Παρατηρούμε οτι $A^2 = I_{3\times 3} \Rightarrow A^{13} = AA^{12} = A(A^2)^6 = A$. Διαφορετικά, μπορούμε να ακολουθήσουμε την 'κλασική' οδό, αυτήν της διαγωνισιμότητας του A : θα δείξουμε οτι ο A είναι διαγωνίσιμος και ακολούθως θα βρούμε πίνακες P και Q τέτοιους ώστε $A = PQP^{-1}$. Τότε, $A^{13} = PQ^{13}P^{-1}$.
Εύρεση Ιδιοτιμών:

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= |A - \lambda I_{3\times 3}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ 0 & -3-\lambda & 4 \\ 0 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(\lambda-1)^2(\lambda+1). \end{aligned}$$

Συνεπώς, οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda_1 = 1$ (διπλή) και $\lambda_2 = -1$.
Εύρεση Ιδιοχώρων:

$$\begin{aligned} V(\lambda_1) = V(1) &= \ker\{(A - \lambda_1 I_{3\times 3})X \mid X \in \mathbb{R}^{3\times 1}\} \\ &= \{(A - \lambda_1 I_{3\times 3})X = 0 \mid X \in \mathbb{R}^{3\times 1}\} \\ &= \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^{3\times 1} \mid y = z\} = \operatorname{span}\{(1,0,0)^T, (0,1,1)^T\} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} V(\lambda_2) = V(2) &= \ker\{(A-\lambda_2 I_{3\times 3})X \mid X \in \mathbb{R}^{3\times 1}\} \\ &= \{(A-\lambda_2 I_{3\times 3})X = 0 \mid X \in \mathbb{R}^{3\times 1}\} \\ &= \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^{3\times 1} \mid y = 2z,\ x = z\} = \mathrm{span}\{(1,2,1)^T\}. \end{aligned}$$

Έχουμε οτι

$$dim_{\mathbb{R}}(V(\lambda_1)) + dim_{\mathbb{R}}(V(\lambda_2)) = 3 = dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3),$$

άρα ο A διαγωνοποιείται και μάλιστα $Q = P^{-1}AP$, όπου

$$Q = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Εύκολα βρίσκουμε οτι

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Τέλος,

$$\begin{aligned} A = PQP^{-1} \Rightarrow A^{13} = PQ^{13}P^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} = A. \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Το Θεώρημα Cayley-Hamilton μας λέει πως αν $A \in M_{n\times n}(K)$ τότε υπάρχει πολυώνυμο βαθμού n που έχει ως ρίζα τον A. Όμως, μπορεί να υπάρχει και πολυώνυμο βαθμού $< n$ που έχει ως ρίζα τον πίνακα. Για παράδειγμα στην άσκηση αυτή είδαμε οτι $A^2 = I_{3\times 3}$ και άρα ο πίνακας A μηδενίζει το πολυώνυμο $p(t) = t^2 - 1$.

Άσκηση 13 *Έστω $f \in End(V)$, όπου V διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ με $dim_{\mathbb{F}}(V) = n < \infty$. Έστω $A = (f : \widehat{a}, \widehat{a})$ ο πίνακας αναπαράστασης της f ως προς μια διατεταγμένη βάση $\widehat{a}$ του V και λ μια ιδιοτιμή του A, τότε,*

$$dim(V(\lambda)) = n - rank(A - \lambda I_{n\times n}).$$

Λύση Ξέρουμε από Θεώρημα οτι

$$n = \mathrm{dimKer}(f - \lambda I_{n\times n}) + \mathrm{dimIm}(f - \lambda I_{n\times n}).$$

Αλλά $\mathrm{Ker}(f - \lambda I_{n\times n}) = V(\lambda)$. Επομένως,

$$\begin{aligned} \dim(V(\lambda)) &= n - \mathrm{dimIm}(f - \lambda I_{n\times n}) \\ &= n - \dim(\text{χώρου στηλών του } A - \lambda I_{n\times n}) \\ &= n - \mathrm{rank}(A - \lambda I_{n\times n}). \end{aligned}$$

Άσκηση 14 *Να βρεθεί η διάσταση του (μοναδικού) ιδιόχωρου του πίνακα*

$$A := \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{n\times n}.$$

Λύση Ο πίνακας A είναι άνω τριγωνικός, επομένως

$$\chi_A(t) = (-1)^n(t-1)^n,$$

δηλ. η (μοναδική) ιδιοτιμή του A είναι η $\lambda = 1$ η οποία έχει αλγεβρική πολλαπλότητα n. Από την προηγούμενη άσκηση έχουμε οτι $\dim_{\mathbb{F}} V(1) = n - \text{rank}(A - I_{n\times n})$. Αλλά,

$$A - I_{n\times n} = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Έτσι, αν $a = 0$, τότε, $\text{rank}(A - I_{n\times n}) = 0 \Rightarrow \dim_{\mathbb{F}} V(1) = n$ ενώ αν $a \neq 0$, τότε, $\text{rank}(A - I_{n\times n}) = n - 1 \Rightarrow \dim_{\mathbb{F}} V(1) = 1$.

Άσκηση 15 *Να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για τα $a, b, c \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε ο πίνακας*

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ a & 3 & 0 \\ b & c & -2 \end{bmatrix}$$

να διαγωνοποιείται.

Λύση Έχουμε οτι $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda + 2)$. Για να διαγωνοποιείται ο A, αρκεί από Θέωρημα οι διαστάσεις των δύο ιδιοχώρων $V(3), V(-2)$ έχουν άθροισμα =3=dim($\mathbb{R}^3$). Θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση

$$\dim(V(\lambda)) = n - \text{rank}(A - \lambda I_{n\times n})$$

από την προηγούμενη άσκηση. Έχουμε

$$A - 3I_{3\times 3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & c & -5 \end{bmatrix}.$$

Επομένως, αν $a = 0,\ b, c \in \mathbb{R}$, τότε $\text{rank}(A - 3I_{3\times 3}) = 1$ ενώ σε κάθε άλλη περίπτωση, $\text{rank}(A - 3I_{3\times 3}) = 2$. Επίσης,

$$A + 2I_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ a & 5 & 0 \\ b & c & 0 \end{bmatrix}.$$

Συνεπώς, $\text{rank}(A + 2I_{3\times 3}) = 2$. έτσι, ο πίνακας διαγωνοποιείται αν $a = 0,\ b, c \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 16 *Έστω ο πίνακας*

$$A := \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Απλοποιείστε τον πίνακα $A^5 - 2A^4 + 3I_{3\times 3}$.

