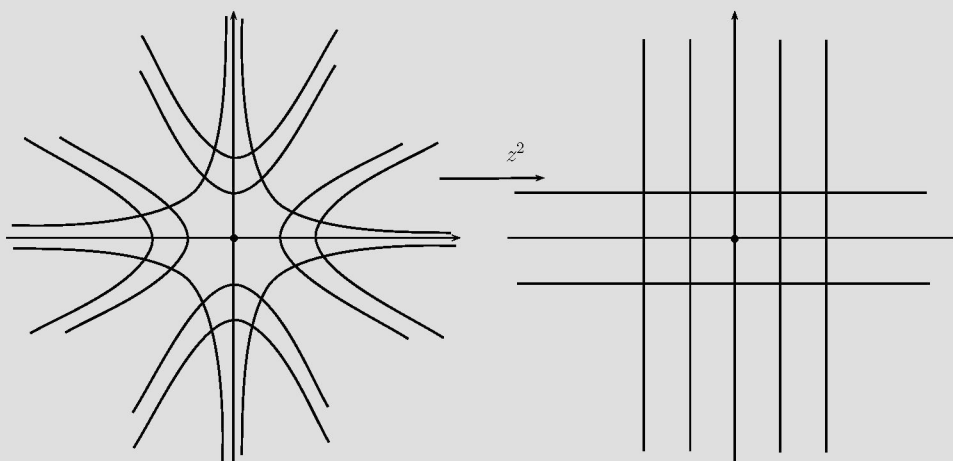


ΙΩΑΚΕΙΜ Ι. ΙΩΑΝΝΗΣ

Η $\overline{\partial}$ -ΕΞΙΣΩΣΗ



Περιεχόμενα

1 Εισαγωγικά στοιχεία	7
1.1 Ο Ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy, το πρόβλημα της παράγουσας και τοπολογία στο επίπεδο	7
1.1.1 Ο δείκτης στροφής σημείου γύρω από καμπύλη	7
1.1.2 Το ολοκλήρωμα της λογαριθμικής παραγώγου	9
1.2 Το πρόβλημα της παράγουσας	11
1.2.1 Το πρόβλημα της ύπαρξης παράγουσας Αλγεβρικά	13
1.3 Το πρόβλημα των λογαρίθμων	14
1.4 Διάφορα Θεωρήματα	15
1.4.1 Διαμερίσεις της μονάδος	17
2 Βασικά Θεωρήματα της Μιγαδικής Ανάλυσης	19
2.1 Παραγοντοποίηση Ολομόρφων Συναρτήσεων κατά Weierstrass	19
2.1.1 Απειρογινόμενα	20
2.1.2 Γινόμενα του Weierstrass	25
2.2 Το Προσεγγιστικό Θεώρημα του Runge	29
2.3 Το Θεώρημα του Mittag-Leffler	39
2.3.1 Ένα πρόβλημα παρεμβολής	41
2.4 Συναρτήσεις με φυσικό σύνορο	42
3 Διαφορικές Μορφές	43
3.1 Διαφορικές Μορφές	43
3.1.1 Ο τελεστής Διαφορικό	48
3.1.2 Διαφορικές Μορφές και Θεωρία Συνομολογίας deRham στο επίπεδο	51
3.1.3 Η πρώτη ομάδα συνομολογίας de Rham	55
3.1.4 Το pull-back (η ανάσχυση)	56
3.1.5 Ολοκλήρωση σε πολυπύγματα	60
3.2 Διαφορικές Μορφές στο $\mathbb{C}$	67
3.2.1 Από τα dx, dy στα $dz, d\bar{z}$	67
3.2.2 Το pull-back Διαφορικών Μορφών στο επίπεδο	68
3.2.3 Διαφορικές Μορφές στο $\mathbb{C}^n$	70
4 Η $\bar{\partial}$-εξίσωση στο επίπεδο	73
4.1 Από τα dx, dy στα $dz, d\bar{z}$ και το Θεώρημα του Stokes	73
4.2 Η $\bar{\partial}$ -εξίσωση με συμπαγή φορέα	77

4.3 Το Γενικό Θεώρημα του Mittag-Leffler	80
5 Η $\bar{\partial}$-εξίσωση στο $\mathbb{C}^n$	83
5.1 Βασικά στοιχεία πολλών μιγαδικών μεταβλητών	83
5.1.1 Διαφορικές Μορφές στο $\mathbb{C}^n$	84
5.2 Η $\bar{\partial}$ -εξίσωση στο $\mathbb{C}^n$, $n > 1$	87
5.2.1 Ο τύπος των Bochner-Martinelli	87
5.2.2 Η $\bar{\partial}$ -εξίσωση για $(0,1)$ -μορφές με C_c^∞ -συντελεστές	90
5.2.3 Το Θεώρημα του Cauchy για πολυδίσκους	92
5.3 Το Θεώρημα Επέκτασης του Hartogs	94

Πρόλογος

Σκοπός της παρουσίασης αυτής είναι η ανάλυση της $\bar{\partial}$ -εξίσωσης στο επίπεδο σε τυχαίο ανοικτό σύνολο στο επίπεδο καθώς και για $(0,1)$ -μορφές με C_c^∞ -συνιελεστές (στο $\mathbb{C}^n$, $n > 1$). Συγκεκριμένα, στο επίπεδο θα μελετήσουμε την περίπτωση των συναρτήσεων με συμπαγή φορέα και θα δούμε μια σημαντική συνέπεια που έχει αυτό στην επίλυση του Πρόβληματος του Mittag-Leffler: Κατασκευή ολομόρφων συναρτήσεων με δοσμένους πόλους και κύρια μέρη αυτών και γενικότερα με δοσμένες ανωμαλίες (και κύρια μέρη αυτών). Η σημασία της λύσης του προβλήματος αυτού ανάγεται στη δυνατότητα "διόρθωσης" C^∞ συναρτήσεων σε ολόμορφες. Ακολουθώντας, γίνεται μια εισαγωγή στα αντίστοιχα προβλήματα που υπάρχουν στις πολλές διαστάσεις όπου εκεί το πρόβλημα είναι αρκετά πιο σύνθετο καθώς ο κυρίαρχο ρόλο παίζει η γεωμετρία του συνόλου στο οποίο δουλεύουμε.

Για να εκτιμήσει κανείς τη σημασία των Θεωρημάτων που παρατίθενται στα κεφάλαια 4 και 5 πρέπει πρώτα να δει μερικά πολύ βασικά αποτελέσματα για το μιγαδικό επίπεδο, όπως είναι η προσέγγιση κατά Runge, η αναπαράσταση Ολομόρφων συναρτήσεων κατά Weierstrass και το Θεώρημα του Mittag-Leffler. Η προετοιμασία για την κατανόηση των Θεωρημάτων αυτών γίνεται στο εισαγωγικό κεφάλαιο κατά τρόπο γεωμετρικό ως επι το πλείστον. Ιδιαίτερη έμφαση έχει επίσης δοθεί στην κατανόηση της έννοιας των Διαφορικών Μορφών (κεφάλαιο 3.), αφού αυτές αποτελούν σημαντικό κομμάτι μελέτης Μιγαδικών Πολυπτυγμάτων.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγικά στοιχεία

Στο εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο θα δούμε περιληπτικά τα στοιχεία που θα χρησιμοποιηθούν στα επόμενα κεφάλαια. Η παράθεση των θεμάτων γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε να δώσουν τη γεωμετρική εικόνα που χρειάζεται κανείς για να εκτιμήσει τα Θεωρήματα στα επόμενα κεφάλαια. Συγκεκριμένα, αναφέρονται έννοιες όπως ο δείκτης στροφής σημείου γύρω από καμπύλη και γίνεται η σύνδεσή του με την τοπολογία του επιπέδου και έννοιες όπως η συνεκτικότητα και το πρόβλημα της παράγουσας και τέλος η αναπαράσταση ολομόρφων συναρτήσεων (Ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy). Επίσης, γίνεται η Θεωρητικοποίηση των αποτελεσμάτων αυτών μέσω της γλώσσας των Διαφορικών Μορφών.

1.1 Ο Ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy, το πρόβλημα της παράγουσας και τοπολογία στο επίπεδο

1.1.1 Ο δείκτης στροφής σημείου γύρω από καμπύλη

Η έννοια του δείκτη στροφής είναι ιδιαίτερα σημαντική στη Θεωρία Cauchy καθώς συνδέεται με τις έννοιες παράγουσα και συνεκτικότητα, όπως θα δούμε παρακάτω.

(i) Ο δείκτης στροφής καμπύλης γύρω από μηδέν

Θεωρούμε μια ομαλή καμπύλη γ η οποία ξεκινά από ένα σημείο a της αρνητικής ημιευθείας και καταλήγει πάλι σε αυτό κάνοντας μια περιστροφή γύρω από το σημείο $z = 0$ κατά τη θετική φορά. Παίρνοντας δύο σημεία A και B πάνω στη γ τέτοια ώστε $\operatorname{Im} A < 0$ και $\operatorname{Im} B > 0$ και συμβολίζοντας με $\gamma : A \rightarrow B$ το τμήμα της γ που ξεκινά από το A και καταλήγει στο B , τότε αποδεικνύεται ότι

$$\int_{\gamma: A \rightarrow B} \frac{d\zeta}{\zeta} = \log(B) - \log(A) = (\log(|B|) - \log(|A|)) + i(\arg(B) - \arg(A))$$

και καθώς τα σημεία A και B τείνουν στο a , (αφού $\int_{\gamma: A \rightarrow B} \frac{d\zeta}{\zeta} \rightarrow \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta}$ και $\arg(A) \rightarrow \pi$, $\arg(B) \rightarrow -\pi$) έχουμε ότι

$$\int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta} = 2\pi i. \quad (1.1)$$

Επομένως, $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta} = 1$, γεγονός το οποίο δείχνει ότι το ολοκλήρωμα αυτό μετράει το πλήθος των περιστροφών της γ γύρω από σημείο 0. Κάθε "θετική" περιστροφή συνεισφέρει κατά +1 ενώ κάθε "αρνητική" κατά -1. Καλούμε τη συνάρτηση

$$z \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta}$$

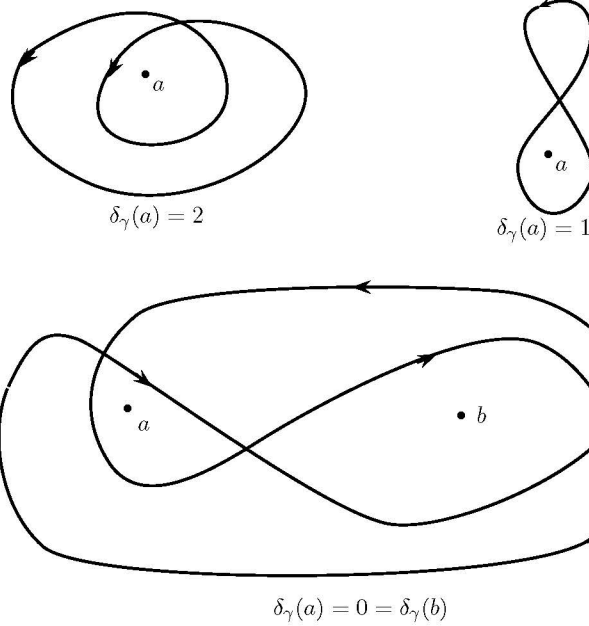
δείκτη στροφής της γ γύρω από σημείο (0,0) και τη συμβολίζουμε με $\delta_{\gamma}(0)$.

(ii) Ο δείκτης στροφής καμπύλης γύρω από σημείο

Ο δείκτης στροφής μιας κλειστής καμπύλης γ γύρω από ένα σημείο $z \in \mathbb{C} \setminus [\gamma] \equiv \mathbb{C} \setminus \{\gamma(t) : t \text{ ανήκει στο πεδίο ορισμού της } \gamma\}$ ορίζεται ως το

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

και συμβολίζεται με $\delta_{\gamma}(z)$.



Ιδιότητες του δείκτη στροφής Έστω $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ μια κλειστή καμπύλη. Τότε:

1. Για κάθε σημείο $z \in \mathbb{C} \setminus [\gamma]$, ο $\delta_{\gamma}(z) \in \mathbb{Z}$:

Θα το αποδείξουμε για $z = 0$. $\delta_{\gamma}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt$. Θε-
 τουμε λοιπόν $g(t) := \int_a^t \frac{\gamma'(\delta)}{\gamma(\delta)} d\delta$, $\delta \in [a, b]$. Τότε, $g(a) = 0$, $g(b) =$
 $\delta_{\gamma}(0) \cdot 2\pi i$. Έστω $A := \{t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots\}$ το σύνολο των ασυνεχειών
 της γ' . Τότε,

$$g'(t) := \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}, \quad t \in [a, b] \setminus A. \quad (1.2)$$

Τώρα, η συνάρτηση $\phi(t) := \frac{\gamma(t)}{e^{g(t)}}$ είναι κατά τμήματα σταθερή, αφού $\phi'(t) = \frac{\gamma'(t)e^{g(t)} - g'(t)\gamma(t)e^{g(t)}}{e^{2g(t)}} = \frac{\gamma'(t) - g'(t)\gamma(t)}{e^{g(t)}} \stackrel{(1.2)}{=} 0$. Επομένως, αφού ϕ κατά τμήματα σταθερή και συνεχής σε διάστημα $(\subseteq \mathbb{R})$, έπεται ότι αυτή είναι σταθερή $\implies \phi(a) = \phi(b)$, δηλ. $\frac{\gamma(a)}{e^{g(a)}} = \frac{\gamma(b)}{e^{g(b)}} \implies e^{g(a)} = e^{g(b)} = e^0 = 1$.

Άρα, $\exists k \in \mathbb{Z} : g(b) = 2k\pi i = \delta_\gamma(0) \cdot 2\pi i \implies \delta_\gamma(0) = k \in \mathbb{Z}$.

2. Η συνάρτηση $z \mapsto \delta_\gamma(z)$ είναι συνεχής, άρα σταθερή σε κάθε συνεκτική συνιστώσα του συνόλου $\mathbb{C} \setminus [\gamma]$.

3. Αφού $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 0$, έπεται ότι $\delta_\gamma(z) = 0$ στη μη φραγμένη συνεκτική συνιστώσα του συνόλου $\mathbb{C} \setminus [\gamma]$.

Σκοπός στα επόμενα είναι να βρούμε τη σχέση που έχουν ο δείκτης στροφής, το πρόβλημα της παράγουσας στο επίπεδο και η τοπολογία του επιπέδου.

Πρόταση 1.1.1 [Χαρακτηρισμός των απλά συνεκτικών συνόλων με το δείκτη στροφής] Ένα σύνολο $\Omega \subset \mathbb{C}$ είναι απλά συνεκτικό $\Leftrightarrow$ για κάθε κλειστή καμπύλη γ στο Ω ισχύει $\delta_\gamma(z) = 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.

Όπως θα έχουμε ήδη παρατηρήσει από τον τύπο (1.1), η συνάρτηση $\zeta \mapsto 1/\zeta$ έχει ανωμαλία στο σημείο $\zeta = 0$ (δηλ. τρύπα) και αυτό αντανακλάται στο γεγονός ότι το ολοκλήρωμα αυτής πάνω σε οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη γύρω από το μηδέν είναι μη μηδενικό και μάλιστα ίσο με $2\pi i$. Επομένως, η συνάρτηση δεν μπορεί να έχει παράγουσα. Αν αυτή είχε, θα ήταν ο λογάριθμος. Εδώ βρίσκεται και όλη η ουσία για τα επόμενα που θα δούμε, γιατί ας σταθούμε λίγο σε αυτό.