Λύση Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι

$$\chi_A(t) = -t^3 + 2t^2 + t - 2.$$

Από το Θεώρημα Cayley - Hamilton έχουμε οτι $x_A(A) = 0_{2\times 2}$, δηλ.

$$-A^3 + 2A^2 + A - 2I_{2\times 2} = 0. \tag{10}$$

Επίσης, από τον Αλγόριθμο της Διαίρεσης πολυωνύμων έχουμε οτι

$$(t^5 - 2t^4 + 3)/\chi_A(t) = t^2 + 1 + \frac{t+1}{\chi_A(t)},$$

δηλ.

$$t^5 - 2t^4 + 3 = \chi_A(t)(t^2+1) + t + 1. \tag{11}$$

Έτσι, από τις (10), (11) έπεται οτι

$$A^5 - 2A^4 + 3I_{3\times 3} = \chi_A(A)(A^2 + I_{3\times 3}) + A + I_{3\times 3} = A + I_{3\times 3}.$$

Άσκηση 17 *Έστω* $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *με* $x_A(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b,\ b \neq 0$. *Υπολογίστε τους* A^3 *και* A^{-1}.

Λύση Καταρχήν ο A είναι αντιστρέψιμος, αφού $\det A = b \neq 0$. Από το Θεώρημα Cayley - Hamilton έχουμε οτι $x_A(A) = 0_{2\times 2}$. Δηλ.

$$x_A(A) \quad = \quad A^2 + aA + bI_{2\times 2} = 0_{2\times 2} \Leftrightarrow A^2 = -aA - bI_{2\times 2}$$

και

$$\begin{aligned} A^3 &= AA^2 = A(-aA - bI_{2\times 2}) = -aA^2 - bA = -a(-aA - bI_{2\times 2}) - bA \\ &= (a^2 - b)A + abI_{2\times 2}. \end{aligned}$$

Επίσης,

$$A^2 + aA + bI_{2\times 2} = 0_{2\times 2} \Rightarrow A(a + aI_{2\times 2}) = -bI_{2\times 2}) \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{b}A - \frac{a}{b}I_{2\times 2}$$

Άσκηση 18 *Έστω* $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ *ένας αντιστρέψιμος πίνακας. Εκφράστε του* A^{-1} *ως γραμμικό συνδυασμό δυνάμεων του* A *τάξης το πολύ* $n-1$.

Λύση Έστω

$$\chi_A(t) = (-1)^n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_0$$

το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A. Από το Θεώρημα Cayley-Hamilton έχουμε οτι $\chi_A(A) = 0$, δηλ.

$$0 = \chi_A(A) = (-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_0 I_{n\times n}.$$

Αλλά $a_0 = \det(A)I_{n\times n}$. Έτσι,

$$(-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + \det(A)I_{n\times n} = 0.$$

Έτσι, η πιο πάνω σχέση γράφεται ως

$$-\det(A)I_{n\times n} = A[(-1)^n A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \ldots + c_1 I_{n\times n}].$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της πιο πάνω σχέσης με A^{-1} έχουμε

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{-1}{\det(A)}(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \ldots + a_1 I_{n\times n}) \\ &\overset{a_{n-1}=(-1)^{n-1}tr(A)}{=} \frac{-1}{\det(A)}(A^{n-1} + (-1)^{n-1}tr(A)A^{n-2} + \ldots + a_1 I_{n\times n}) \end{aligned}$$

Άσκηση 19 *Έστω ο πίνακας*

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Υπολογίστε του A^{-1}.

Λύση Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι

$$\chi_A(t) = t^3 - 4t^2 - 3t + 10.$$

Από το Θεώρημα Cayley - Hamilton έχουμε οτι $x_A(A) = 0_{3\times 3}$, δηλ.

$$\begin{aligned} & A^3 - 4A^2 - 3A + 10I_{3\times 3} = 0_{3\times 3} \\ \Rightarrow\quad & -A^3 + 4A^2 + 3A = 10I_{3\times 3} \\ \Rightarrow\quad & -\frac{1}{10}(A^3 - 4A^2 - 3A) = I_{3\times 3} \\ \overset{\cdot A^{-1}}{\Rightarrow}\quad & A^{-1} = -\frac{1}{10}(A^2 - 4A - 3I_{3\times 3}) \\ & = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Άσκηση 20 *Έστω* $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ *τέτοιος ώστε* $A^4 = 0_{3\times 3}$. *Ισχύει οτι* $A^3 = 0_{3\times 3}$; *Αν όμως* $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ *τέτοιος ώστε* $A^3 = 0_{3\times 3}$, *ισχύει οτι* $A^2 = 0_{3\times 3}$;

Λύση Έστω $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ τέτοιος ώστε $A^4 = 0_{3\times 3}$ και έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ μια ιδιοτιμή του A, τότε $\lambda^4 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \chi_A(t) = t^3 \Rightarrow A^3 = 0_{3\times 3}$, όπου η τελευταία ισότητα έπεται από το Θεώρημα Cayley-Hamilton. Αν $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ τέτοιος ώστε $A^3 = 0_{3\times 3}$, τότε δεν ισχύει εν γένει οτι ισχύει οτι $A^2 = 0_{3\times 3}$. Για παράδειγμα, αν

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

τότε $A \neq A^2 \neq A^3$.

Άσκηση 21 *Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ με μόνη ιδιοτιμή τη $\lambda = 0$. Δείξτε οτι $A^n = \mathbb{O}_{n\times n}$.*

Λύση Αφού η $\lambda = 0$ είναι η μόνη ιδιοτιμή του A, έπεται οτι $\chi_A(t) = t^n$ και άρα από το Θεώρημα Cayley-Hamilton έπεται οτι $\chi_A(A) = \mathbb{O}_{n\times n}$, δηλ. $A^n = \mathbb{O}_{n\times n}$.

Άσκηση 22 *Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ με $A^m = \mathbb{O}_{n\times n}$ για κάποιο $m \in \mathbb{Z}_+$, δηλ. ο A είναι μηδενοδύναμος. Δείξτε οτι ο A διαγωνοποιείται αν και μόνο αν $A = \mathbb{O}_{n\times n}$.*

Λύση ($\Rightarrow$) Έστω οτι ο A είναι διαγωνοποιήσιμος. Τότε το ελάχιστο του πολυώνυμο $m_A(t)$ είναι γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων. Θεωρούμε το πολυώνυμο $p(t) = t^m$. Τότε, από υπόθεση, $p(A) = A^m = \mathbb{O}_{n\times n}$. Επομένως, $m_A(t)/p(t) \Rightarrow m_A(t) = t^k,\ 1 \leq k \leq m$. Αλλά το $m_A(t)$ είναι γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων, συνεπώς $m_A(t) = t$ και άρα από το Θεώρημα Cayley-Hamilton έπεται οτι $m_A(A) = \mathbb{O}_{n\times n}$.

($\Leftarrow$) Αν $A = \mathbb{O}_{n\times n}$ τότε A διαγωνοποιήσιμος.