Έστω ότι $\gamma = C(0, R)$, $R > 0$. Τότε, θεωρώντας την παραμέτρηση του κύκλου $C(0, R) : z = |z|e^{it} = Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi)$, έχουμε:

$$\delta_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{Re^{it} dt}{Re^{it}} = 2\pi i \neq 0.$$

Αφαιρώντας όμως το σημείο του κύκλου που βρίσκεται πάνω στην ημιευθεία $(-\infty, 0)$, τότε η συνάρτηση $\zeta \mapsto 1/\zeta$ έχει παράγουσα, το $\log$. Η σχέση αυτού με την ολομορφία δεν είναι τίποτα άλλο από το γεγονός ότι $\log \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0))$.

1.1.2 Το ολοκλήρωμα της λογαριθμικής παραγώγου

Έστω $f \in \mathcal{O}(\varpi(a))$, όπου a ρίζα της f τάξης $m(f, a) \equiv m$. Τότε, $f(z) = (z - a)^m g(z)$, για z κοντά στο a , όπου $g \in \mathcal{O}(\varpi(a))$, $g(a) \neq 0$. Άρα, για $z \neq a$ αρκεί κοντά στο a , έχουμε ότι

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m(z - a)^{m-1}g(z) + (z - a)^m g'(z)}{(z - a)^m g(z)} = \frac{m}{z - a} + \frac{g'(z)}{g(z)}. \quad (1.3)$$

Δηλ. η f'/f έχει πόλο τάξης 1 στο a και μάλιστα $\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f'}{f} = \text{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) = m$.

Έστω τώρα ότι $f \in \mathcal{O}(\overline{\Omega})$ και ότι καμιά ρίζα της f δε βρίσκεται πάνω στο $\partial\Omega$. Τότε, το σύνολο $Z(f) := \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$ είναι πεπερασμένο και $\text{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) = m(f, a)$, $\forall a \in Z(f)$. Επομένως, από το Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{a \in Z(f)} m(f, a).$$

Από τη σχέση (1.3), έχουμε ότι

$$z \frac{f'(z)}{f(z)} = z \frac{m}{z-a} + z \frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{ma}{z-a} + m + z \frac{g'(z)}{g(z)}. \quad (1.4)$$

Ληλ. η συνάρτηση $z \mapsto z \frac{f'(z)}{f(z)}$ έχει πόλο τάξης 1 στο a και $\text{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) = m(f, a) \cdot a$. Συνεπώς,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{a \in Z(f)} m(f, a) a.$$

Γενικότερα, έχουμε τα ακόλουθα

Θεώρημα 1.1.1 (Αρχή του Ορίσματος) Έστω $f \in \mathcal{O}(\overline{\Omega})$ και ότι καμιά ρίζα αυτής δε βρίσκεται πάνω στο $\partial\Omega$. Τότε,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} h(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{a \in Z(f)} m(f, a) h(a),$$

για κάθε $h \in \mathcal{O}(\overline{\Omega})$.

Θεώρημα 1.1.2 (Αρχή του Ορίσματος για Μερόμορφες συναρτήσεις) Έστω $f \in \mathcal{M}(\varpi(\overline{\Omega}))$ και ότι καμιά ρίζα ή πόλος αυτής δε βρίσκεται πάνω στο $\partial\Omega$. Τότε, αν $Z(f)$ είναι το σύνολο των ριζών της f και $P(f)$ το σύνολο των πόλων της f , ισχύει ότι

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{a \in Z(f)} m(f, a) - \sum_{b \in P(f)} m(f, b).$$

Ιδιαίτερα, για κάθε $h \in \mathcal{O}(\overline{\Omega})$, ισχύει

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} h(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{a \in Z(f)} m(f, a) h(a) - \sum_{b \in P(f)} m(f, b) h(b).$$

Έστω Ω ανοικτό συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ η οποία έχει ρίζα τάξης m στο σημείο $z = a$. Τότε, $f(z) = (z-a)^m g(z)$, όπου $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ και $g(a) \neq 0$. Αν η f έχει ρίζες στα σημεία $a_1, a_2, \dots, a_m$ (όπου κάποια από τα a_k μπορεί να εμφανίζεται τόσες φορές όσες είναι η πολλαπλότητά του), τότε $f(z) = (z-a_1)(z-a_2) \dots (z-a_m) g(z)$, όπου $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ και $g(z) \neq 0$, $\forall z \in \Omega$. Τότε, αν γ είναι μια κλειστή καμπύλη στο Ω τέτοια ώστε να μην περνά από τα σημεία a_k ,

δηλ. $a_k \in \mathbb{C} \setminus [\gamma]$, $1 \leq k \leq m$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{1}{z-a_1} + \frac{1}{z-a_2} + \dots + \frac{1}{z-a_m} + \frac{g'(z)}{g(z)} \\ \Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \sum_{k=1}^m \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z-a_k} dz \right] + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g'(z)}{g(z)} dz \\ &\stackrel{\frac{g'}{g} \in \mathcal{O}(\Omega)}{=} \sum_{k=1}^m \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z-a_k} dz \right] = \sum_{k=1}^m \delta_{\gamma}(a_k). \end{aligned}$$

1.2 Το πρόβλημα της παράγουσας

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, σκοπός μας είναι να ασχοληθούμε με το πρόβλημα της παράγουσας το οποίο διατυπώνεται ως εξής:

Δοθέντος ανοικτού συνόλου $\Omega \subset \mathbb{C}$, και $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $F' = f$;

Η απάντηση στο ερώτημα αυτό έχει άμεση σχέση με την τοπολογία του συνόλου Ω , δηλ. από το πλήθος των τρυπών που έχει οι οποίες μπορούν να χαρακτηριστούν ως τα εμπόδια για την επίλυση του πιο πάνω προβλήματος. Για παράδειγμα, στο σύνολο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, η συνάρτηση $\zeta \mapsto 1/\zeta$ δεν έχει παράγουσα, αλλά στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0)$ έχει (το $\log$). Είναι σαφές λοιπόν ότι στα απλά συνεκτικά σύνολα (δηλ. στα σύνολα που δεν υπάρχουν τρύπες) καθώς επίσης σε αστρόμορφα (ως προς σημείο) και γενικότερα σε κυρτά σύνολα, το πρόβλημα της παράγουσας έχει λύση. Το ακόλουθο Θεώρημα του Cauchy δίνει τη σχέση του δείκτη στροφής μιας καμπύλης με την ύπαρξη λύσης για το πρόβλημα της παράγουσας (στα απλά συνεκτικά σύνολα):

Θεώρημα 1.2.1 Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}$ ένα απλά συνεκτικό σύνολο και $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Τότε, υπάρχει $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ τέτοια ώστε $F'(z) = f(z)$ και για κάθε κλειστή καμπύλη γ στο Ω , ισχύει $\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = 0$. Επιπλέον, για κάθε $z \in \mathbb{C} \setminus [\gamma]$, ισχύει

$$f(z) \cdot \delta_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (1.5)$$

Παρατήρηση Αν στη σχέση (1.5) όπου γ πάρουμε έναν κύκλο με κέντρο το μηδέν και ακτίνα $R > 0$, έχουμε (αφού $\delta_{C(0,R)}(z) = 1$, $\forall z \in \Delta(0, R)$)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

τότε, επισημαίνουμε το εξής:

η συνάρτηση $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ είναι ολόμορφη εκτός από το σημείο $\zeta = z$ στο οποίο έχει τρύπα. Ο κύκλος περικυκλώνει την τρύπα αυτή με αποτέλεσμα η τιμή της συνάρτησης εντός του δίσκου να καθορίζεται από τις τιμές πάνω στο σύνορό του.

Θεώρημα 1.2.2 [Κατασκευή Παράγουσας σε ανοικτά κυρτά σύνολα] Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό κυρτό σύνολο και $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ μια συνεχής συνάρτηση. Αν για κάθε κλειστό τρίγωνο T στο Ω ισχύει

$$\int_{\partial T} f(\zeta) d\zeta = 0,$$

τότε η f έχει παράγουσα στο Ω . Ειδικότερα, αν σταθεροποιήσουμε ένα σημείο $a \in \Omega$ και ορίσουμε

$$F(z) := \int_{[a,z]} f(\zeta) d\zeta, \quad z \in \Omega,$$

τότε η $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ και $F' = f$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $z \in \Omega$ σταθεροποιημένο. Θα δείξουμε ότι

$$F'(z) = f(z), \quad \text{δηλ.} \quad \lim_{w \rightarrow z} \frac{F(w) - F(z)}{w - z} = f(z).$$

Παίρνουμε ένα τρίγωνο T στο Ω (υπάρχει τέτοιο διότι το Ω είναι κυρτό) με περιφέρεια $\partial T = [a, w] \cup [w, z] \cup [z, a]$. Τότε,

$$\frac{F(w) - F(z)}{w - z} = \frac{1}{w - z} \left[\int_{[a,w]} f(\zeta) d\zeta - \int_{[a,z]} f(\zeta) d\zeta \right].$$

Από υπόθεση,

$$\int_{\partial T} f(\zeta) d\zeta = 0,$$

άρα,

$$\begin{aligned} \left(\int_{[a,w]} + \int_{[w,z]} + \int_{[z,a]} \right) f(\zeta) d\zeta &= 0 \Rightarrow \int_{[a,w]} f(\zeta) d\zeta + \int_{[z,a]} f(\zeta) d\zeta = \\ &= - \int_{[w,z]} f(\zeta) d\zeta \Rightarrow \int_{[a,w]} f(\zeta) d\zeta - \int_{[a,z]} f(\zeta) d\zeta = \int_{[z,w]} f(\zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\frac{F(w) - F(z)}{w - z} = \frac{1}{w - z} \int_{[z,w]} f(\zeta) d\zeta.$$

Επίσης,

$$\int_{[z,w]} f(\zeta) d\zeta = f(z) \int_{[z,w]} d\zeta = f(z) \cdot (z - w) \Rightarrow f(z) = \frac{1}{w - z} \int_{[z,w]} f(\zeta) d\zeta.$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
 \frac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z) &= \frac{1}{w - z} \int_{[z,w]} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta \\
 \Rightarrow \left| \frac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z) \right| &= \left| \frac{1}{w - z} \int_{[z,w]} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta \right| \\
 &= \frac{1}{|w - z|} \left| \int_{[z,w]} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta \right| \\
 &\leq \frac{1}{|w - z|} \int_{[z,w]} |f(\zeta) - f(z)| d\zeta \\
 &\leq \frac{1}{|w - z|} \sup_{\zeta \in [z,w]} |f(\zeta) - f(z)| \cdot L([z, w]) \\
 &= \frac{1}{|w - z|} \sup_{\zeta \in [z,w]} |f(\zeta) - f(z)| \cdot |z - w|.
 \end{aligned}$$

Όμως, απ'τη συνέχεια της f , έχουμε ότι

$$\sup_{\zeta \in [z,w]} |f(\zeta) - f(z)| \longrightarrow 0.$$

Άρα,

$$\frac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z) \xrightarrow{w \rightarrow z} 0.$$

1.2.1 Το πρόβλημα της ύπαρξης παράγουσας Αλγεβρικά

Θα δούμε τώρα κάπως αλγεβρικά πως οι τρύπες του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης επηρεάζουν την ύπαρξη παράγουσας σε αυτό. Ας δούμε όμως πρώτα το σύνολο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, το οποίο έχει μια μόνο τρύπα (στο σημείο $z = 0$). Θεωρούμε το σύνολο

$$\Pi(\mathbb{C} \setminus \{0\}) := \{f' : f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{0\})\},$$

δηλ. το σύνολο των παραγώγων των ολομόρφων συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Τότε, η προσθετική ομάδα πηλίκου $H(\mathbb{C} \setminus \{0\}) := \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{0\})/\Pi(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ "μετρά" τα εμπόδια για την ύπαρξη λύσης στο πρόβλημα της παράγουσας: κάθε μη μηδενική κλάση $[f]$, $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$, αντιπροσωπεύει ένα τέτοιο εμπόδιο. Αν $[f] \neq 0$, τότε η f δεν έχει παράγουσα και αν $[f] = [g]$, τότε η συνάρτηση $f - g$ της διαφοράς των f και g έχει παράγουσα.

Για να το δούμε αυτό αυστηρά, ορίζουμε την απεικόνιση

$$\omega : H(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{C}, \text{ με } [f] \mapsto \omega([f]) := \int_{C(0,1)} f(\zeta) d\zeta.$$

Αν $[f] = [g]$, $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$, τότε η συνάρτηση $f - g$ έχει παράγουσα, δηλ. $\int_{C(0,1)} [f(\zeta) - g(\zeta)] d\zeta = 0$, άρα $\int_{C(0,1)} f(\zeta) d\zeta = \int_{C(0,1)} g(\zeta) d\zeta$, δηλ. $\omega([f]) = \omega([g])$.

Η ω είναι προφανώς γραμμική.

Η ω είναι 1-1: Αν $\omega([f]) = 0$, $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$, δηλ. $\int_{C(0,1)} f(\zeta) d\zeta = 0$, τότε η f έχει παράγουσα, άρα $[f] = 0$.

Η ω είναι επί: Αν $\lambda \in \mathbb{C}$, τυχαίος, τότε η συνάρτηση

$$z \mapsto h_\lambda := \frac{\lambda}{2\pi i} \cdot \frac{1}{z}$$

είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ και $\omega([h_\lambda]) = \frac{\lambda}{2\pi i} \int_{C(0,1)} \frac{1}{\zeta} d\zeta = \lambda$.

Επομένως, $H(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cong \mathbb{C}$, άρα $\dim(H(\mathbb{C} \setminus \{0\})) = 1$, το οποίο αντανακλά το γεγονός ότι το σύνολό μας έχει μια μόνο τρύπα.

1.3 Το πρόβλημα των λογαρίθμων

Δοθέντος ανοικτού συνόλου $\Omega \subset \mathbb{C}$, και $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $f \neq 0$, υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $e^g = f$;

Πράγματι, αν $e^g = f$, τότε, $f' = g' \cdot e^g \Rightarrow f'/f = g'$, δηλ. η συνάρτηση f'/f έχει παράγουσα. Αντίστροφα, αν η συνάρτηση f'/f έχει παράγουσα, τότε, η f έχει ολόμορφο κλάδο του λογαρίθμου: αν $h \in \mathcal{O}(\Omega)$ και $h' = f'/f$, έχουμε ότι

$$(f \cdot e^{-h})' = f' \cdot e^{-h} - f \cdot e^{-h} \cdot h' = 0,$$

δηλ. η συνάρτηση $f \cdot e^{-h}$ είναι σταθερά έστω ίση με c_1 . Αφού η συνάρτηση $\exp$ είναι επί, υπάρχει $c \in \mathbb{C}$ τέτοιος ώστε $e^c = c_1$, επομένως $f = e^{h+c}$, δηλ. η συνάρτηση $g := h + c$ είναι ολόμορφος κλάδος του λογαρίθμου της f .

Το ακόλουθο Θεώρημα μας λέει ότι η g είναι η συνάρτηση που αναμέναμε να είναι:

Θεώρημα 1.3.1 Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}$ ανοικτό σύνολο και $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $f \neq 0$. Τότε, υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $e^g = f \Leftrightarrow$

$$\int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = 0, \quad \forall \text{ κλειστή καμπύλη } \gamma \text{ στο } \Omega.$$

Συγκεκριμένα, σταθεροποιώντας ένα σημείο $a \in \Omega$, τότε,

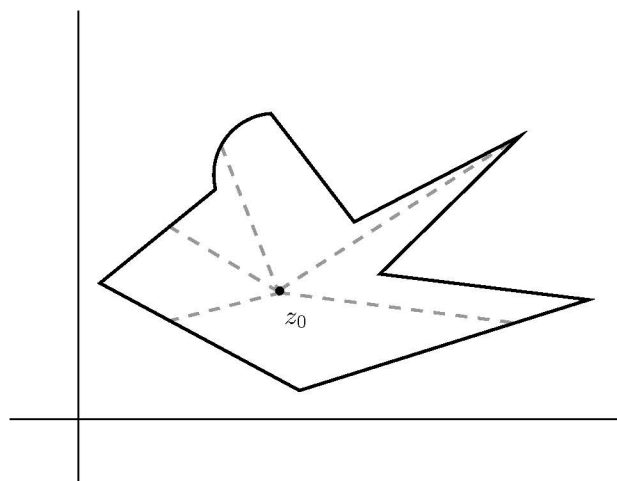
$$f(z) = f(a) \cdot \exp \left(\int_a^z \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta \right), \quad \forall z \in \Omega.$$

[Δηλ. η συνάρτηση $\log(f(a)) + \int_a^z [f'(\zeta)/f(\zeta)] d\zeta$ είναι ολόμορφος κλάδος του λογαρίθμου της f στο Ω .]

Επίσης, το πιο πάνω ισχύει βέβαια και για ασυρόμορφα (ως προς σημείο) σύνολα αβλή και γενικότερα για απλά συνεκτικά σύνολα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έπεται από τα Θεωρήματα (1.2.2), (1.3.1) και την ανάλυση που κάναμε πιο πάνω.

αστρόμορφο ως προς το z_0 χωρίο

1.4 Διάφορα Θεωρήματα

Θα δούμε μερικά Θεωρήματα της Μιγαδικής Ανάλυσης στη μια μεταβλητή αλλά και της Θεωρίας Διαφορικών Πολλαπλοτήτων τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε στα επόμενα κεφάλαια. Σε μερικά από αυτά γίνεται η απόδειξη γιατί η ιδέα τους είναι κρίσιμη.

Θεώρημα 1.4.1 (Σύγκλιση του Weierstrass) Έστω $\{f_n\}_n$ ακολουθία ομοιόμορφων συναρτήσεων σένα $\Omega \subset \mathbb{C}$ ανοικτό τέτοια ώστε $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του Ω . Τότε, ισχύει ότι $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ και ότι

$$f'_n \rightarrow f' \text{ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του } \Omega.$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει και για παραγώγους k -τάξης, δηλ.

$$f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)} \text{ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του } \Omega.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\Delta(a, r) \subset \Omega$. Από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy, αφού $f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, r)} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \text{ για } z \in \Delta(a, r).$$

Αφού $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$ στα συμπαγή υποσύνολα του Ω , έχουμε ότι

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, r)} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \longrightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z), \text{ } z \in \Delta(a, r).$$

Επομένως, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Τώρα,

$$f'_n(z) - f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, r)} \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \text{ για } z \in \Delta(a, r)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow |f'_n(z) - f'(z)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{C(a,r)} \left| \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{\zeta - z} \right| d\zeta \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{C(a,r)} \frac{|f_n(\zeta) - f(\zeta)|}{|\zeta - z|} d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi r} \int_{C(a,r)} |f_n(\zeta) - f(\zeta)| d\zeta \\
&\leq \frac{1}{2\pi r} \int_{C(a,r)} \sup_{|z-a| \leq r} |f_n(z) - f(z)| d\zeta \\
&= \sup_{|z-a| \leq r} |f_n(z) - f(z)|, \text{ για } z \in \Delta(a, r).
\end{aligned}$$

Όμως, για $\rho < r$, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\sup_{|z-a| \leq \rho} |f_n(z) - f(z)| &\leq \frac{1}{2\pi} \sup_{|\zeta-a|=\rho} |f_n(\zeta) - f(\zeta)| \frac{2\pi r}{(r-\rho)^{k+1}} \\
&= \frac{r}{(r-\rho)^{k+1}} \sup_{|\zeta-a|=\rho} |f_n(\zeta) - f(\zeta)|,
\end{aligned}$$

αφού, $|z-a| \leq \rho$ και $|\zeta-a| = r \Rightarrow |\zeta-z| \geq \rho-r$. Όμως,

$$\sup_{|\zeta-a|=\rho} |f_n(\zeta) - f(\zeta)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

άρα,

$$\sup_{|z-a| \leq \rho} |f_n(z) - f(z)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Έπεται λοιπόν ότι

$$f'_n \rightarrow f' \text{ (ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του } \Omega).$$

Για το

$$f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)} \text{ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του } \Omega$$

κάνουμε την ίδια δουλειά και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ένα συμπαγές υποσύνολο του Ω μπορεί να καλυφθεί από πεπερασμένο το πλήθος δίσκους της μορφής $\{z : |z-a| \leq \rho\}$. ■

Παρατηρήσεις 1. Στην περίπτωση των σειρών έχουμε ότι αν $f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\| \text{ συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του } \Omega,$$

τότε

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}.$$

2. Από το προηγούμενο Θεώρημα έπεται επίσης ότι $f \in C^\infty(\Omega)$. Ας δούμε όμως τα αποτελέσματα του Θεωρήματος. Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι το ομοιόμορφο όριο πολυωνύμων σε συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$ (το Προσεγγιστικό Θεώρημα του Weierstrass). όμως, μια συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δεν είναι κατανάγκη διαφορίσιμη ούτε καν C^∞ . Η διαφορά με την περίπτωση των πραγματικών και του Θεωρήματος είναι οι εκτιμήσεις Cauchy. Η σύγκλιση μιας ακολουθίας ολομόρφων συναρτήσεων εμπεριέχει και τη σύγκλιση των μερικών της παραγώγων. Στο $\mathbb{R}$ μια ακολουθία C^∞ συναρτήσεων μπορεί να συγκλίνει ομοιόμορφα χωρίς οι μερικές της παράγωγοι να συγκλίνουν με οποιοδήποτε τρόπο.

Θεώρημα 1.4.2 (Αρχή της Αναλυτικής Συνέχισης) Έστω $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$, όπου Ω χωρίο. Έστω επίσης ότι $f = g$ σε ένα σύνολο A το οποίο δεν έχει σημεία συσσώρευσης στο Ω . Τότε, $f = g$ στο Ω .

Θεώρημα 1.4.3 (Συμμόρφου απεικονίσεως του Riemann) Κάθε απλά συνεκτικό σύνολο $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ είναι σύμμορφο ισοδύναμο με το μοναδιαίο δίσκο $\Delta(0, 1)$.

1.4.1 Διαμερίσεις της μονάδος

Ορισμός 1.4.1 Μια συλλογή $\{U_j\}_j$ υποσυνόλων μιας πολλαπλότητας M λέγεται **κάλυμμα** του $W \subset M$ αν $W \subset \bigcup U_j$. Η $\{U_j\}_j$ λέγεται **ανοικτή κάλυψη** αν επιπλέον τα U_j είναι ανοικτά. Μια συλλογή συνόλων της $\{U_j\}_j$ η οποία είναι επίσης κάλυμμα, λέγεται **υποκάλυμμα**. Μια **επιλέπτυνση** $\{W_k\}$ της $\{U_j\}_j$ είναι ένα κάλυμμα τέτοιο ώστε για κάθε k υπάρχει ένα j τέτοιο ώστε $W_k \subset U_j$.

Ορισμός 1.4.2 Μια **διαμέριση της μονάδος** (στην πολλαπλότητα M) είναι μια συλλογή $\{\phi_i : i \in I\}$ C^∞ συναρτήσεων (όπου I αριθμήσιμο) τέτοιων ώστε

(i) $0 \leq \phi_i \leq 1, \forall i \in I$.

(ii) Το σύνολο $\{\text{supp}(\phi_i)\}_{i \in I}$ είναι τοπικά πεπερασμένο, δηλ. κάθε συμπαγές υποσύνολο του M τέμνει πεπερασμένα το πλήθος $\text{supp}(\phi_i)$.

(iii) $\sum_{i \in I} \phi_i = 1$ στο M .

Από την ιδιότητα (ii) συμπεραίνουμε ότι για κάθε $K \subset M$ συμπαγές υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$\sum_{i \in I} \phi_i(x) = \sum_{k=1}^N \phi_k(x), \quad \forall x \in K,$$

δηλ. το άθροισμα είναι πεπερασμένο στα συμπαγή υποσύνολα του M . Η διαμέριση της μονάδος $\{\phi_i : i \in I\}$ λέγεται **σχετική με το κάλυμμα** $\{U_\alpha\}$ αν για κάθε i το σύνολο $\text{supp}(\phi_i)$ βρίσκεται μέσα σε κάποιο U_α . Το Θεώρημα Υπαρξης Διαμερίσεων της Μονάδος χρησιμοποιεί τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

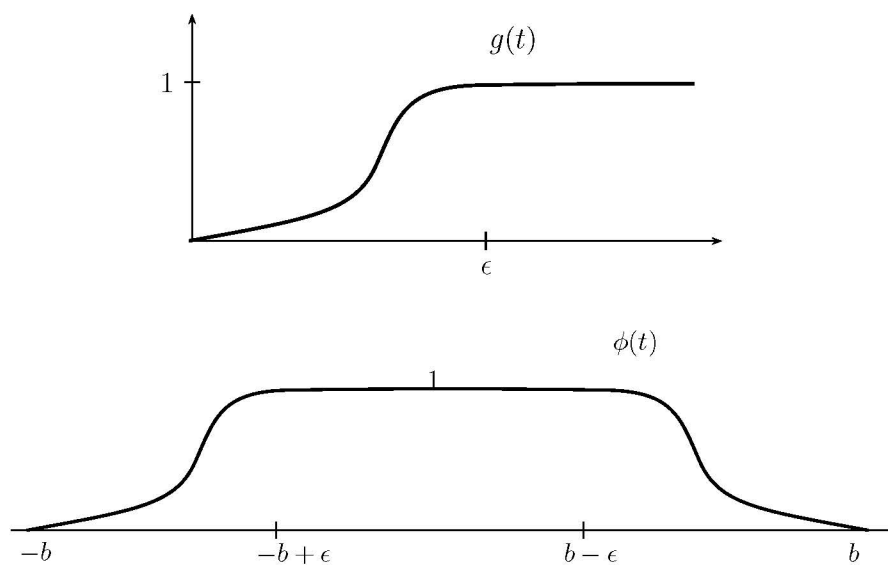
η οποία είναι C^∞ για $t \neq 0$, ορίζοντας τις συναρτήσεις $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$t \mapsto g(t) := \frac{f(t)}{f(t) - f(a-t)},$$

(με $a > 0$) και $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$t \mapsto \phi(t) := g(b - |t|),$$

(όπου $b > a > 0$).



Κεφάλαιο 2

Βασικά Θεωρήματα της Μιγαδικής Ανάλυσης

Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε ένα Θεώρημα Αναπαράστασης ολομόρφων συναρτήσεων, αυτό του Weierstrass, ένα προσεγγιστικό θεώρημα, του Runge και τέλος ένα Θεώρημα κατασκευής μερομόρφων συναρτήσεων, αυτό του Mittag-Leffler. Αξίζει κανείς να δει αναλυτικά τα Θεωρήματα αυτά αφενός μεν διότι εμπεριέχουν ουσιαστικές έννοιες και αποτελέσματα από τη Θεωρία συναρτήσεων μιας (μιγαδικής) μεταβλητής και αφετέρου για να κάνει ορισμένες βασικές και θεμελιώδεις συγκρίσεις με τη Θεωρία των πολλών μιγαδικών μεταβλητών, μερικές από τις οποίες θα αναφερθούν στο τελευταίο κεφάλαιο.

2.1 Παραγοντοποίηση Ολομόρφων Συναρτήσεων κατά Weierstrass

Θα δούμε τώρα πως κατασκευάζονται ολόμορφες συναρτήσεις (οριζόμενες σε χωρίο) με ρίζες ένα προκαθορισμένο σύνολο μιγαδικών αριθμών. Αν $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ χωρίο, $f \not\equiv 0$, τότε, η Αρχή της Αναλυτικής Συνέχισης λέει ότι το $Z(f) := \{a \in \Omega : f(a) = 0\}$ δεν έχει σημεία συσσώρευσης στο Ω . Τίποτα παραπάνω από αυτό δεν μπορεί να λεχθεί: αν $A \subset \Omega$ χωρίς κανένα σημείο συσσώρευσης στο Ω , τότε υπάρχει $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, τέτοια ώστε αυτή να μηδενίζεται στο A , δηλ. το A να είναι το σύνολο των ριζών της f . Συγκεκριμένα, θα δούμε ότι μπορούμε να καθορίσουμε την τάξη των ριζών. Τώρα, αν $A := \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ένα πεπερασμένο υποσύνολο του Ω , και $m_1, m_2, \dots, m_n$ οι αντίστοιχες (επιθυμητές) πολλαπλότητες των στοιχείων του A , τότε το (πεπερασμένο) γινόμενο $f(z) = (z - a_1)^{m_1}(z - a_2)^{m_2} \dots (z - a_n)^{m_n}$ θα μπορούσε να ήταν μια τέτοια αναπαράσταση. Στη γενική όμως περίπτωση, η κατασκευή μιας τέτοιας συνάρτησης επιτυγχάνεται μέσω *απειρογινομένων*.

Υπενθυμίσεις 1. Αν $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, και $f \neq 0$, τότε, υπάρχει $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ τέτοια ώστε $f = e^g$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η g κατασκευάζεται ως εξής:

Σταθεροποιούμε ένα σημείο $a \in \mathbb{C}$ και ορίζουμε

$$F(z) := \int_{[a,z]} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta, \quad z \in \mathbb{C},$$

τότε η $F \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ και $f(z) = f(a)e^{F(z)}$. Όμως, αφού η συνάρτηση $\exp$ είναι επί, έπεται ότι υπάρχει $\beta \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε $e^\beta = f(a)$. Επομένως, $f = e^{F+\beta} := e^g$, δηλ. η συνάρτηση $g = F + \beta$ είναι ολόμορφος κλάδος του λογαρίθμου της f .