Άσκηση 23 *Βρείτε ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού που να έχει ρίζα του πίνακα*

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Λύση Από το Θεώρημα Cayley - Hamilton γνωρίζουμε ότι ένας πίνακας μηδενίζει το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο. Άρα αρκεί να βρούμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα. Έχουμε

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -4 & 3 \\ 0 & t-3 & -1 \\ 0 & -2 & t+1 \end{vmatrix} = (t-1)(t^2-2t-5) = t^3 - 3t^2 - 3t + 5$$

είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα και άρα μηδενίζεται από αυτόν.

Άσκηση 24 *Βρείτε του A^5, όπου*

$$A := \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Λύση Αφού ο A είναι άνω τριγωνικός, οι ιδιοτιμές του είναι τα στοιχεία της διαγωνίου. Άρα, $\chi_A(t) = (-1)^3(t+1)(t-1)(t-2) = -t^3 + 2t^2 + t - 2$. Από το Θεώρημα Cayley - Hamilton, θα είναι $x(A) = 0$, δηλ.

$$\begin{aligned} \chi_A(A) &= -A^3 + 2A^2 + A - 2I_{2\times 2} = 0 \Leftrightarrow A^3 = 2A^2 + A - 2I_{2\times 2} \\ \overset{A}{\Leftrightarrow} A^4 &= 2A^3 + A^2 - 2A = 2(2A^2 + A - 2I_{2\times 2}) + A^2 - 2A = 5A^2 - 4I_{2\times 2} \\ \Leftrightarrow A^5 &= 5A^3 - 4A = 5(2A^2 + A - 2I_{2\times 2}) - 4A = 10A^2 + A - 10I_{2\times 2}. \end{aligned}$$

Άσκηση 25 *Να βρεθούν τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα των πινάκων*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

και να εξεταστεί αν αυτοί είναι όμοιοι.

Λύση Έχουμε οτι (αφού A άνω τριγωνικός)

$$\chi_A(t) = (-1)^3(t-3)^3 = -(t-3)^3.$$

Συνεπώς, $m_A(t) = t-3$ ή $= (t-3)^2$ ή $(t-3)^3$. Αλλά,

$$A - 3I_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0_{3\times 3}, \quad (A - 3I_{3\times 3})^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0_{3\times 3}$$

αλλά $(A - I_{3\times 3})^3 = 0_{3\times 3}$, επομένως, $m_A(t) = (t-3)^3 = \chi_A(t)$. Για τον πίνακα B, έχουμε οτι

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 & & 0 \\ & B_2 & \\ 0 & & B_3 \end{bmatrix},$$

όπου $B_i = (3) \in \mathbb{R}^{1\times 1},\ i = 1,2,3$ με $m_{B_i}(t) = t-3$. Τότε, από Θεώρημα,

$$m_B(t) = \text{ε.κ.π.}(m_{B_1}(t), m_{B_2}(t), m_{B_3}(t)) = t-3.$$

Επομένως, $m_B(t) \neq m_A(t)$, άρα A, B όχι όμοιοι.

Άσκηση 26 *Δείξτε οτι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο. Ισχύει το αντίστροφο;*

Λύση *1ος Τρόπος*
Έστω $A, B \in M_{m\times m}(\mathbb{F})$ δύο όμοιοι πίνακες. Τότε, υπάρχει $f \in End(\mathbb{F}^{m\times 1})$ και διατεταγμένες βάσεις $\widehat{a}$ και $\widehat{b}$ του $\mathbb{F}^{m\times 1}$ τέτοιες ώστε $(f : \widehat{a}, \widehat{a}) = A$ και $(f : \widehat{b}, \widehat{b}) = B$. Τότε, $m_f(t) = m_A(t)$ και $m_f(t) = m_B(t)$. Άρα, $m_A(t) = m_B(t)$.

2ος Τρόπος
Έστω $A, B \in M_{m\times m}(\mathbb{F})$ δύο όμοιοι πίνακες. Τότε υπάρχει $F \in M_{m\times m}(\mathbb{F})$ αντιστρέψιμος τέτοιος ώστε $S^{-1}AS = B$. Τότε, αν

$$p(t) = a_0 I_{m\times m} + a_1 t + \ldots + a_k t^k \in \mathbb{F}_k[t],$$

τότε,

$$\begin{aligned} p(B) &= a_0 I_{m\times m} + a_1 B + \ldots + a_k B^k \\ &= a_0 I_{m\times m} + a_1 S^{-1}AS + \ldots + a_k (S^{-1}AS)^k \\ &= a_0 S^{-1} I_{m\times m} S + a_1 S^{-1}AS + \ldots + a_k S^{-1} A^k S \\ &= S^{-1}(a_0 I_{m\times m} + a_1 A + \ldots + a_k A^k) \\ &= S^{-1} p(A) S. \end{aligned}$$

Συνεπώς, $p(B) = 0 \Leftrightarrow p(A) = 0$, άρα $m_A(x) = m_B(x)$.

Το αντίστροφο δεν ισχύει, π.χ. αν

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

τότε, $m_A(t) = m_B(t) = t^2$, αλλά οι δύο πίνακες δεν είναι όμοιοι αφού $\text{rank}(A) = 1 \neq \text{rank}(B) = 2$.

Αλλά, αν $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ με $m_A t) = m_B(t)$ και $\chi_A(t) = \chi_B(t)$ και καμμιά ιδιοτιμή δεν έχει αλγεβρική πολλαπλότητα μεγαλύτερη από 3, τότε οι πίνακες A, B είναι όμοιοι. Επίσης ισχύει οτι αν $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ μηδενοδύναμοι, τότε A όμοιος με το B αν και μόνο αν $m_A(t) = m_B(t)$.

Άσκηση 27 *Έστω $f : V \to V$ μια γραμμική απεικόνιση τέτοια ώστε $f^3 = 9f$. Δείξτε οτι η f είναι διαγωνοποιήσιμη.*

Λύση Έστω $m_f(t)$ το ελάχιστο πολυώνυμο της f. Από υπόθεση έχουμε οτι $f^3 = 9f \Rightarrow f^3 - 9f = 0 \Rightarrow f \circ (f^2 - 9id_V) = 0$. Συνεπώς, $m_f(t)/[t(t^2 - 9) = t(t-3)(t+3)]$. Συνεπώς, το m_f θα είναι είτε το t, είτε το $t(t-3)$ είτε το $t(t+3)$ είτε το $t(t-3)(t+3)$, είτε το $(t-3)(t+3)$ είτε το $t-3$ είτε το $t+3$. Σε κάθε περίπτωση, το m_f είναι γινόμενο ανάγωγων πρωτοβαθμίων όρων, άρα η f διαγωνοποιείται.

Άσκηση 28 *Έστω $f \in End(\mathbb{R}^3)$ με*

$$f(x, y, z) = (7x - y - 2z, -x + 7y + 2z, -2x + 2y + 10z).$$

Να εξεταστεί αν η f είναι διαγωνοποιήσιμη.

Λύση Θεωρούμε τη συνήθη βάση $\widehat{e}$ του $\mathbb{R}^3$. Τότε,

$$(f : \widehat{e}, \widehat{e}) \equiv \mathcal{M}_{\widehat{e}}^{\widehat{e}} = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 \\ -1 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 10 \end{bmatrix} := A.$$

Έχουμε οτι $\chi_A(t) = -(t-6)^2(t-12)$. Παρατηρούμε οτι $(A - 6I_{3\times 3})(A - 12I_{3\times 3}) = 0$, επομένως, $m_f(t) = (t-6)(t-12)$. Αφού λοιπόν το $m_f(t)$ είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων, η f είναι διαγωνοποιήσιμη και ο A όμοιος προς τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 29 *Να δειχθεί οτι αν $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, τότε $m_A(t) = m_{A^T}(t)$.*

Λύση Έστω οτι

$$m_A(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_{n-1}t^{n-1} + t^n.$$

Τότε,

$$\begin{aligned} & m_A(A) = a_0 I_{n\times n} + a_1 A + \ldots + a_{n-1}A^{n-1} + A^n \\ \Rightarrow \quad & (a_0 I_{n\times n} + a_1 A + \ldots + a_{n-1}A^{n-1} + A^n)^T = 0_{n\times n} \\ \Rightarrow \quad & a_0 I_{n\times n} + a_1 A^T + \ldots + (A^T)^n = 0_{n\times n}, \end{aligned}$$

δηλ. $m_A(A^T) = 0$. Άρα, $m_{A^T}(t)/m_A(t)$. Ομοίως, δείχνουμε οτι $m_A(x)/m_{A^T}(t)$. Συνεπώς, $m_{A^T}(t) = cm_A(t)$. Αλλά τα δύο αυτά πολυώνυμα είναι μονικά, άρα τελικά είναι ίσα.

Άσκηση 30 *Έστω $f \in End(V)$, όπου V διανυσματικός χώρος με $dim_{\mathbb{F}}(V) < \infty$ και τέτοιος ώστε $V = V_1 \oplus V_2$, όπου V_1, V_2 f-αναλλοίωτοι υπόχωροι του V. Δείξτε οτι*

$$m_f(t) = \text{ε.κ.π.}(m_{f|_{V_1}}(t), m_{f|_{V_2}}(t)).$$

Λύση Από Πρόταση έχουμε οτι

$$\chi_{f_{V_1}}(t), \chi_{f_{V_2}}(t)/\chi_f(t), \quad m_{f_{V_1}}(t), m_{f_{V_1}}(t)/m_f(t).$$

Συνεπώς, το $m_f(t)$ είναι κοινό πολλαπλάσιο των $m_{f_{V_1}}(t),\ m_{f_{V_2}}(t)$. Θα δείξουμε οτι είναι και το ελάχιστο. Έστω $\phi(t)$ ένα άλλο κοινό πολλαπλάσιο των $m_{f_{V_1}}(t),\ m_{f_{V_2}}(t)$. Τότε, αν $v \in V = V_1 \oplus V_2$, είναι $v = v_1 + v_2$, όπου $v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2$. Έτσι

$$\phi(f)(v) = \phi(f)(v_1) + \phi(f)(v_2) = \phi(f|_{V_1})(v_1) + \phi(f|_{V_2})(v_2) = 0.$$

Επομένως, $\phi(f) = 0$, άρα $m_f(t)/\phi(t)$. Συνεπώς,

$$m_f(t) = \text{ε.κ.π.}(m_{f|_{V_1}}(t), m_{f|_{V_2}}(t)).$$

0.0.1 Παράρτημα

εδώ θα δούμε μερικές χρήσιμες στις Διαφορικές Εξισώσεις Ιδιότητες του Θεωρήματος Cayley-Hamilton.

Προσδιορισμός Αναλυτικών Συναρτήσεων Πινάκων Έστω $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, όπου $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ χωρίο. Τότε, η f γράφεται ως δυναμοσειρά έστω χωρίς απώλεια της γενικότητας με κέντρο το 0 και ακτίνας $R < dist(0, \partial\Omega)$, δηλ.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad |z| < R.$$

Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(z)$ και ιδιοτιμές λ_i. Τότε, από τον Ευκλείδειο Αλγόριθμο της Διαίρεσης, έχουμε

$$f(z) = q(z)\chi_A(z) + r(z),$$

όπου το r είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ $n-1$. Τότε, για $z = \lambda_i$, έχουμε:

$$f(\lambda_i) = r(\lambda_i) = \sum_{k=0}^{n-1} d_k \lambda_i^k.$$

Το σύστημα αυτό μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε τους συντελεστές $d_k,\ 1 \le k \le n-1$. Τώρα,

$$f(A) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k = \chi_A(A) \sum_{n=0}^{\infty} d_k z^k + r(A) = r(A),$$

με την τελευταία ισότητα από το Θεώρημα Cayley-Hamilton. Έτσι,

$$f(A) = \sum_{k=0}^{n-1} d_k A^k.$$

Παράδειγμα Έστω

$$A := \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Θα προσδιορίσουμε την $\sin(A)$.

Η συνάρτηση $z \mapsto \sin(z)$ είναι ολόμορφη παντού στο επίπεδο και έχει ανάπτυγμα (με κέντρο το 0 και όσο μεγάλη ακτίνα σύγκλισης επιθυμούμε) το

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Βρίσκουμε πολύ εύκολα οτι

$$\chi_A(z) = (z+2)(z+3).$$

Έτσι, οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda_1 = -3$ και $\lambda_2 = -2$. Αφού εδώ το $n = 2$, ο αλγόριθμος διαίρεσης μας δίνει οτι

$$\sin(z) = q(z)\chi_A(z) + r(z)$$

με το βαθμό του $r(z)$ να είναι το πολύ 1. Έστω λοιπόν οτι $r(z) = d_0 + d_1 z$. Τότε,

$$\begin{aligned} \sin(\lambda_1) &= \sin(-3) = d_0 + d_1\lambda_1 = d_0 - 3d_1 \\ \sin(\lambda_2) &= \sin(-2) = d_0 + d_1\lambda_2 = d_0 - 2d_1. \end{aligned}$$

Αυτό μας δίνει

$$\begin{aligned} d_0 &= 3\sin(-2) - 2\sin(-3) \\ d_1 &= \sin(-2) - \sin(-3). \end{aligned}$$

Τελικά,

$$\sin(A) = (3\sin(-2) - 2\sin(-3))I_{2\times 2} + (\sin(-2) - \sin(-3))A,$$

δηλ.

$$\sin \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(-3) & \sin) - 2) - \sin(-3) \\ 0 & \sin(-2) \end{bmatrix}.$$

Υπολογισμός Εκθετικών Δυνάμεων πίνακα Η συνάρτηση $z \mapsto e^z$ είναι ολόμορφη σε όλο το επίπεδο και έχει ανάπτυγμα (με κέντρο το 0 και όσο μεγάλη ακτίνα σύγκλισης επιθυμούμε) το