2. Αν $P(z_1, z_2, \dots, z_n)$ είναι ένα πολυώνυμο του οποίου οι συντελεστές είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τότε

$$|P(a_1, a_2, \dots, a_n)| \leq P(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|),$$

για $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θέτουμε $p := 1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_n \leq n$. Τότε,

$$\begin{aligned} P(a_1, a_2, \dots, a_n) &= \sum_p c_p a_1^{j_1} a_2^{j_2} \dots a_n^{j_n} \\ \Rightarrow |P(a_1, a_2, \dots, a_n)| &= \left| \sum_p c_p a_1^{j_1} a_2^{j_2} \dots a_n^{j_n} \right| \leq \sum_p |c_p| |a_1|^{j_1} |a_2|^{j_2} \dots |a_n|^{j_n} \\ (c_p > 0) &= \sum_p c_p |a_1|^{j_1} |a_2|^{j_2} \dots |a_n|^{j_n} \\ &= P(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|). \end{aligned}$$

Θέτοντας $P(a_1, a_2, \dots, a_n) = (1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) - 1$, έχουμε

$$\begin{aligned} |P(a_1, a_2, \dots, a_n)| &= |(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) - 1| \\ &\stackrel{\text{πρίν}}{\leq} P(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|) \\ &= (1 + |a_1|)(1 + |a_2|) \dots (1 + |a_n|) - 1. \end{aligned}$$

2.1.1 Απειρογινόμενα

Έστω $(a_n)_n \subset \mathbb{C}$ και $P_n := \prod_{k=1}^n a_k$. Λέμε ότι το απειρογινόμενο $\prod_{n=1}^\infty a_n$ συγκλίνει αν η ακολουθία $(P_n)_n$ συγκλίνει σε έναν μιγαδικό αριθμό P και γράφουμε $P = \prod_{n=1}^\infty a_n$. Λέμε ότι το απειρογινόμενο $\prod_{n=1}^\infty (1 + a_n)$ συγκλίνει απόλυτα αν το απειρογινόμενο $\prod_{n=1}^\infty (1 + |a_n|)$ συγκλίνει.

Πρόταση 2.1.1 (Ιδιότητες Απειρογινόμενων)

1. Αν $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, τότε, το $\prod_{n=1}^\infty (1 + a_n)$ συγκλίνει $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^\infty a_n < \infty$.
2. Αν $0 \leq a_n < 1$, τότε, $\prod_{n=1}^\infty (1 - a_n) > 0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^\infty a_n < \infty$.
3. Αν $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, τότε, το $\prod_{n=1}^\infty a_n$ συγκλίνει σε έναν μη μηδενικό αριθμό $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^\infty \log a_n < \infty$, όπου $\log$ είναι ο κύριος κλάδος του λογαρίθμου.

4. Αν $(a_n)_n \subseteq \mathbb{C}$ και $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, τότε, το $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ υπάρχει και είναι $\neq 0 \Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} [a_{n+1} a_{n+2} \dots a_m] = 1$.
5. Αν $(a_n)_n \subseteq \mathbb{C}$ και $1 + a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, τότε, το $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ υπάρχει και είναι $\neq 0$.
6. Αν το απειρογινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ συγκλίνει απόλυτα, (δηλ. το $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |a_n|)$ συγκλίνει), τότε συγκλίνει, δηλ. το απειρογινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ συγκλίνει.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

1. Θέτουμε $P_n := \prod_{k=1}^n (1 + a_k) = (1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n)$ και $S_n := \sum_{k=1}^n a_k$.
($\Rightarrow$) Αφού

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq (1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) = P_n,$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) < \infty \Rightarrow (P_n) \text{ φραγμένη.}$$

έπεται ότι η (S_n) είναι άνω φραγμένη. Επίσης, η (S_n) είναι αύξουσα. Άρα, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

($\Leftarrow$) Αφού $1 + x \leq e^x$, ($x \geq 0$), έχουμε ότι

$$P_n = (1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \leq e^{a_1} e^{a_2} \dots e^{a_n} = e^{a_1 + a_2 + \dots + a_n} = e^{S_n}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \Rightarrow (S_n)$ φραγμένη $\Rightarrow (e^{S_n})$ φραγμένη. Έπεται λοιπόν ότι η (P_n) είναι άνω φραγμένη. Όμως, είναι και αύξουσα, αφού $1 + a_{n+1} \geq 1 + a_n$. Συνεπώς, $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) < \infty$.

[Συμπεραίνουμε ότι το απειρογινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |a_n|)$ συγκλίνει $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$].

2. ($\Rightarrow$) Θέτουμε $P_n := \prod_{k=1}^n (1 - a_k) = (1 - a_1)(1 - a_2) \dots (1 - a_n)$, Η (P_n) είναι φθίνουσα αφού $0 \leq a_n < 1$, $n \in \mathbb{N}$. Επομένως, η $(\frac{1}{P_n})$ είναι αύξουσα. Επίσης, αφού $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - a_n) \neq 0$, έπεται ότι η $(\frac{1}{P_n})$ είναι και φραγμένη. Τώρα, αφού $0 \leq a_n < 1$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow 1 - a_n^2 \leq 0 \Rightarrow 1 + a_n < \frac{1}{1 - a_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Επομένως,

$$1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq (1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \leq \frac{1}{(1 - a_1)(1 - a_2) \dots (1 - a_n)}.$$

Άρα, η $((1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n))_n$ είναι φραγμένη (είναι και αύξουσα) $\Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ συγκλίνει, άρα, από το 1., έπεται ότι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

($\Leftarrow$) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |-a_n| < \infty$, διότι $a_n \geq 0$. Αφού $1 + (-a_n) \neq 0$, έπεται από το 1. ότι το απειρογινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - a_n)$ υπάρχει και είναι $\neq 0$.

3. ($\Rightarrow$) Θέτουμε $P_n := \prod_{k=1}^n (1 + a_k)$. Έστω ότι το απειρογινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ συγκλίνει σε έναν μη μηδενικό αριθμό, έστω P . Θέτουμε $\theta_n := \arg(1 + a_1) +$

$\arg(1 + a_2) + \dots + \arg(1 + a_n)$. Τότε, αφού $P_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P$, έπεται ότι υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί k_n τέτοιοι ώστε $\phi_n := \arg(P_n) + 2k_n\pi \rightarrow \arg(P)$. Επίσης, $\arg(P_n) = \theta_n + 2\ell_n\pi i$, για κάποιους ακέραιους αριθμούς ℓ_n . Οπότε, έχουμε ότι $\theta_n + 2(k_n + \ell_n)\pi \rightarrow \arg(P)$. Συνεπώς, $[\theta_{n-1} - \theta_n] + 2[(k_{n+1} + \ell_{n+1}) - (k_n + \ell_n)]\pi \rightarrow 0$, δηλ. $\arg(1 + a_{n+1}) + 2[(k_{n+1} + \ell_{n+1}) - (k_n + \ell_n)]\pi \rightarrow 0$. Αλλά, αφού $|\arg(1 + a_{n+1})| \leq \pi$, έπεται, τελικά, ότι $k_n + \ell_n = m$ (:=ένας σταθερός ακέραιος), συνεπώς, $\theta_n \rightarrow \arg(P) - 2m\pi$, δηλ. η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \arg(1 + a_n)$ συγκλίνει και επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \log|1 + a_n|$ συγκλίνει (στο $\log|P|$), έπεται ότι και η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \log|1 + a_n| + i \sum_{n=1}^{\infty} \arg(1 + a_n)$$

συγκλίνει.

($\Leftarrow$) Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n)$ συγκλίνει, τότε προφανώς ισχύει

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n)\right) \neq 0.$$

4. Θέτουμε $P_n := \prod_{k=1}^n a_k = a_1 a_2 \dots a_n$.

($\Rightarrow$) Έστω ότι το απειρογινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$, υπάρχει και είναι $\neq 0$ δηλ. $\exists \lim_n P_n := P \neq 0$. Τότε, υπάρχει $\lambda > 0$ τέτοιος ώστε $|P_n| \geq \lambda$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Η (P_n) είναι ακολουθία Cauchy, ως συγκλίνουσα, άρα,

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \equiv n_0(\epsilon) : \forall m > n \geq n_0, |P_m - P_n| < \epsilon$$

δηλ.

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \equiv n_0(\epsilon) : \forall m > n \geq n_0, \left| \frac{P_m}{P_n} - 1 \right| < \frac{\epsilon}{|P_n|}$$

δηλ.

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \equiv n_0(\epsilon) : \forall m > n \geq n_0, |a_{n+1} a_{n+2} \dots a_m - 1| < \frac{\epsilon}{|P_n|} < \frac{\lambda \epsilon}{|P_n|} \leq \epsilon,$$

άρα, $\lim_{m \rightarrow \infty} [a_{n+1} a_{n+2} \dots a_m] = 1$.

($\Leftarrow$) Έστω ότι $\lim_{m \rightarrow \infty} [a_{n+1} a_{n+2} \dots a_m] = 1$. Τότε, για $\epsilon = 1/2$, $\exists n_0 \equiv n_0(\epsilon) : \forall m \geq n_0, |a_{n_0+1} a_{n_0+2} \dots a_m - 1| < 1/2$. Οπότε, αν υπάρχει το $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$, αυτό θα είναι $\neq 0$, διότι αν υπήρχε, $\prod_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 a_2 \dots a_{n_0} \prod_{n=n_0}^{\infty} a_n \neq 0$, από την τελευταία σχέση. Επίσης, από την τελευταία σχέση, βλέπουμε ότι $\forall m > n_0$,

$$|a_{n_0+1} a_{n_0+2} \dots a_m| + 1 \leq |a_{n_0+1} a_{n_0+2} \dots a_m - 1| < \frac{1}{2},$$

άρα, $|a_{n_0+1} a_{n_0+2} \dots a_m| < \frac{3}{2}$. Επίσης, $\forall \epsilon^* > 0, \exists N \equiv N(\epsilon^*) : \forall m > n \geq N, |a_{n+1} a_{n+2} \dots a_m - 1| < \epsilon^*$, δηλ.

$$\left| \frac{a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} \dots a_m}{a_1 a_2 \dots a_n} - 1 \right| < \epsilon^*,$$

δηλ. $\left| \frac{P_m}{P_n} - 1 \right| < \epsilon^*$, δηλ. $|P_m - P_n| < \epsilon^* |P_n| \stackrel{\epsilon^* = \frac{2}{3}\epsilon}{=} \frac{2}{3}\epsilon |P_n|$. Επομένως, για κάθε $n > \max\{n_0(\epsilon), N(\frac{2}{3}\epsilon = \epsilon^*)\} \equiv N_{\epsilon, \epsilon^*}$, έχουμε: $|P_m - P_n| < \frac{2}{3}\epsilon |P_n| < \frac{2}{3}\epsilon \frac{3}{2} = \epsilon$, $\forall n \geq N_{\epsilon, \epsilon^*}$, δηλ. η (P_n) είναι βασική, επομένως υπάρχει το $\lim_n P_n$ και είναι $\neq 0$.

5. Αφού $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, από το 2. (αφού $|a_n| \geq 0$) έπεται ότι το απειρογινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ υπάρχει και είναι $\neq 0$. Από την ανισότητα στην υπενθύμιση 2., έχουμε ότι $\forall m > n$,

$$|(1 + a_n)(1 + a_{n+1}) \dots (1 + a_m) - 1| \leq (1 + |a_n|)(1 + |a_{n+1}|) \dots (1 + |a_m|) - 1.$$

Από το 4., έχουμε ότι $\lim_{m \geq n \rightarrow \infty} [(1 + |a_n|)(1 + |a_{n+1}|) \dots (1 + |a_m|) - 1] = 0$. Από τις δύο τελευταίες σχέσεις έπεται ότι $\lim_{m \geq n \rightarrow \infty} [(1 + a_n)(1 + a_{n+1}) \dots (1 + a_m) - 1] = 0$.

Συνεπώς, πάλι από το 4., το απειρογινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ υπάρχει και είναι $\neq 0$.

6. Αφού το $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |a_n|)$ συγκλίνει, από το 2 έχουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, άρα, $|a_n| \rightarrow 0$. Συνεπώς, $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \equiv n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} : |a_n| < \epsilon, \forall n \geq n_0$. Παίρνοντας $\epsilon = 1$, έχουμε ότι $|a_n| < 1, \forall n \geq n_0$. Τώρα, αν $a \in \mathbb{C}, |a| < 1$, τότε

$$\begin{aligned} \text{Log}(1 + a) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{n+1}}{n+1} = a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} + \dots = \\ &= a \left(1 - \frac{a}{2} + \frac{a^2}{3} - \frac{a^3}{4} + \dots \right) \equiv a \cdot h(a). \end{aligned}$$

Όμως, $h(a) \xrightarrow{a \rightarrow 0} 1$, άρα, $\forall m \geq k$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^m \text{Log}(1 + a_n) &\leq \sum_{n=k}^m a_n h(a_n) \Rightarrow \left| \sum_{n=k}^m \text{Log}(1 + a_n) \right| \leq \left| \sum_{n=k}^m a_n h(a_n) \right| \\ \Rightarrow \left| \sum_{n=k}^m \text{Log}(1 + a_n) \right| &\leq \sum_{n=k}^m |a_n| \cdot |h(a_n)| \quad (*). \end{aligned}$$

Όμως, το σύνολο $\{h(a_n) : n \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμένο και, αφού $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, έπεται ότι $\sum_{n=k}^m |a_n| \cdot |h(a_n)| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$, επομένως, η (*) μας δίνει ότι

$$\left| \sum_{n=k}^m \text{Log}(1 + a_n) \right| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0,$$

άρα, $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Log}(1 + a_n) < \infty$. Επομένως, από το 3. έπεται ότι το απειρογινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ συγκλίνει.

Πρόταση 2.1.2 Έστω $g_n : \mathbb{C} \supset \Omega \rightarrow \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ μια ακολουθία φραγμένων συναρτήσεων, όπου Ω ανοικτό. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |g_n| < \infty$ ομοιόμορφα στο Ω , τότε το απειρογινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + g_n)$ συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα στο Ω . Επιπλέον, αν $f(z) := \prod_{n=1}^{\infty} (1 + g_n(z))$, $z \in \Omega$, τότε, $f(z) = 0$ για κάποιο $z \in \Omega \Leftrightarrow 1 + g_n(z) = 0$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αφού $\sum_{n=1}^{\infty} |g_n| < \infty$, στο Ω έπεται από το 1. της προηγούμενης πρότασης ότι το απειρογινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty} (1+|g_n|)$ συγκλίνει ($\sum_{n=1}^{\infty} |g_n| < \infty$, ομοιόμορφα στο Ω άρα συγκλίνει και απλά). Από την ομοιόμορφη σύγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} |g_n| < \infty$, στο Ω έπεται ότι $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, \left| \sum_{k=1}^n |g_n(z)| - \sum_{k=1}^N |g_n(z)| \right| < \epsilon, \forall z \in \Omega$, άρα, $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, |g_n(z)| < 1, \forall z \in \Omega$. Για κάθε $r \geq N$, έχουμε:

$$\prod_{n=1}^r (1 + g_n(z)) = \left[\prod_{n=1}^{N-1} (1 + g_n(z)) \right] \cdot \left[\prod_{n=N}^r (1 + g_n(z)) \right], (z \in \Omega).$$

Για h και m, k όπως στο 3. της Πρότασης, έχουμε ότι

$$\forall m > n \geq N, \left| \sum_{n=k}^m \text{Log}(1 + g_n(z)) \right| \leq \sum_{n=k}^m |g_n(z)| \cdot |h(g_n(z))| \xrightarrow{m,n \rightarrow \infty} 0,$$

ομοιόμορφα στο Ω . Άρα, η σειρά $\sum_{n=k}^{\infty} \text{Log}(1 + g_n(z))$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο Ω . Αφού οι $g_i, n \geq N$ είναι φραγμένες στο Ω , έπεται ότι η $\sum_{n=N}^{\infty} \text{Log}(1 + g_n(z))$ είναι φραγμένη στο Ω . Τώρα, αφού η $\exp$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στα φραγμένα υποσύνολα του Ω , έπεται ότι

$$\exp \left\{ \sum_{n=N}^r \text{Log}(1 + g_n(z)) \right\} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \exp \left\{ \sum_{n=N}^{\infty} \text{Log}(1 + g_n(z)) \right\} \neq 0$$

ομοιόμορφα στο Ω , δηλ.

$$(1 + g_N(z))(1 + g_{N+1}(z)) \dots (1 + g_r(z)) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \prod_{n=N}^{\infty} (1 + g_n(z)) \neq 0.$$

Επομένως, το απειρογινόμενο $\prod_{n=N}^{\infty} (1 + g_n(z))$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο Ω . Τέλος, $1 + g_n(z) \neq 0$ στο $\Omega, \forall n \geq N$, άρα, η $f(z) := \prod_{n=1}^{\infty} (1 + g_n(z)) = 0$ για κάποιο $z \in \Omega \Leftrightarrow 1 + g_n(z) = 0$, για κάποιο $n < N$.