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Αν $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, επιθυμούμε να υπολογίσουμε παραστάσεις της μορφής

$$e^{At} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}. \tag{12}$$

Ακολουθώντας τη διαδικασία του πιο πάνω παραδείγματος, καταλήγουμε στον υπολογισμό της παράστασης

$$e^z = \sum_{k=0}^{n-1} d_k A^k \tag{13}$$

με τους συντελεστές $d_k,\ 0 \leq k \leq n-1$ να υπολογίζονται με τη βοήθεια του Θεωρήματος Cayley-Hamilton μέσω της σχέσης

$$e^{\lambda_i t} = \sum_{k=1}^{n-1} d_k \lambda_i^k, \tag{14}$$

όπου λ_i οι ιδιοτιμές του A. αν κάποιες από τις ιδιοτιμές επαναλαμβάνονται, τότε η σχέση (14) θα εμπεριέχει δύο ή περισσότερες ίδιες εξισώσεις και άρα δεν θα αποτελεί γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο λύσεων. Επίσης, αν μια ιδιοτιμή παρουσιάζεται με πολλαπλότητα m, τότε τα πρώτα $m-1$ διαφορικά του $\chi_A(z)$ θα μηδενίζονται στις ιδιοτιμές και άρα οι εξισώσεις

$$\begin{aligned} f(\lambda_i &= \sum_{k=0}^{n-1} d_k \lambda_i^k = r(\lambda_i) \\ \left.\frac{df}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_i} &= \left.\frac{dr}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_i} \\ &\vdots \\ \left.\frac{d^{m-1}f}{d\lambda^{m-1}}\right|_{\lambda=\lambda_i} &= \left.\frac{d^{m-1}r}{d\lambda^{m-1}}\right|_{\lambda=\lambda_i}. \end{aligned}$$

αποτελούν ένα σύστημα m το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων εξισώσεων οι οποίες σε συνδυασμό με τις υπόλοιπες εξισώσεις θα μας δώσουν ένα σύστημα n εξισώσεων από τις οποίες προσδιορίζουμε τους συντελεστές $d_k,\ 1 \leq k \leq n$.

Παραδείγματα

1. Έστω ο πίνακας

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Θα προσδιορίσουμε τον e^{At}. Έχουμε οτι $\chi_A(z) = (z+1)(z+2)$. Από την εξίσωση (13) έχουμε οτι $e^{At} = d_0 I_{2\times 2} + d_1 A$. Από τις εξισώσεις (14) έχουμε

$$\begin{aligned} e^{-t} &= d_0 - d_1 \\ e^{-2t} &= d_0 - 2d_1 \end{aligned}$$

Έτσι, $d_0 = (2e^{-t} - e^{-2t})$ και $d_1 = (e^{-t} - e^{-2t})$. Άρα,

$$e^{At} = (2e^{-t} - e^{-t}) I_{2\times 2} + (e^{-t} - e^{-2t}) A = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

2. Έστω ο πίνακας

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Θα προσδιορίσουμε τον e^{At}. Έχουμε οτι $\chi_A(z) = z^2 + 1 = (z-i)(z+1)$. Από την εξίσωση (13) έχουμε οτι $e^{At} = d_0 I_{2\times 2} + d_1 A$. Από τις εξισώσεις (14) έχουμε

$$\begin{aligned} e^{it} &= d_0 + i d_1 = \cos t + i \sin t \\ e^{-it} &= d_0 - i d_1 = \cos t - i \sin t \end{aligned}$$

δηλ. $d_0 = \cos t$ και $d_1 = \sin t$. Άρα,

$$e^{At} = \cos t I_{2\times 2} + \sin t A = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}.$$

Γραμμική Άλγεβρα

ΑΣΚΗΣΕΙΣ VI - Θέωρημα Πρωταρχικής Ανάλυσης, Ανάλυση κατά Jordan

Θεώρημα 0.0.4 *[Πρωταρχικής Ανάλυσης] Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ με $dim_{\mathbb{F}}(V) < \infty$. Έστω $f \in End(V)$ με*

$$m_f(t) = p_1(t)^{n_1} p_2(t)^{n_2} \dots p_k(t)^{n_k},$$

όπου $p_1, p_2, \dots, p_k$ διακεκριμένα ανάγωγα πολυώνυμα του $\mathbb{F}[x]$. Τότε, κάθε $V_i = ker(p_i(f)^{n_i})$ είναι ένας $f-$αναλλοίωτος υπόχωρος του V και ισχύει

$$V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i.$$

Επιπλέον,

$$m_{f|_{V_i}}(t) = p_i(t)^{n_i}, \quad i \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

Πόρισμα 0.0.5 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ με $dim_{\mathbb{F}}(V) < \infty$. Έστω $f \in End(V)$ με*

$$\chi_f(t) = (-1)^m p_1(t)^{\tau_1} p_2(t)^{\tau_2} \dots p_k(t)^{\tau_k}$$

και

$$m_f(t) = p_1(t)^{n_1} p_2(t)^{n_2} \dots p_k(t)^{n_k},$$

όπου $p_1, p_2, \dots, p_k$ διακεκριμένα ανάγωγα πολυώνυμα του $\mathbb{F}[x]$ με πρώτο συντελεστή 1. Αν B_i είναι μια διατεταγμένη βάση του $ker(p_i(f)^{n_i})$, $1 \leq i \leq k$, τότε η $\widehat{B} = (B_1, \dots, B_k)$ είναι μια διατεταγμένη βάση του V και

$$\mathcal{M}_{\widehat{B}}^{\widehat{B}} \equiv (f : \widehat{B}, \widehat{B}) = \begin{bmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & A_k \end{bmatrix}.$$

Επιπλέον,

$$\chi_{A_i}(t) = (-1)^{\tau_i deg(p_i(t))} p_i(t)^{\tau_i} \quad \text{και} \quad m_{A_i}(t) = p_i(t)^{n_i}.$$

Άσκηση 34 *Έστω ο πίνακας*

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Να δειχθεί οτι ο A είναι όμοιος προς έναν πίνακα της μορφής

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Λύση Έχουμε οτι $\chi_A(t) = (t^2+1)(t-2)$ και (άρα) $m_A(x) = (t^2+1)(t-2)$. Συνεπώς, αφού το ελάχιστο πολυώνυμο δεν είναι γίνομενο ανάγωγων πολυωνύμων, ο A δεν είναι διαγωνοποιήσιμος. Θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Πρωταρχικής Ανάλυσης για να βρούμε έναν πίνακα απλούστερης μορφής διαγώνιο προς τον A. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\gamma_A : \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}^{3\times 1} \quad \text{με} \quad X \mapsto \gamma_A(X) := AX.$$