Θεώρημα 2.1.1 Έστω $\{f_n\}$ μια ακολουθία ολομόρφων συναρτήσεων σε ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, έστω Ω . Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n - 1|$ συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του Ω , τότε η συνάρτηση $f := \prod_{n=1}^{\infty} (1 + g_n) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n$ ορίζει μια ολομόρφη συνάρτηση στο Ω . Επιπλέον, για κάθε $z \in \Omega$, ισχύει ότι $f(z) = 0 \Leftrightarrow f_n = 0$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Εφαρμόζοντας την προηγούμενη πρόταση για $g_n := f_n - 1, n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι η $f(z) := \prod_{n=1}^{\infty} (1 + g_n(z)) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του Ω , συνεπώς, από Θεώρημα Ομοιόμορφης Σύγκλισης του Weierstrass, έπεται ότι $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Επίσης, πάλι από την προηγούμενη πρόταση, έχουμε ότι για κάθε $z \in \Omega$, ισχύει ότι $f(z) = 0 \Leftrightarrow f_n = 0$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.

2.1.2 Γινόμενα του Weierstrass

Θα δούμε τώρα πως κατασκευάζουμε μια ολόμορφη συνάρτηση f με το σύνολο των ριζών της να είναι μια δοθείσα ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Θα μπορούσαμε (αφελώς) να πούμε ότι αν $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ είναι το (δωθέν) σύνολο ριζών της f , και m_n οι αντίστοιχες πολλαπλότητες των a_n , τότε μια αναπαράσταση της f θα ήταν η $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (z - a_n)^{m_n}$. Το απειρογινόμενο αυτό όμως μπορεί να μην συγκλίνει. Θα πρέπει λοιπόν να επιτύχουμε σύγκλιση με το να βρούμε πιο ευσταθείς παράγοντες από τους $(z - a_n)$: Προσάρτηση στους $(z - a_n)$ ενός παράγοντα της μορφής $e^{p(z)} \neq 0$, όπου $p(z)$ ένα πολυώνυμο που αλλάζει ενδεχομένως από παράγοντα σε παράγοντα. Θεωρούμε τις συναρτήσεις E_m που ορίζονται ως εξής:

$$E_0(z) := 1 - z,$$

$$E_m(z) := (1 - z) \exp \left\{ z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots + \frac{z^m}{m} \right\}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Τα E_m λέγονται *στοιχειώδεις παράγοντες* του Weierstrass (Weierstrass primitive factors) και έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες, οι οποίες είναι χρήσιμες για το σκοπό μας:

- (i) $E_m \in \mathcal{O}(\Omega)$, $m = 0, 1, 2, 3, \dots$.
- (ii) $E_m(1) = 0$, $m = 0, 1, 2, 3, \dots$. Οι E_m έχουν ρίζα τάξης 1 στο σημείο $z = 1$ και καμιά άλλη ρίζα.
- (iii) Αν $|z| < 1$, τότε, ξέρουμε ότι $\text{Log}(1 - z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$. Άρα, αν $|z| < 1$, τότε,

$$e^{\text{Log}(1-z)} = \exp \left\{ -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \right\} = \exp \left\{ -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \dots \right\}$$

$$\Rightarrow (1 - z) = \exp \left\{ -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \dots \right\}.$$

Άρα,

$$E_m(z) := (1 - z) \exp \left\{ z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^m}{m} \right\} = \exp \left\{ \frac{-z^{m+1}}{m+1} - \frac{z^{m+2}}{m+2} - \dots \right\},$$

$m = 0, 1, 2, 3, \dots$

(iv) Ισχύει ότι

$$|1 - E_m(z)| \leq |z|^{m+1}, \quad \text{για } |z| \leq 1.$$

Πράγματι, για $m = 0$ έχουμε ότι $|1 - E_0(z)| = |1 - 1 + z| = |z| \leq 1$, για $|z| \leq 1$. Αν $m \geq 1$, τότε,

$$E_m(z) = (1 - z) \exp \left\{ z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^m}{m} \right\}$$

$$\Rightarrow E'_m(z) = -z^m \exp \left\{ z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^m}{m} \right\}$$

$$\Rightarrow (1 - E_m(z))' = -E'_m(z) = -z^m \exp \left\{ z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^m}{m} \right\}.$$

Επομένως, η παράγωγος του $1 - E_m$ έχει ρίζα τάξης m στο σημείο $z = 0$. Επίσης, $1 - E_m(0) = 0$, άρα η $1 - E_m$ έχει ρίζα τάξης $m + 1$ στο σημείο $z = 0$. Συνεπώς, η συνάρτηση $z \mapsto \frac{(1-E_m)(z)}{z^{m+1}}$ έχει επουσιώδη ανωμαλία στο $z = 0$, άρα αυτή είναι ακέραια. Θεωρούμε λοιπόν το ανάπτυγμά της σε δυναμοσειρά:

$$\frac{(1 - E_m)(z)}{z^{m+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Από τη σχέση $(1 - E_m(z))' = -z^m \exp \left\{ z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^m}{m} \right\}$, παρατηρούμε ότι το $(1 - E_m(z))'$ έχει θετικούς συντελεστές στο ανάπτυγμά του σε δυναμοσειρά, άρα και το $\frac{(1-E_m)(z)}{z^{m+1}}$, δηλ. $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς,

$$\left| \frac{1 - E_m(z)}{z^{m+1}} \right| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |z|^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot |z|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

για $|z| \leq 1$. Όμως, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{1-E_m(1)}{1} = 1$, άρα, $|1 - E_m(z)| \leq |z|^{m+1}$, για $|z| \leq 1$. ■

Με τη χρήση των στοιχειωδών παραγόντων του Weierstrass, θα δούμε πως κατασκευάζονται ολόμορφες συναρτήσεις με ρίζες ένα δωθέν σύνολο μιγαδικών αριθμών:

Θεώρημα 2.1.2 (Παραγοντοποίησης Ολομόρφων Συναρτήσεων του Weierstrass)

Έστω A ένα διακριτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ με $0 \notin A$ και έστω ότι $\forall a \in A$ μας δίνεται ένας θετικός ακέραιος $m(a)$. Έστω ακόμη $\{a_1, a_2, \dots\}$ μια ακολουθία στοιχείων του A τέτοια ώστε κάθε $a \in A$ να εμφανίζεται ανάμεσα στους όρους της ακολουθίας ακριδώς $m(a)$ φορές. Αν (k_n) είναι μια ακολουθία μη αρνητικών ακεραίων τέτοια ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_n|} \right)^{1+k_n} < \infty, \quad \forall r > 0,$$

τότε, το απειρογνόμενο

$$p(z) := \prod_{n=1}^{\infty} E_{k_n} \left(\frac{z}{a_n} \right)$$

ορίζει μια ακέραια συνάρτηση με ρίζες ακριδώς τα $a \in A$ και βαθμό πολυπλοκότητας $m(a)$. Αν η f είναι μια ακέραια συνάρτηση με ρίζες ακριδώς τα $a \in A$, με βαθμό πολυπλοκότητας $m(a)$, τότε, υπάρχει $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ τέτοια ώστε $f(z) = e^{h(z)} p(z)$. Αν η f έχει ρίζα και στο $z = 0$ τάξης m , τότε, αυτή είναι της μορφής $f(z) = e^{h(z)} p(z) z^m$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αφού το A είναι διακριτό, έπεται ότι $|a_n| \xrightarrow{n} \infty$. Άρα, για κάθε $r > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n| > 2r \quad \forall n \geq n_0$, δηλ. $\frac{r}{|a_n|} < 1/2$, τελικά. Επομένως, αν $k_n = n - 1$, $n \in \mathbb{N}$, τότε,

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_n|} \right)^{k_n} = \sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_n|} \right)^{n-1} < \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} < \infty.$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} p(z) &= \prod_{n=1}^{\infty} E_{k_n} \left(\frac{z}{a_n} \right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{a_n} \right) \exp \left\{ \frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z^2}{a_n^2} + \dots + \frac{1}{k_n} \cdot \frac{z^{k_n}}{a_n^{k_n}} \right\} \right] \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \left[(z - a_n) \left(-\frac{1}{a_n} \right) \exp \left\{ \frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z^2}{a_n^2} + \dots + \frac{1}{k_n} \cdot \frac{z^{k_n}}{a_n^{k_n}} \right\} \right]. \end{aligned}$$

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left| 1 - E_{k_n} \left(\frac{z}{a_n} \right) \right| \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left| g_n \left(\frac{z}{a_n} \right) \right|$ συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{C}$: Έστω $r > 0$. Τότε, για $|z| \leq r$, έχουμε ότι

$$\left| 1 - E_{k_n} \left(\frac{z}{a_n} \right) \right| \stackrel{(iv)}{\leq} \left| \frac{z}{a_n} \right|^{1+k_n} \leq \left(\frac{r}{|a_n|} \right)^{1+k_n}.$$

Αρκεί $\frac{r}{|a_n|} \leq 1$, δηλ. $|a_n| \geq r$, η οποία ισχύει τελικά. Άρα,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| 1 - E_{k_n} \left(\frac{z}{a_n} \right) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_n|} \right)^{1+k_n}.$$

Από το Κριτήριο Ομοιόμορφης Σύγκλισης του Weierstrass, έπεται το ζητούμενο. Άρα, από το προηγούμενο Θεώρημα, η

$$p(z) = \prod_{n=1}^{\infty} g_n \left(\frac{z}{a_n} \right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - E_{k_n} \left(\frac{z}{a_n} \right) \right]$$

ορίζει μια ακέραια συνάρτηση. Επιπλέον, $p(z) = 0 \Leftrightarrow g_n(z) = 0$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, δηλ. $E_{k_n} \left(\frac{z}{a_n} \right) = 0$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.

Τέλος, αφού η $f(z)/p(z)$ είναι ακέραια και δε μηδενίζεται πουθενά, από την υπενθύμιση 1., έχουμε ότι υπάρχει $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ τέτοια ώστε $f(z)/p(z) = e^{h(z)}$, δηλ. $f(z) = e^{h(z)}p(z)$. ■

Το παραπάνω Θεώρημα γενικεύεται και για τυχαία ανοικτά σύνολα:

Θεώρημα 2.1.3 Έστω $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ ανοικτό. Έστω επίσης $A \subset \mathbb{C}$ το οποίο δεν έχει σημεία συσσώρευσης στο Ω . Υποθέτουμε ότι για κάθε σημείο $a \in A$, μας δίνεται ένας θετικός ακέραιος $m(a)$. Τότε, υπάρχει $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ τέτοια ώστε οι ρίζες της να βρίσκονται στο A και η οποία έχει ρίζα τάξης $m(a)$ σε κάθε $a \in A$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αρκεί να το δείξουμε για την ειδική περίπτωση που $\infty \in \Omega$, αλλά $\infty \notin A$, γιατί στην αντίθετη περίπτωση, θα μπορούσαμε να αναχθούμε σε αυτή, μέσω ενός μετασχηματισμού:

υποθέτουμε ότι το θεώρημα αποδείχθηκε για την ειδική αυτή περίπτωση. Τότε, αν Ω_1 και A_1 όπως στις υποθέσεις του θεωρήματος, τότε, επιλέγουμε ένα $a \in \Omega_1 \setminus A_1$ και ορίζουμε την απεικόνιση

$$T : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \text{ με } z \mapsto T(z) := \frac{1}{z - a}.$$

Τότε, ο T είναι ένας 1-1 και συνεχής μετασχηματισμός από το (ανοικτό) $\Omega_1 \setminus \{a\}$ σε ένα ανοικτό σύνολο Ω . Με το μετασχηματισμό αυτό μπορούμε να αναχθούμε στην ειδική περίπτωση: αν $A_1 = \{a_1, a_2, \dots\}$, τότε, για το σύνολο $A := \{T(a_n) : n \in \mathbb{N}\}$, έχουμε ότι το Ω και A ικανοποιούν τις υποθέσεις της ειδικής περίπτωσης. Επομένως (εχοντας υποθέσει την ειδική περίπτωση), υπάρχει $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ τέτοια ώστε το σύνολο των ριζών της να είναι το A και $m(a_n)$ οι αντίστοιχες πολλαπλότητες τους. Αφού η $T \in \mathcal{O}(\Omega_1 \setminus \{a\})$, έπεται ότι η συνάρτηση $g := f \circ T \in \mathcal{O}(\Omega_1 \setminus \{a\})$. Αφού $\lim_{z \rightarrow a} T(z) = \infty$ και f ολόμορφη στο ∞ , έπεται ότι $\lim_{z \rightarrow a} f(T(z)) \neq 0$. Άρα, η g έχει επουσιώδη ανωμαλία στο a με $g(a) \neq 0$. Δηλ. το a δεν είναι ρίζα της g και αφού το a ήταν τυχόν σημείο του $\Omega_1 \setminus A_1$, έπεται ότι το σύνολο των ριζών της g είναι το A_1 . [Έπεται ότι το $\mathbb{C} \setminus \Omega$ είναι συμπαγές και μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ με το ∞ να μην είναι οριακό σημείο του A].

Θα δείξουμε τώρα το Θεώρημα στην ειδική αυτή περίπτωση. Αν το A είναι πεπερασμένο, έστω $A := \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, με m_i , $1 \leq i \leq n$ οι αντίστοιχες πολλαπλότητες των a_i , τότε η f είναι μια ρητή συνάρτηση:

$$f(z) = \frac{(z - a_1)^{m_1} (z - a_2)^{m_2} \dots (z - a_n)^{m_n}}{(z - w)^{m_1 + m_2 + \dots + m_n}},$$

όπου $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.

Αν το A είναι άπειρο και $\{z_n\}$ μια ακολουθία στοιχείων του A , τέτοια ώστε κάθε $a \in A$ να εμφανίζεται ανάμεσα στους όρους της ακολουθίας ακριβώς $m(a)$ φορές. το $\mathbb{C} \setminus \Omega$ είναι συμπαγές και μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, έπεται ότι για κάθε $n \geq 1$, υπάρχει $w_n \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ τέτοιο ώστε $|w_n - z_n| = \text{dist}(z_n, \mathbb{C} \setminus \Omega) > 0$, δηλ. $|w_n - z_n| \leq |z - a_n|$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Αφού η ακολουθία $\{z_n\}$ δεν έχει σημεία συσσώρευσης στο Ω , έπεται ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} |w_n - z_n| = 0$. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n(z) := E_n \left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n} \right).$$

[Θέτουμε $f_n(\infty) = E_n(0) = 1$]. Τότε, οι f_n έχουν ρίζα τάξης 1 στα σημεία z_n και καμιά άλλη ρίζα. Επιπλέον, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n|$ συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του Ω : Έστω $K \subset \Omega$ συμπαγές. Θέτοντας $r_n := 2|w_n - z_n|$, έχουμε ότι $r_n \rightarrow 0$, άρα, $\exists N \in \mathbb{N} : |z - w_n| > r_n$, $\forall z \in K$, $\forall n \geq N$. Συνεπώς,

$$\left| \frac{w_n - z_n}{z - w_n} \right| < \frac{1}{2}, \quad \forall z \in K, \quad \forall n \geq N.$$

Άρα,

$$\left| 1 - E_n \left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n} \right) \right| < \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}, \quad \forall z \in K, \quad \forall n \geq N.$$

Τότε, από το Θεώρημα 11, έχουμε ότι η συνάρτηση $f(z) := \prod_{n=1}^{\infty} E_n \left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n} \right)$ έχει τις ζητούμενες ιδιότητες.

Πόρισμα 2.1.1 Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}$ ανοικτό και f μια μερόμορφη συνάρτηση στο Ω . Τότε, υπάρχουν ολόμορφες συναρτήσεις g και h στο Ω τέτοιες ώστε $f = g/h$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $A := \{a_1, a_2, \dots\}$ το σύνολο των πόλων της f και m_j οι αντίστοιχες τάξεις των. Από το προηγούμενο Θεώρημα, υπάρχει Ολόμορφη συνάρτηση h με ρίζες τα σημεία a_j και αντίστοιχες τάξεις m_j . Τότε, η συνάρτηση $f = g/h$ είναι ολόμορφη στο Ω .

Πόρισμα 2.1.2 Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}$ ανοικτό. Τότε υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση στο Ω η οποία δεν μπορεί να επεκταθεί σε ολόμορφη σε κανένα μεγαλύτερο σύνολο, ούτε καν σαν μερόμορφη συνάρτηση.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε όλα τα σημεία του Ω με ρητές συντεταγμένες τα οποία θεωρούμε ως μια ακολουθία $(z_n)_n$ τέτοια ώστε κάθε σημείο να εμφανίζεται άπειρες φορές. Θέτουμε $r_j := \text{dist}(z_j, \partial\Omega)$. Θεωρούμε μια ακολουθία συμπαγών συνόλων $K_j \subset \Omega$ τέτοια ώστε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω να περιέχεται σε κάποιο K_j . Για κάθε j επιλέγουμε $\omega_j \in \Omega \setminus K_j$ τέτοιο ώστε $|\omega_j - z_j| < r_j$. Τότε, το σύνολο $\{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ είναι διακριτό. Άρα, από το προηγούμενο Θεώρημα, υπάρχει $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ με ρίζες τα σημεία ω_j μόνο. Αν $p \in \Omega$ έχει ρητές συντεταγμένες και $r := \text{dist}(p, \partial\Omega)$, τότε ο δίσκος $D(p, r)$ περιέχει άπειρα το πλήθος ω_j . Άρα, η f δεν μπορεί να επεκταθεί σε μερόμορφη συνάρτηση σε κανένα δίσκο που περιέχει το $\overline{D(p, r)}$, αφού οι ρίζες μερόμορφης συνάρτησης είναι μεμονωμένες (αφού βέβαια αυτή είναι $\neq 0$).

2.2 Το Προσεγγιστικό Θεώρημα του Runge

Το γεγονός ότι μια συνάρτηση η οποία είναι ολόμορφη σε έναν δίσκο έχει ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά, μας λέει ότι αυτή μπορεί να προσεγγισθεί ομοιόμορφα από ακολουθία πολυωνύμων ως προς z σε οποιοδήποτε μικρότερο δίσκο. Πιο συγκεκριμένα, κάθε ακέραια συνάρτηση μπορεί να προσεγγισθεί ομοιόμορφα από πολυώνυμα σε κάθε συμπαγές σύνολο. Τώρα, θα δούμε ένα γενικότερο προσεγγιστικό Θεώρημα, αυτό του Runge, το οποίο λέει αν $K \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\} \equiv \overline{\mathbb{C}}$, και $S \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus K$, το οποίο περιέχει ένα τουλάχιστον σημείο από κάθε συνεκτική συνιστώσα του $\overline{\mathbb{C}}$, τότε, κάθε συνάρτηση f η οποία είναι ολόμορφη σε μια περιοχή του K , αυτή είναι ομοιόμορφο όριο (στο K) ρητών συναρτήσεων των οποίων οι πόλοι ευρίσκονται στο S .

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει η περίπτωση όπου το $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$ είναι συνεκτικό. Στην περίπτωση αυτή, μπορούμε να πάρουμε για $S = \{\infty\}$ και η ακολουθία ρητών συναρτήσεων να είναι μια ακολουθία πολυωνύμων, δηλ. δεν υπάρχουν πόλοι. Επομένως, κάθε ολόμορφη συνάρτηση f στο Ω έχει παράγουσα, ήτοι $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$, $\forall \gamma$ κλειστή καμπύλη τέτοια ώστε $[\gamma] \subset \Omega$. Πριν την απόδειξη του Θεωρήματος, θα δούμε την ιδέα πίσω από αυτό μέσω κάποιων παρατηρήσεων:

Παρατηρήσεις 1. Έστω $K \subset \mathbb{C}$ συμπαγές και ζ ένα σημείο στη μη φραγμένη συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C} \setminus K$. Τότε, η συνάρτηση $z \mapsto 1/(z - \zeta)$, $z \in K$ προσεγγίζεται ομοιόμορφα από πολυώνυμα του z :

Η ιδέα είναι να πάρουμε ένα σημείο ξ αρκετά κοντά στο ζ και να εκφράσουμε την $1/(z - \zeta)$ συναρτήσει των z , $1/(\xi - z)$ και ακολουθώντας "σπρώχνοντας" το

σημείο ξ αρκετά μακριά έτσι ώστε να μπορούμε να αναπτύξουμε, τελικά, την $1/(\xi - z)$, $z \in K$ σε δυναμοσειρά σε δίσκο με ακτίνα αρκετά μεγάλη και το σύνολο K να ευρίσκεται στον δίσκο αυτό, πετυχαίνοντας έτσι (τελικά) την ομοιόμορφη σύγκλιση ως προς $z \in K$:

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } \xi \mapsto h(\xi) := \text{dist}(\xi, K) - |\xi - \zeta|.$$

Παρατηρούμε ότι $h(\zeta) = \text{dist}(\zeta, K)$, και αφού K συμπαγές, $\{\xi\}$ κλειστό και $K \cap \{\xi\} = \emptyset$, έπεται ότι $\text{dist}(\xi, K) > 0$, σε μια περιοχή του ζ , δηλ.

$$\exists M > 0 : \forall \xi \in D(\zeta, M) \Rightarrow h(\xi) > 0,$$

δηλ. $\text{dist}(\xi, K) > |\xi - \zeta|$, για $|\xi - \zeta| < M$. Άρα, για $a > 0$ τέτοιο ώστε $\text{dist}(\xi, K) > a > |\xi - \zeta|$, (υπάρχει τέτοιο αφού $\text{dist}(\xi, K) > 0$) και K συμπαγές) έχουμε ότι

$$\left| \frac{\xi - \zeta}{\xi - z} \right| = \frac{|\xi - \zeta|}{|\xi - z|} \leq \frac{|\xi - \zeta|}{\text{dist}(\xi, K)} < \frac{|\xi - \zeta|}{a}.$$

Επομένως,

$$\sup_{z \in K} \left| \frac{\xi - \zeta}{\xi - z} \right| \leq \frac{|\xi - \zeta|}{a} < 1,$$

συνεπώς, η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\xi - \zeta}{\xi - z} \right)^k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο K και

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\xi - \zeta}{\xi - z} \right)^k = \frac{1}{1 - \frac{\xi - \zeta}{\xi - z}} = \frac{\xi - z}{\zeta - z} \Rightarrow \frac{1}{\zeta - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\xi - \zeta)^k}{(\xi - z)^{k+1}}, \quad |\xi - \zeta| < M.$$

Δείξαμε λοιπόν ότι η συνάρτηση $1/(\zeta - z)$, $z \in K$ προσεγγίζεται ομοιόμορφα από συναρτήσεις της μορφής $\mathcal{P}\left(z, \frac{1}{\xi - z}\right)$, όπου $\mathcal{P}$ πολυώνυμο (εντός του δίσκου $\Delta(\zeta, M)$). Το σημείο ξ στο οποίο έχει πόλο η συνάρτηση $z \mapsto 1/(\xi - z)$ μπορεί να υποθεθεί ότι είναι τόσο "μακριά" από K έτσι ώστε η συνάρτηση αυτή να προσεγγίζεται από πολυώνυμο του z , δηλ. να ανήκει σε έναν "αρκετά μεγάλο" κύκλο ακτίνας R και κέντρου κάποιο σημείο, π.χ. το 0, έτσι ώστε η $1/(\xi - z)$ να αναλύεται σε δυναμοσειρά με κέντρο το σημείο αυτό και άρα προσεγγίζεται από πολυώνυμο του z . [Δηλ. ο κύκλος αυτός θα πρέπει να είναι τέτοιος ώστε να περιέχει το K στο εσωτερικό του για να πετύχουμε την προσέγγιση ως προς $z \in K$]. Αυτό δικαιολογείται ως εξής:

Θεωρούμε μια καμπύλη γ η οποία να πηγαίνει στο άπειρο. Θεωρούμε τότε το σύνολο

$$A := \{\xi \in [\gamma] : \exists \xi_0 = \zeta, \xi_1 = \xi, \xi_2, \dots, \xi_N \text{ τ.ω. } \sup_{z \in K} \left| \frac{\xi_j - \xi_{j-1}}{\xi_j - z} \right| < 1, 1 \leq j \leq N\}.$$

Το A είναι (σχετικά) ανοικτό και κλειστό στο $[\gamma]$ και αφού το $\mathbb{C} \setminus K$ είναι συνεκτικό, έπεται ότι $A = [\gamma]$. Συνεπώς, βρίσκουμε σημεία $\xi_0 = \zeta, \xi_1 = \xi, \xi_2, \dots, \xi_N$ τέτοια ώστε $\xi_N \in C(0, R)$, $R > 0$ και

$$\sup_{z \in K} \left| \frac{\xi_j - \xi_{j-1}}{\xi_j - z} \right| < 1, \quad 1 \leq j \leq N. \quad (2.1)$$

Χρησιμοποιώντας την (2.1) και κάνοντας διαδοχικές προσεγγίσεις, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $1/(\zeta - z)$ προσεγγίζεται ομοιόμορφα στο K από συναρτήσεις της μορφής $\mathcal{P}\left(z, \frac{1}{\xi_N - z}\right)$, όπου $\mathcal{P}$ πολυώνυμο. Όμως, αφού $\xi_N \in C(0, R)$, η $\frac{1}{\xi_N - z}$ γράφεται σε δυναμοσειρά με κέντρο το 0, έπεται ότι αυτή προσεγγίζεται από πολυώνυμα ως προς z και έτσι έχουμε το αποτέλεσμα.

2. Έστω $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ μια (C^1) καμπύλη, $f : [\gamma] \rightarrow \mathbb{C}$ μια συνεχής συνάρτηση και $K \subset \mathbb{C}$ συμπαγές με $K \cap [\gamma] = \emptyset$. Τότε, για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχουν σημεία ζ_j , $0 \leq j \leq N$, $N \in \mathbb{N}$ στο $[\gamma]$ τέτοια ώστε να ισχύει

$$\left| \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \sum_{j=1}^N \frac{f(\zeta_j)}{\zeta_j - z} (\zeta_j - \zeta_{j-1}) \right| < \epsilon, \quad \forall z \in K.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\epsilon > 0$. Από την ομοιόμορφη συνέχεια της συνάρτησης

$$g : [\gamma] \times K \rightarrow \mathbb{C} \text{ με } (\zeta, z) \mapsto g(\zeta, z) := \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

έπεται ότι υπάρχει διαμέριση $\{0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = 1\}$ του $[0, 1]$ τέτοια ώστε $\forall t \in [t_{j-1}, t_j]$ και $\forall z \in K$,

$$\left| \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} - \frac{f(\gamma(t_j))}{\gamma(t_j) - z} \right| < \frac{\epsilon}{L(\gamma)}. \quad (2.2)$$

Ορίζουμε $R : K \rightarrow \mathbb{C}$ με

$$R(z) = \sum_{j=1}^N \frac{f(\gamma(t_j))}{\gamma(t_j) - z} (\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})), \quad (z \neq \gamma(t_j)).$$

Η R είναι μια ρητή συνάρτηση της οποίας οι πόλοι είναι το σύνολο $\{\gamma(t_j) : 1 \leq j \leq N\}$ και συγκεκριμένα αυτοί βρίσκονται στο $\Omega \setminus K$. Τέλος, για κάθε $z \in K$

έχουμε

$$\begin{aligned}
|f(z) - R(z)| &= \left| \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dz - \sum_{j=1}^N \frac{f(\gamma(t_j))}{\gamma(t_j) - z} (\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})) \right| \\
&= \left| \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} \gamma'(t) dt - \sum_{j=1}^N \frac{f(\gamma(t_j))}{\gamma(t_j) - z} (\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})) \right| \\
&= \left| \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} \gamma'(t) dt - \sum_{j=1}^N \left[\frac{f(\gamma(t_j))}{\gamma(t_j) - z} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t) dt \right] \right| \\
&= \left| \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left[\frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} - \frac{f(\gamma(t_j))}{\gamma(t_j) - z} \right] \gamma'(t) dt \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left| \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} - \frac{f(\gamma(t_j))}{\gamma(t_j) - z} \right| dt \\
&\stackrel{(2.2)}{<} \frac{\epsilon}{L(\gamma)} \cdot \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\gamma'(t)| dt = \frac{\epsilon}{L(\gamma)} \int_0^1 |\gamma'(t)| dt = \frac{\epsilon}{L(\gamma)} \cdot L(\gamma) \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

3. Έστω $D \subset \mathbb{C}$ ένα απλά συνεκτικό σύνολο και $K \subset D$ συμπαγές. Τότε, κάθε $f \in \mathcal{O}(D)$ είναι ομοιόμορφο όριο στο K πολυωνύμων του z :

Θεωρούμε μια καμπύλη γ ανάμεσα στο K και ∂D . Από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy, έχουμε ότι

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in K.$$

Από την προηγούμενη παρατήρηση, το πιο πάνω ολοκλήρωμα μπορεί να προσεγγισθεί από ένα άθροισμα της μορφής

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^N \frac{f(\zeta_j)}{\zeta_j - z} (\zeta_j - \zeta_{j-1})$$

και οι συναρτήσεις $1/(\zeta_j - z)$ που εμφανίζονται σε αυτό προσεγγίζονται (από την παρατήρηση 1.) από πολυώνυμα του z .