Από το Θεώρημα (0.0.4), έχουμε οτι

$$\mathbb{R}^{3\times 1} = \ker(\gamma_A^2 + id_{\mathbb{R}^{3\times 1}}) \oplus \ker(\gamma_A - 2id_{\mathbb{R}^{3\times 1}}).$$

Θα βρούμε βάσεις για τους $\ker(\gamma_A^2 + id_{\mathbb{R}^{3\times 1}})$ και $\ker(\gamma_A - 2id_{\mathbb{R}^{3\times 1}})$. Έχουμε οτι

$$\gamma_A^2 + id_{\mathbb{R}^{3\times 1}} = \gamma_A^2 + \gamma_{I_{3\times 3}} = \gamma_{A^2+I_{3\times 3}}$$

και αφού

$$A^2 + I_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -10 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$

έπεται οτι

$$\ker(\gamma_A^2 + id_{\mathbb{R}^{3\times 1}}) = \{X \in \mathbb{R}^{3\times 1} \mid (A^2 + I_{3\times 3}) = 0_{3\times 3}\} = \operatorname{span}\{(1,1,0)^T, (0,0,1)^T\}.$$

Επίσης,

$$\gamma_A - 2id_{\mathbb{R}^{3\times 1}} = \gamma_A - 2\gamma_{I_{3\times 3}} = \gamma_{A-2I_{3\times 3}}$$

και αφού

$$A - 2I_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ -10 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$

έπεται οτι

$$\ker(\gamma_A - 2id_{\mathbb{R}^{3\times 1}}) = \{X \in \mathbb{R}^{3\times 1} \mid (A - 2I_{3\times 3}) = 0_{3\times 3}\} = \operatorname{span}\{(1,0,2)^T\}.$$

Θεωρούμε λοιπόν ως βάση

$$\widehat{b} := \left((1,1,0)^T, (0,0,1)^T, (1,0,2)^T\right).$$

Υπολογίζουμε τις εικόνες των 3 αυτών διανυσμάτων της $\widehat{b}$ μέσω της γ_A :

$$\begin{aligned}
\gamma_A((1,1,0)^T) &= A(1,1,0)^T = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
\gamma_A((0,0,1)^T) &= A(1,1,0)^T = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \\
&= -2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
\gamma_A((1,0,2)^T) &= A(1,0,2)^T = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$M_{\widehat{b}}^{\widehat{b}}(\gamma_A) = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -0 \\ 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ο A είναι όμοιος προς τον πίνακα αυτό.

Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις VI- Διαγωνοποίηση με τη μέθοδο Jordan

Θεώρημα 0.0.5 *Έστω $f \in End(V)$, όπου V διανυσματικός χώρος επί ενός σώματος $\mathbb{F}$ με $dim_{\mathbb{F}}(V) < \infty$. Αν*

$$\chi_f(t) = (t-\lambda)^m \quad \text{και} \quad m_f(t) = (t-\lambda)^n,$$

τότε υπάρχει μια διατεταγμένη βάση $\widehat{b}$ του V τέτοια ώστε

$$(f : \widehat{b}, \widehat{b}) = \begin{bmatrix} J_{\lambda,\delta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{\lambda,\delta_\tau} \end{bmatrix}$$

όπου

1. $\tau = dim_{\mathbb{F}} V(\lambda)$
2. $\chi_f(t) = \chi_{J_{\lambda,\delta_1}}(t) \dots \chi_{J_{\lambda,\delta_\tau}}(t) = (t-\lambda)^m$ *και άρα*

$$m = \sum_{i=1}^{\tau} \delta_i.$$

3. $m_f(t) = \text{ε.κ.π.}(m_{J_{\lambda,\delta_1}}(t) \dots m_{J_{\lambda,\delta_\tau}}(t)) = (t-\lambda)^n$ *και άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $i \in \{1, 2, \dots, \tau\}$ τέτοιο ώστε $\delta_i = n$.*

Πόρισμα 0.0.6 *Έστω $f \in End(V)$, όπου V διανυσματικός χώρος επί ενός σώματος $\mathbb{F}$ με $dim_{\mathbb{F}}(V) < \infty$. Αν*

$$m_f(t) = (t-\lambda_1)^{n_1}(t-\lambda_2)^{n_2} \dots (t-\lambda_k)^{n_k},$$

όπου $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ οι διακεκριμένες ιδιοτιμές της f, τότε υπάρχει μια διατεταγμένη βάση $\widehat{b}$ του τέτοια ώστε

$$(f : \widehat{b}, \widehat{b}) = \begin{bmatrix} J_{\lambda_1,\delta_{(1,\lambda_1)}} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & J_{\lambda_1,\delta_{(\tau_{\lambda_1},\lambda_1)}} & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & J_{\lambda_k,\delta_{(1,\lambda_k)}} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & J_{\lambda_1,\delta_{(\tau_{\lambda_k},\lambda_k)}} \end{bmatrix}$$

Πρόταση 0.0.9 *Έστω V διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και έστω $f \in End(V)$ η οποία είναι μηδενοδύναμη δείκτου $k \in \mathbb{N}$. Τότε, ισχύει οτι*

$$\{0_V\} \subsetneq kerf \subsetneq kerf^2 \subsetneq \dots \subsetneq kerf^{k-1} \subsetneq kerf^k = V.$$

Άσκηση 35 *Έστω η $f \in End(\mathbb{R}^4)$ με $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (0, x_1, x_4, 0)$. Να βρεθεί μια βάση του $\mathbb{R}^4$ ως προς την οποία ο πίνακας της f να είναι της μορφής:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Λύση Έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (0, x_1, x_4, 0) \\ \Rightarrow f(f(x_1, x_2, x_3, x_4)) &= f((0, x_1, x_4, 0)) = (0, 0, 0, 0), \end{aligned}$$

δηλ. $f^2 = 0$, δηλ. f μηδενοδύναμη βαθμού 2. Θεωρούμε λοιπόν τους χώρους

$$\begin{aligned} W_1 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid f((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (0, 0, 0, 0)\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid (0, x_1, x_4, 0) = (0, 0, 0, 0)\} \\ &= \mathrm{span}\{(0, 1, 0, 0)^T, (0, 0, 1, 0)^T\} = \{e_2, e_3\}. \end{aligned}$$

και $W_2 = \ker f^2$. Αφού $f^2 = 0$, έπεται ότι $W_2 = \mathbb{R}^4$. Θεωρούμε τη βάση

$$\mathcal{B}_1 = \{(0, 1, 0, 0)^T, (0, 0, 1, 0)^T\}$$

του W_1 και την επεκτείνουμε σε μια βάση $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_3$ του W_2. Για παράδειγμα, το $\mathcal{B}_3$ μπορεί να είναι το σύνολο $\{(1, 0, 0, 0)^T, (0, 0, 0, 1)^T\} = \{e_1, e_4\}$. Το σύνολο $f(\mathcal{B}_3) = \{f(1, 0, 0, 0)^T, f(0, 0, 0, 1)^T\} = \{(0, 1, 0, 0)^T, (0, 0, 1, 0)^T\}$ είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του W_1. Τέλος, θεωρούμε τη διατεταγμένη βάση

$$\widehat{a} := (f(1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0), f(0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 1) \equiv (u_1, u_2, u_3, u_4).$$

Οι εικόνες των στοιχείων αυτών μέσω της f είναι

$$\begin{aligned} f(u_1) = f(f(1, 0, 0, 0)) &= 0 \\ f(u_2) = f(1, 0, 0, 0) &= u_1 \\ f(u_3) = f(f(0, 0, 0, 1)) &= 0 \\ f(u_4) = f(0, 0, 0, 1) &= u_3. \end{aligned}$$

Έτσι,

$$(f : \widehat{a}, \widehat{a}) \equiv \mathcal{M}_{\widehat{a}}^{\widehat{a}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{0,2} & 0 \\ 0 & J_{0,2} \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 36 *Έστω $A \in \mathbb{R}^{9\times 9}$ με $\chi_A(t) = (t-2)^4(t-3)^5$ και $m_A(t) = (t-2)^3(t-3)^4$. Να βρεθούν όλες οι κανονικές μορφές Jordan του A.*

Λύση Έστω

$$\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_\sigma \end{bmatrix}$$

η κανονική μορφή Jordan του A. Τότε, αφού

$$m_A(t) = \text{ε.κ.π.}(m_{J_1}(t), \ldots, m_{J_\sigma}(t)) = (t-2)^3(t-3)^4,$$

έπεται οτι κάποιοι από τους $J_1,\ 1 \leq i \leq \sigma$ είναι οι $J_{2,3},\ J_{3,4}$. Αλλά $\chi_A(t) = \chi_{J_1}(t)\ldots\chi_{J_\sigma}(t) = (t-2)^4(t-3)^5$, έπεται οτι $\sigma = 4$ και οι άλλοι 2 στοιχειώδεις πίνακες Jordan είναι οι $J_{2,1},\ J_{3,1}$. Έτσι, η μοναδική κανονική μορφή Jordan του A είναι η

$$\begin{bmatrix} J_{2,3} & & & \\ & J_{2,1} & & \\ & & J_{3,4} & \\ & & & J_{3,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & & & & & & \\ 0 & 2 & 1 & & & & & & \\ 0 & 0 & 2 & & & & & & \\ & & & 2 & & & & & \\ & & & & 3 & 1 & 0 & 0 & \\ & & & & 0 & 3 & 1 & 0 & \\ & & & & 0 & 0 & 3 & 1 & \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 3 & \\ & & & & & & & & 3 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 37 *Έστω $A \in \mathbb{R}^{9\times 9}$ με $\chi_A(t) = (t-2)^4(t-3)^5$ και $m_A(t) = (t-2)^3(t-3)^3$. Να βρεθούν όλες οι κανονικές μορφές Jordan του A.*

Λύση Έστω

$$\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_\sigma \end{bmatrix}$$

η κανονική μορφή Jordan του A. Τότε, αφού

$$m_A(t) = \text{ε.κ.π.}(m_{J_1}(t), \ldots, m_{J_\sigma}(t)) = (t-2)^3(t-3)^3,$$

έπεται οτι κάποιοι από τους $J_i,\ 1 \leq i \leq \sigma$ είναι οι $J_{2,3},\ J_{3,3}$. Αλλά $\chi_A(t) = \chi_{J_1}(t)\ldots\chi_{J_\sigma}(t) = (t-2)^3(t-3)^5$, έπεται οτι ή $\sigma = 4$ με τους δύο άλλους στοιχειώδεις πίνακες Jordan να είναι οι $J_{2,1},\ J_{3,2}$ ή $\sigma = 5$ με τους τρείς άλλους στοιχειώδεις πίνακες Jordan να είναι οι $J_{2,1},\ J_{3,1}, J_{3,1}$. Έτσι, οι κανονικές μορφές Jordan του A είναι οι

$$\begin{bmatrix} J_{2,3} & & & \\ & J_{2,1} & & \\ & & J_{3,2} & \\ & & & J_{3,3} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} J_{2,3} & & & & \\ & J_{2,1} & & & \\ & & J_{3,1} & & \\ & & & J_{3,1} & \\ & & & & J_{3,3} \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 38 *Έστω $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ με $\chi_A(t) = (t-6)^5$ και $m_A(t) = (t-6)^2$. Να βρεθούν όλες οι κανονικές μορφές Jordan του A.*

Λύση Έστω

$$\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_\sigma \end{bmatrix}$$

η κανονική μορφή Jordan του A. Τότε, αφού

$$m_A(t) = \text{ε.κ.π.}(m_{J_1}(t), \ldots, m_{J_\sigma}(t)) = (t-6)^5,$$

έπεται οτι κάποιος από τους $J_i,\ 1 \le i \le \sigma$ είναι ο $J_{6,2}$. Αλλά $\chi_A(t) = \chi_{J_1}(t)\ldots\chi_{J_\sigma}(t) = (t-6)^2$, έπεται οτι ή $\sigma = 3$ με τους δύο άλλους στοιχειώδεις πίνακες Jordan να είναι οι $J_{6,2},\ J_{6,1}$ ή $\sigma = 4$ με τους τρείς άλλους στοιχειώδεις πίνακες Jordan να είναι οι $J_{6,1},\ J_{6,1}, J_{6,1}$. Έτσι, οι κανονικές μορφές Jordan του A είναι οι

$$\begin{bmatrix} J_{6,2} & & \\ & J_{6,2} & \\ & & J_{6,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & & & \\ 0 & 6 & & & \\ & & 6 & 1 & \\ & & 0 & 6 & \\ & & & & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} J_{6,2} & & & \\ & J_{6,1} & & \\ & & J_{6,1} & \\ & & & J_{6,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & & & \\ 0 & 6 & & & \\ & & 6 & & \\ & & & 6 & \\ & & & & 6 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 39 *Βρείτε όλες τις δυνατές κανονικές μορφές Jordan ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ με $\chi_A(t) = (t-2)^3(t-5)^2$.*

Λύση Έστω

$$\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_\sigma \end{bmatrix}$$

η κανονική μορφή Jordan του A. Το ελάχιστο πολυώνυμο του A δε μας δίνεται οπόταν θα παρούμε περιπτώσεις δεδομένου βέβαια οτι

$$m_A(t) = \text{ε.κ.π.}(m_{J_1}(t), \ldots, m_{J_\sigma}(t))$$

και

$$\chi_A(t) = \chi_{J_1}(t)\ldots\chi_{J_\sigma}(t) = (t-2)^3(t-5)^2 :$$

$\sigma = 2$ και

$$(t-2)^3,\ (t-5)^2 \quad \to \quad J_{2,3},\ J_{5,2},$$

$\sigma = 3$ και

$$\begin{array}{rcl} (t-2)^3,\quad t-5,\quad t-5 & \to & J_{2,3},\ J_{5,1},\ J_{5,1} \\ (t-2)^2,\quad (t-5)^2,\quad t-5 & \to & J_{2,2},\ J_{2,1},\ J_{5,2} \end{array}$$