4. Έστω γ μια απλή καμπύλη, K ένα συμπαγές σύνολο στο εξωτερικό της γ καθώς και ένα σημείο a στο εσωτερικό της γ . Αν ζ ένα σημείο πάνω στην καμπύλη γ , τότε, συνάρτηση $1/(\zeta - z)$ προσεγγίζεται ομοιόμορφα για $z \in K$ από συναρτήσεις της μορφής $\mathcal{P}\left(z, \frac{1}{\zeta - a}\right)$, όπου $\mathcal{P}$ πολυώνυμο, δηλ. ρητές συναρτήσεις με πόλο στο σημείο a . Αυτό γίνεται όπως στην παρατήρηση 1. φέρνοντας τώρα τον πόλο από το σημείο ζ στο σημείο a κάνοντας δηλ. την "αντίθετη" διαδικασία: $\xi \in C(a, r)$, όπου $r > 0$ και αρκετά μικρό. Όμως, μια συνάρτηση της μορφής $\mathcal{P}\left(z, \frac{1}{\xi - a}\right)$, (όπου

$\mathcal{P}$ πολυώνυμο) είναι ολόμορφη στο δακτύλιο $\Delta(a, r, \infty)$ και άρα προσεγγίζεται ομοιόμορφα πάνω στο $K \subset \Delta(a, r, \infty)$ από ρητές συναρτήσεις με πόλο στο σημείο a [από το ανάπτυγμά της σε σειρά Laurent]

Δείξαμε λοιπόν το ακόλουθο συμπέρασμα:

5. Έστω $D \subset \mathbb{C}$ ένα ανοικτό και φραγμένο σύνολο τέτοιο ώστε το $\mathbb{C} \setminus D$ να έχει δύο συνεκτικές συνιστώσες, έστω C_1 και C_2 εκ των οποίων η μη φραγμένη να είναι π.χ. η C_1 . Έστω επίσης ένα σημείο $a \in C_2$. Τότε, κάθε $f \in \mathcal{O}(D)$ προσεγγίζεται ομοιόμορφα για $z \in K$ από ρητές συναρτήσεις με πόλο στο σημείο a :

Θεωρούμε δύο απλές καμπύλες γ_1, γ_2 στο D με $[\gamma_1] \cap [\gamma_2] = \emptyset$ ώστε το σύνολο K να είναι ανάμεσά τους. Τότε, από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy, έχουμε ότι

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in K.$$

Το μεν πρώτο ολοκλήρωμα προσεγγίζεται από πολυώνυμο του z ενώ το δε δεύτερο ολοκλήρωμα από ρητές συναρτήσεις με πόλο στο σημείο a (όπως είδαμε πριν). ■

Τέλος, για την απόδειξη του Θεωρήματος του Runge, θα χρειαστούμε και το ακόλουθο Θεώρημα:

Θεώρημα 2.2.1 Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $K \subseteq \Omega$ συμπαγές. Τότε, υπάρχει μια αλυσίδα γ στο $\mathbb{C} \setminus K$ τέτοια ώστε αυτή να είναι το ευθύ άθροισμα κλειστών πολυγωνικών γραμμών και $\forall f \in \mathcal{O}(\Omega)$, να ισχύει ότι

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in K.$$

Τι εννοούμε όμως όταν λέμε αλυσίδα;

Έστω $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ κλειστές πολυγωνικές γραμμές. Τότε, το $\gamma := \sum_{j=1}^m k_j \gamma_j$, όπου $k_j \in \mathbb{Z}$ ονομάζεται αλυσίδα. Ορίζουμε

$$[\gamma] := \bigcup_{j=1}^m [\gamma_j] \quad \text{και} \quad \forall f \in C([\gamma]), \quad \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta := \sum_{j=1}^m k_j \int_{\gamma_j} f(\zeta) d\zeta.$$

Για $z \notin [\gamma]$, ορίζουμε

$$\delta_{\gamma}(z) := \sum_{j=1}^m k_j \delta_{\gamma_j}(z),$$

όπου $\delta_{\gamma}(z)$ είναι ο δείκτης στροφής της γ γύρω από το σημείο z .

Για την απόδειξη του πιο πάνω Θεωρήματος, θα χρειαστούμε το ακόλουθο Λήμμα, το οποίο ουσιαστικά λέει ότι μπορούμε να καλύψουμε το K με ένα πλέγμα από τετράγωνα στα οποία τα σημεία του K που βρίσκονται στο εσωτερικό κάποιου από τα τετράγωνα αυτά ο δείκτης στροφής να είναι ίσος με ένα (ο δείκτης στροφής ορίζεται πάνω στο σύνορο του τετραγώνου) και ακολούθως να πάρουμε, τελικά, κλειστές πολυγωνικές γραμμές γύρω από το K σχηματίζοντας την επιθυμητή αλυσίδα για την οποία ισχύει ο τύπος του Cauchy. Το Θεώρημα θα έπεται τότε από τον Ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy.

Λήμμα Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $K \subseteq \Omega$ συμπαγές. Τότε, υπάρχουν κλειστές πολυγωνικές γραμμές $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ στο $\Omega \setminus K$ τέτοιες ώστε

$$\sum_{j=1}^m \delta_{\gamma_j}(z) = \begin{cases} 1, & z \in K \\ 0, & z \notin \Omega \end{cases}$$

[Δηλ. υπάρχει μια (πολυγωνική) αλυσίδα στο $\Omega \setminus K$ η οποία στρέφεται γύρω από κάθε σημείο του K ακριβώς μια φορά και καμιά φορά γύρω από τα σημεία του $\mathbb{C} \setminus \Omega$].

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Καταρχήν, αφού το K είναι συμπαγές και το Ω ανοικτό, έπεται ότι $\text{dist}(K, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geq 2\eta$, για κάποιο $\eta > 0$. Κατασκευάζουμε ένα πλέγμα οριζοντίων και καθέτων γραμμών στο επίπεδο έτσι ώστε η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών οριζοντίων να είναι ίση με η , καθώς επίσης και μεταξύ των καθέτων. Θέτουμε $\mathcal{P}_\eta$ τη διαμέριση αυτή του επιπέδου. Έστω $\mathcal{S} := \{Q \in \mathcal{P}_\eta : Q \cap K \neq \emptyset\}$, δηλ. το σύνολο των τετραγώνων που τέμνουν το K . Αφού το K είναι συμπαγές, το $\mathcal{S}$ είναι πεπερασμένο. Έστω λοιπόν $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$ τα στοιχεία του $\mathcal{S}$. Τότε, προφανώς τα στοιχεία του $\mathcal{S}$ περιέχονται στο Ω . Τότε, μπορούμε εύκολα να δούμε, παραμετρώντας τις πλευρές του κάθε τετραγώνου (με θετικό προσανατολισμό την αντιωρολογιακή φορά) να δούμε ότι $\forall 1 \leq r \leq m$,

$$\delta_{\partial Q_r}(z) = \begin{cases} 1, & \text{αν το } z \in \text{int}(Q_r) \\ 0, & \text{αν το } z \notin Q_r \end{cases}$$

Έστω S_1 το σύνολο όλων των πλευρών των τετραγώνων Q_r , $1 \leq r \leq m$. Από το S_1 αφαιρούμε τα στοιχεία εκείνα των οποίων τα αντίθετα ανήκουν επίσης σε αυτό και έστω S_2 το καινούργιο αυτό σύνολο. Θέτουμε γ την αλυσίδα που δημιουργείται από τα στοιχεία του S_2 . Η γ είναι πράγματι μια αλυσίδα στο σύνολο $\Omega \setminus K$ από την πιο πάνω κατασκευή: αν μια πλευρά κάποιου Q_r τέμνει το K , τότε τα δύο τετράγωνα των οποίων η κοινή πλευρά αυτή βρίσκεται, τέμνουν το K , επομένως το σύνολο S_1 περιέχει δύο προσανατολισμένα στοιχεία τα οποία το ένα είναι αντίθετο του άλλου και των οποίων το μήκος είναι η κοινή πλευρά αυτή, άρα δεν ανήκουν στο S_2 . Η κατασκευή του S_2 δείχνει επίσης ότι

$$\delta_\gamma(z) = \sum_{r=1}^m \delta_{\partial Q_r}(z), \quad (2.3)$$

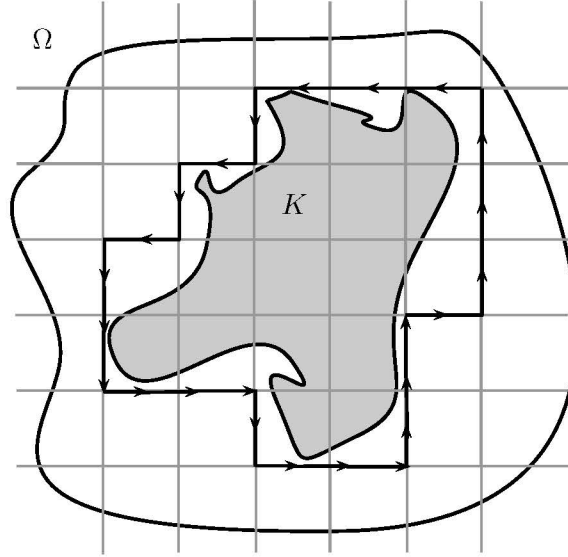
αν το z δεν βρίσκεται στο σύνολο οποιουδήποτε Q_r . Επομένως, από την (2.3) έπεται ότι

$$\delta_\gamma(z) = \begin{cases} 1, & \text{αν το } z \text{ ανήκει στο εσωτερικό κάποιου } Q_r \\ 0, & \text{αν το } z \text{ δεν ανήκει σε κανένα } Q_r \end{cases}$$

Αν $z \in K$, τότε $z \notin [\gamma]$ και το z είναι το όριο μιας ακολουθίας $\{z_n\} \subset Q_r$, για κάποιο Q_r . Αφού ο δείκτης στροφής είναι σταθερός σε κάθε συνεκτική συνιστώσα

του $[\gamma]$, έπεται από την τελευταία σχέση ότι

$$\sum_{j=1}^m \delta_{\gamma_j}(z) = \delta_\gamma(z) = \begin{cases} 1, & \text{αν το } z \text{ ανήκει στο } K \\ 0, & \text{αν το } z \text{ δεν ανήκει στο } \Omega \end{cases}$$



Παρατήρηση Το προηγούμενο Λήμμα χρησιμοποιείται στην απόδειξη του “αν για κάθε κλειστή καμπύλη (ή αλυσίδα) γ ισχύει $\delta_\gamma(z) = 0, \forall z \notin \Omega$, τότε, το $\mathbb{C} \setminus \Omega$ είναι συνεκτικό”. Το αντίστροφο επίσης ισχύει.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ (Θεωρήματος)

Έπεται από το προηγούμενο Λήμμα και τον Ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy.

Θεώρημα 2.2.2 (Runge) Έστω $K \subset \overline{\mathbb{C}}$, και $S \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus K$, το οποίο περιέχει ένα τουλάχιστον σημείο από κάθε συνεκτική συνιστώσα του $\overline{\mathbb{C}}$, τότε, κάθε συνάρτηση f η οποία είναι ολόμορφη σε μια περιοχή του K , αυτή είναι ομοιόμορφο όριο (στο K) ρητών συναρτήσεων των οποίων οι πόλοι ευρίσκονται στο S .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θέτουμε

$X := \{\zeta \in \mathbb{C} \setminus K : \text{οι συναρτήσεις } 1/(\zeta - z)^k, k \in \mathbb{N} \text{ προσεγγίζονται ομοιόμορφα πάνω στο } K \text{ από ρητές συναρτήσεις με πόλους στο σύνολο } \{a_j : j \in \mathbb{N}\}\}$.

Το σύνολο X είναι (σχετικά) ανοικτό και κλειστό στο $\mathbb{C} \setminus K$:

Έστω $\{\zeta_m\}$ ακολουθία στο X τέτοια ώστε $\zeta_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \zeta \in \mathbb{C} \setminus K$. Τότε,

$$\sup_{z \in K} \left| \frac{1}{(\zeta_m - z)^k} - \frac{1}{(\zeta - z)^k} \right| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Άρα, το X είναι κλειστό στο $\mathbb{C} \setminus K$. Έστω τώρα $\zeta \in X$. Θα δείξουμε ότι κάθε (ανοικτή) περιοχή του ζ ανήκει στο X , άρα X ανοικτό (στο $\mathbb{C} \setminus K$):

Έστω $\xi \in \Delta(\zeta, \text{dist}(\zeta, K))$, δηλ. $|\zeta - \xi| < \text{dist}(\zeta, K)$. Τότε, όπως στην παρατήρηση 1, έχουμε ότι

$$\sup_{z \in K} \left| \frac{\zeta - \xi}{\zeta - z} \right| < 1$$

και άρα,

$$\frac{1}{\xi - \zeta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\zeta - \xi)^k}{(\zeta - z)^{k+1}}, \quad z \in K \quad (2.4)$$

με τη σύγκλιση να είναι ομοιόμορφη (στο K). Αφού $\zeta \in X$ οι συναρτήσεις $1/(\zeta - z)^k$, $k \in \mathbb{N}$ προσεγγίζονται από ρητές συναρτήσεις με πόλους στο σύνολο $\{a_j : j \in \mathbb{N}\}$ και άρα, από την (2.4), έπεται ότι η συνάρτηση $1/(\xi - z)$ προσεγγίζεται από τις ρητές αυτές συναρτήσεις. Τέλος, για $m \geq 2$, η (2.4) μας δίνει (παραγωγίζοντας) ότι

$$\frac{1}{(\xi - z)^m} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \dots (k+m-1) \frac{(\zeta - \xi)^k}{(\zeta - z)^{k+m}}, \quad z \in K$$

με τη σύγκλιση να είναι ομοιόμορφη (στο K). Επομένως, οι συναρτήσεις $\frac{1}{(\xi - z)^m}$ προσεγγίζονται από τις ρητές συναρτήσεις που θέλουμε. Άρα, $\xi \in X$, δηλ. $\Delta(\zeta, \text{dist}(\zeta, K)) \subset X$ και συνεπώς το X ανοικτό (στο $\mathbb{C} \setminus K$).

Τώρα, αφού $a_j \in X$, $\forall j \in \mathbb{N}$, έπεται ότι το X τέμνει κάθε φραγμένη συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C} \setminus K$. Επίσης, αν $K \subset \Delta(0, R)$ και $\zeta \in C(0, R)$, τότε $\zeta \in X$, αφού η συνάρτηση $1/(\zeta - z)^k$ αναλύεται σε δυναμοσειρά στο δίσκο $\Delta(0, R)$, αυτή προσεγγίζεται από πολυώνυμα του z . Συνεπώς, το X τέμνει και τη μη φραγμένη συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C} \setminus K$, άρα, τελικά, $X = \mathbb{C} \setminus K$.