$\sigma = 4$ και

$$\begin{array}{lcl} (t-2)^2, \quad t-2, \quad t-5, \quad t-5 & \to & J_{2,2},\ J_{2,1},\ J_{5,1},\ J_{5,1} \\ t-2, \quad t-2, \quad t-2, \quad (t-5)^2 & \to & J_{2,1},\ J_{2,1},\ J_{2,1},\ J_{5,2} \end{array}$$

και $\sigma = 5$ με

$$t-2, \quad t-2, \quad t-5, \quad t-5, \quad t-5 \quad \to \quad J_{2,1},\ J_{2,1},\ J_{5,1},\ J_{5,1},\ J_{5,1}.$$

Επομένως, ο A είναι όμοιος προς έναν από τους πίνακες

$$\begin{bmatrix} J_{2,3} & \\ & J_{5,2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} J_{2,3} & & \\ & J_{5,1} & \\ & & J_{5,1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} J_{2,2} & & \\ & J_{2,1} & \\ & & J_{5,2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} J_{2,2} & & & \\ & J_{2,1} & & \\ & & J_{5,1} & \\ & & & J_{5,1} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} J_{2,1} & & & \\ & J_{2,1} & & \\ & & J_{2,1} & \\ & & & J_{5,2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} J_{2,1} & & & & \\ & J_{2,1} & & & \\ & & J_{5,1} & & \\ & & & J_{5,1} & \\ & & & & J_{5,1} \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 40 *Να ταξινομηθούν όλοι οι πίνακες $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ τέτοιοι ώστε $A^3 = I_{3\times 3}$.*

Λύση $A^3 = I_{3\times 3} \Leftrightarrow A^3 - I_{3\times 3} = 0_{3\times 3}$. Θεωρούμε το πολυώνυμο $p(t) = t^3 - 1$. Τότε, $p(A) = 0_{3\times 3}$ και άρα $m_A(t)/p(t)$. Αλλά,

$$p(t) = t^3 - 1 = (t-1)(t^2+t-1) = (t-1)(t-z_1)(t-z_2),$$

όπου

$$z_1 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, \quad z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C}.$$

Αν

$$\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_\sigma \end{bmatrix}$$

η κανονική μορφή Jordan του A, τότε αφού

$$m_A(t) = \text{ε.κ.π.}(m_{J_1}(t), \ldots, m_{J_\sigma}(t)) = (t-1)(t-z_1)(t-z_2),$$

έχουμε οτι $\sigma = 3$ με τις ακόλουθες περιπτώσεις (συνδυασμούς) για τα ελάχιστα πολυώνυμα των $J_i,\ 1 \le i \le 3$:

$$\begin{array}{llll}
t-1, & t-1, & t-1 & \Rightarrow J_{1,1},\ J_{1,1},\ J_{1,1} \\
t-1, & t-1, & t-z_1 & \Rightarrow J_{1,1},\ J_{1,1},\ J_{z_1,1} \\
t-1, & t-1, & t-z_2 & \Rightarrow J_{1,1},\ J_{1,1},\ J_{z_2,1} \\
t-1, & t-z_1, & t-z_1 & \Rightarrow J_{1,1},\ J_{1,z_1},\ J_{1,z_1} \\
t-1, & t-z_1, & t-z_2 & \Rightarrow J_{1,1},\ J_{1,z_1},\ J_{1,z_2} \\
t-1, & t-z_2, & t-z_2 & \Rightarrow J_{1,1},\ J_{1,z_2},\ J_{1,z_2} \\
t-z_1, & t-z_1, & t-z_1 & \Rightarrow J_{z_1,1},\ J_{z_1,1},\ J_{z_1,1} \\
t-z_1, & t-z_1, & t-z_2 & \Rightarrow J_{z_1,1},\ J_{z_1,1},\ J_{z_2,1} \\
t-z_1, & t-z_2, & t-z_2 & \Rightarrow J_{z_1,1},\ J_{z_2,1},\ J_{z_2,1} \\
t-z_2, & t-z_2, & t-z_2 & \Rightarrow J_{z_2,1},\ J_{z_2,1},\ J_{z_2,1}.
\end{array}$$

Επομένως, ο A είναι όμοιος προς έναν από τους πίνακες

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&z_1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&z_2\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&0&0\\0&z_1&0\\0&0&z_1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&0&0\\0&z_1&0\\0&0&z_2\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&z_2&0\\0&0&z_2\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}z_1&0&0\\0&z_1&0\\0&0&z_1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}z_1&0&0\\0&z_1&0\\0&0&z_2\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}z_1&0&0\\0&z_2&0\\0&0&z_2\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}z_2&0&0\\0&z_2&0\\0&0&z_2\end{bmatrix}.$$

Άσκηση 41 *Να ταξινομηθούν όλοι οι πίνακες $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ τέτοιοι ώστε $A^3 = A^2$.*

Λύση $A^3 = A^2 \Leftrightarrow A^3 - A^2 = 0_{3\times 3}$. Θεωρούμε το πολυώνυμο $p(t) = t^3 - t^2 = t^2(t-1)$. Τότε, $p(A) = 0_{3\times 3}$ και άρα $m_A(t)/p(t)$. Αφού $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$, έπεται οτι ο A είναι όμοιος προς έναν πίνακα της μορφής

$$\begin{bmatrix}J_1&&&\\&J_2&&\\&&\ddots&\\&&&J_\sigma\end{bmatrix},$$

όπου J_i στοιχειώδεις πίνακες Jordan. Έτσι, αφού $m_A(t)/t^2(t-1)$ και

$$m_A(t) = \text{ε.κ.π.}(m_{J_1}(t), \ldots, m_{J_\sigma}(t)),$$

έπεται οτι οι πιθανές περιπτώσεις για τα m_{J_i} είναι τα t^2 και $t-1$. Έτσι, είτε $J_i = (0) = J_{0,0}$, είτε $J_i = \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix} = J_{0,2}$ είτε $J_i = J_{1,0} = (1)$. Δηλ. ο A είναι όμοιος ως προς έναν από τους πίνακες

$$\begin{bmatrix}J_{0,0}&&\\&J_{0,0}&\\&&J_{0,0}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}J_{1,0}&&\\&J_{1,0}&\\&&J_{1,0}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} J_{1,0} & & \\ & J_{1,0} & \\ & & J_{0,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} J_{0,0} & & \\ & J_{0,0} & \\ & & J_{1,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} J_{0,2} & \\ & J_{0,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ 0 & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} J_{0,0} & \\ & J_{0,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & 1 \\ & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$