Τέλος, θα δούμε πως προσεγγίζεται μια f ολόμορφη σε μια περιοχή του K : Έστω f ολόμορφη σε μια περιοχή του K . Τότε, από Θεώρημα (2.2.1), υπάρχει μια αλυσίδα γ τέτοια ώστε

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in K.$$

Από τον πιο πάνω τύπο και την παρατήρηση 2., έχουμε ότι η f προσεγγίζεται από αθροίσματα της μορφής

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^N \frac{f(\zeta_j)}{\zeta_j - z} (\zeta_j - \zeta_{j-1}), \quad \text{όπου } \zeta_j \in [\gamma], \quad 0 \leq j \leq N.$$

Όμως, από τον ορισμό του X , έπεται ότι οι συναρτήσεις $1/(\zeta_j - z)$ προσεγγίζονται ομοιόμορφα στο K από ρητές συναρτήσεις με πόλους ακριβώς το σύνολο $\{a_j : j \in \mathbb{N}\}$ και το συμπέρασμα έπεται. ■

Θα δούμε τώρα δύο άλλες μορφές του Θεωρήματος του Runge. Ξέρουμε ότι κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$ γράφεται ως μια αριθμήσιμη οικογένεια συμπαγών συνόλων (π.χ. κλειστών δίσκων). Όμως, για τα επόμενα, θα χρειαστούμε τα σύνολα αυτά να έχουν κάποιες επιπλέον ιδιότητες :

Πρόταση Κάθε $\Omega \subset \mathbb{C}$ είναι ένωση συνόλων μιας ακολουθίας $\{K_n\}$ συμπαγών

συνόλων τέτοιων ώστε

- (i) $K_n \subset \text{int}(K_{n+1})$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- (ii) Κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω βρίσκεται σε κάποιο K_n .
- (iii) Κάθε συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C} \setminus K_n$ περιέχει μια συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C} \setminus \Omega$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Παρατήρηση: Η ιδιότητα (iii) λέει ότι το K_n δεν έχει άλλες τρύπες εκτός από αυτές που του επιβάλλουν οι τρύπες του Ω .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θέτουμε

$$K_n = \overline{\Delta(0, n)} \cap \{z : |z - \omega| \geq 1/n : \omega \in \mathbb{C} \setminus \Omega\}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.5)$$

Κάθε K_n , $n \in \mathbb{N}$ είναι κλειστό (ως τομή κλειστών συνόλων: του κλειστού δίσκου $\overline{\Delta(0, n)}$ και των κλειστών $\{z : |z - \omega| \geq 1/n : \omega \in \mathbb{C} \setminus \Omega\}$: από τη συνέχεια της συνάρτησης $z \mapsto |z|$ και του ότι το $\mathbb{C} \setminus \Omega$ είναι κλειστό) και φραγμένο αφού $K_n \subset \overline{\Delta(0, n)}$. Άρα, τα K_n είναι συμπαγή σύνολα.

Έστω τώρα $z \in K_n$, ($n \in \mathbb{N}$). Τότε, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι ο (ανοικτός) δίσκος $\Delta(z, r := \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$ περιέχεται στο K_{n+1} , άρα $K_n \subset \text{int}(K_{n+1})$, ($\forall n \in \mathbb{N}$). Έπεται βέβαια ότι $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ και ιδιαίτερα $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{int}(K_n)$, δηλ. το σύνολο $\{\text{int}(K_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ αποτελεί ανοικτή καλυψη του Ω . Επομένως, αν K συμπαγές υποσύνολο του Ω , θα υπάρχει ένα $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$K \subset \bigcup_{j=1}^N \text{int}(K_j).$$

Συνεπώς, $K \subset K_N$. Τέλος, για το (iii), έχουμε:

$$\overline{\mathbb{C}} \setminus K_n := V_n = \{\infty\} \cup \bigcup_{a \in \mathbb{C} \setminus \Omega} \Delta(a, \frac{1}{n}) \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| > n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Κάθε μη φραγμένη συνεκτική συνιστώσα του $V_n \supset \overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ περιέχει το ∞ , άρα, περιέχει τη συνεκτική συνιστώσα του $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ η οποία περιέχει το ∞ . Επίσης, η μη φραγμένη συνεκτική συνιστώσα του V_n περιέχει το (μη φραγμένο συνεκτικό) σύνολο $\{z \in \mathbb{C} : |z| > n\}$. Άρα, αν H μια φραγμένη συνεκτική συνιστώσα του V_n , τότε αυτή περιέχει ένα σημείο z τέτοιο ώστε να υπάρχει ένα $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ τέτοιο ώστε $|z - a| < \frac{1}{n}$. Όμως τότε, $z \in \Delta(a, \frac{1}{n}) \subset V_n$ και αφού οι δίσκοι είναι συνεκτικά σύνολα και αφού το z βρίσκεται στη συνεκτική συνιστώσα H του V_n , έπεται ότι $\Delta(a, \frac{1}{n}) \subset H$. Αν H_1 είναι η συνεκτική συνιστώσα του $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ η οποία περιέχει το a , έπεται ότι $H_1 \subset H$.

Θεώρημα 2.2.3 (Runge-2η Μορφή) Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}$ ανοικτό. Έστω επίσης η ακολουθία $\{K_n\}$ της πιο πάνω πρότασης. Τότε, ισχύει ότι κάθε συνάρτηση f ολόμορφη σε περιοχή του εκάστοτε K_j μπορεί να προσεγγισθεί ομοιόμορφα πάνω στο K_j από ολόμορφες συναρτήσεις σε ολόκληρο το Ω .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε ένα σύνολο $A \subset \mathbb{C} \setminus \Omega$ το οποίο να περιέχει ένα σημείο από κάθε φραγμένη συνεκτική συνιστώσα του $A \subset \mathbb{C} \setminus \Omega$. Τότε, το A θα τέμνει κάθε φραγμένη

συνεκτική συνιστώσα του $A \subset \mathbb{C} \setminus K_j$ και επομένως, από το Θεώρημα του Runge, έπεται ότι κάθε συνάρτηση f ολόμορφη σε μια περιοχή του K_j θα προσεγγίζεται ομοιόμορφα (στο K_j) από ρητές συναρτήσεις των οποίων οι πόλοι είναι στο σύνολο A μόνο. Όμως, οι ρητές αυτές συναρτήσεις είναι ολόμορφες στο Ω και το ζητούμενο έπεται.

Θεώρημα 2.2.4 (Runge-Κλασική Μορφή) Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}$ ανοικτό και S ένα σύνολο το οποίο να περιέχει ένα σημείο από κάθε συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Τότε, για κάθε συνάρτηση $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ υπάρχει ακολουθία ρητών συναρτήσεων $\{R_n\}$ με πόλους μόνο στο S τέτοια ώστε $R_n \xrightarrow{n} f$ στα συμπαγή υποσύνολα του Ω .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε την ακολουθία K_n των συμπαγών συνόλων όπως πριν. Τότε, από το Προσεγγιστικό Θεώρημα του Runge, υπάρχει για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μια ρητή συνάρτηση R_n της οποίας οι πόλοι ευρίσκονται στο S και τέτοια ώστε

$$|f(z) - R_n(z)| < \frac{1}{n}, \text{ στο } K_n.$$

Τότε, για κάθε K συμπαγές υποσύνολο του Ω , το K περιέχεται σε κάποιο K_n , για n αρκετά μεγάλο και έτσι ώστε $R_n \xrightarrow{n} f$ στα συμπαγή υποσύνολα του Ω .

Θεώρημα 2.2.5 Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}$ ανοικτό. Τότε, το σύνολο $\mathbb{C} \setminus \Omega$ είναι συνεκτικό αν και μόνο αν για κάθε $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $\{R_n\}$ η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στα συμπαγή υποσύνολα του Ω .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Από την ιδιότητα (iii) των συνόλων K_n , έχουμε ότι κάθε συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C} \setminus K_n$ περιέχει μια συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C} \setminus \Omega$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, αν το Ω είναι απλά συνεκτικό (δηλ. το $\mathbb{C} \setminus \Omega$ είναι απλά συνεκτικό), τότε το $\mathbb{C} \setminus K_n$ είναι απλά συνεκτικό $\forall n \in \mathbb{N}$. Άρα, από το προηγούμενο Θεώρημα, η ακολουθία R_n μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι ακολουθία πολυωνύμων. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι για κάθε $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $\{R_n\}$ η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στα συμπαγή υποσύνολα του Ω . Αν γ είναι μια κλειστή καμπύλη στο Ω , τότε, $\int_{\gamma} P_n(z) dz = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, άρα, $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$, αφού το $[\gamma]$ είναι συμπαγές. ■

Παρατήρηση Στην απόδειξη (και των τριών μορφών) του Προσεγγιστικού Θεωρήματος του Runge, χρησιμοποιήσαμε την υπόθεση ότι η f είναι ολόμορφη σε περιοχή του K για να μπορούμε να πάρουμε την κλειστή καμπύλη γ . Το ερώτημα που προκύπτει λοιπόν είναι κατά πόσον οι αναγκαίες συνθήκες

(i) η f να είναι συνεχής στο K και

(ii) η f να είναι ολόμορφη στο εσωτερικό του K

αρκούν για να έχουμε πολυωνυμική προσέγγιση στο K . Η απάντηση είναι καταφατική στην περίπτωση που το $\mathbb{C} \setminus K$ έχει πεπερασμένες το πλήθος συνεκτικές συνιστώσες, όπως απέδειξε ο Mergelyan το 1952.

2.3 Το Θεώρημα του Mittag-Leffler

Έχοντας αποδείξει το Θεώρημα του Runge, θα δούμε πως κατασκευάζουμε μερόμορφες συναρτήσεις με πόλους ένα προκαθορισμένο σύνολο, δηλ.

αν $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $A := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ διακριτό στο Ω (δηλ. χωρίς κανένα σημείο συσσώρευσης στο Ω) και $\{m_n\}$ μια ακολουθία θετικών ακεραίων αριθμών, τότε, απ'το Θεώρημα του Weierstrass (για τυχαία ανοικτά), παίρνοντας $g := 1/f$, έχουμε ότι αυτή θα έχει πόλους στα σημεία a_n με αντίστοιχες πολλαπλότητες m_n , δηλ. η g είναι μερόμορφη στο Ω . Το Θεώρημα του Mittag-Leffler μας λέει ότι μπορούμε να προσδιορίσουμε τους συντελεστές του κυρίου μέρους του πόλου a_n , $\forall n \in \mathbb{N}$. Επίσης, θα δούμε ένα πρόβλημα παρεμβολής συνδυάζοντας τα Θεωρήματα των Weierstrass και Mittag-Leffler. Υπενθύμιση: Μια συνάρτηση f λέγεται μερόμορφη σε ένα ανοικτό σύνολο Ω αν υπάρχει ένα σύνολο $A \subset \Omega$ τέτοιο ώστε το A να μην έχει σημεία συσσώρευσης στο Ω , η $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus A)$ και η f να έχει ως πόλους τα σημεία του A . Γράφουμε $f \in \mathcal{M}(\Omega)$. Δηλ. $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ και $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{a_1, a_2, \dots\})$.

Παρατήρηση Η απόδειξη που θα δούμε παρακάτω χρησιμοποιεί την εξάντληση των ανοικτών συνόλων μέσω της ακολουθίας των (συμπαγών) συνόλων K_n που κατασκευάσαμε για την απόδειξη της 2ης μορφής του Θεωρήματος του Runge. Πριν από την απόδειξη, ας δούμε την ιδέα που βρίσκεται πίσω απ'το Θεώρημα αυτό:

Αν η f έχει πόλο τάξης m στο z_0 , τότε το ανάπτυγμά της σε σειρά Laurent είναι

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \dots$$

Καλούμε κύριο μέρος του πόλου (της f τάξης m στο σημείο z_0) την παράσταση

$$\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0}.$$

Τώρα, έστω $A := \{z_n\}_n$ ένα (διακριτό) σύνολο τέτοιο ώστε $|z_n| \rightarrow \infty$. Έστω επίσης μια ακολουθία πολυωνύμων $\{\Pi_n\}_n$ χωρίς σταθερό όρο. Τότε, μπορούμε να προσεγγίσουμε τα πολυώνυμα $\Pi_n \left(\frac{1}{z-z_n} \right)$ με μια ακολουθία πολυωνύμων (Q_n) , *ομοιόμορφα στα συμπαγή σύνολα που δεν περιέχουν τα σημεία z_n* : μια τέτοια ακολουθία βρίσκεται απ'το Προσεγγιστικό Θεώρημα του Runge. Δηλ. υπάρχει μερόμορφη συνάρτηση f με πόλους τα σημεία z_n και κύριο μέρος $\Pi_n(1/z - z_n)$. Μια τέτοια f είναι της μορφής

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\Pi_n \left(\frac{1}{z-z_n} \right) - Q_n(z) \right],$$

ή, γενικότερα,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\Pi_n \left(\frac{1}{z-z_n} \right) - Q_n(z) \right] + h(z),$$

όπου h μια αέραια συνάρτηση και η πιο πάνω σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα (και απόλυτα) στα συμπαγή σύνολα που δεν περιέχουν τα σημεία z_n .

Θεώρημα 2.3.1 (Mittag-Leffler) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $A \subset \Omega$ χωρίς κανένα σημείο συσσώρευσης στο Ω . Για κάθε $a \in A$ αντιστοιχούμε ένα θετικό ακέραιο $m(a)$ και μια ρητή συνάρτηση

$$P_a(z) = \sum_{j=1}^{m(a)} \frac{c_{j,a}}{(z-a)^j} = \frac{c_{1,a}}{z-a} + \frac{c_{2,a}}{(z-a)^2} + \dots + \frac{c_{m(a),a}}{(z-a)^{m(a)}}.$$

Τότε, υπάρχει μια μερόμορφη συνάρτηση f στο Ω τέτοια ώστε η f να έχει ως πόλους ακριβώς τα $a \in A$ με αντίστοιχο κύριο μέρος το P_a .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε την ακολουθία $\{K_n\}$ των συμπαγών υποσυνόλων (2.5). Θυμόμαστε ότι τα K_n έχουν την ιδιότητα ότι $K_n \subset \text{int}(K_{n+1})$ και $\cup_{n \in \mathbb{N}} K_n = \Omega$. Επιπλέον, κάθε συνεκτική συνιστώσα του $\overline{\mathbb{C}} \setminus K_n$ περιέχει μια συνεκτική συνιστώσα του $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ και συγκεκριμένα το $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ τέμνει κάθε συνεκτική συνιστώσα του $\overline{\mathbb{C}} \setminus K_n$. Θέτουμε $A_1 = A \cap K_1$, και για $n \geq 2$, $A_n = A \cap (K_n \setminus K_{n-1})$.

Αφού $A_n \subset K_n$, και το A δεν έχει σημεία συσσώρευσης στο Ω , έπεται ότι το A_n δεν έχει σημεία συσσώρευσης ούτε στο K_n . Συνεπώς τα A_n είναι πεπερασμένα, $\forall n \in \mathbb{N}$. Επίσης, $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A$.

[Ουσιαστικά, κάθε K_n περιέχει πεπερασμένα το πλήθος στοιχεία του A].

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$Q_n(z) = \sum_{a \in A_n} P_a(z).$$

$[Q_n = 0, \text{ αν } A_n = \emptyset]$.

Αφού το A_n είναι πεπερασμένο, $\forall n \in \mathbb{N}$, έπεται ότι κάθε Q_n είναι μια ρητή συνάρτηση της οποίας οι πόλοι ευρίσκονται στο $A_n = A \cap (K_n \setminus K_{n-1}) \subset K_n \setminus K_{n-1}$ και άρα είναι μια ολόμορφη συνάρτηση σε μια περιοχή του K_{n-1} (π.χ. στο σύνολο $\text{int}(K_{n-1}) \setminus A_n$). Επομένως, απ' το Προσεγγιστικό Θεώρημα του Runge για $S = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$, υπάρχει μια ακολουθία ρητών συναρτήσεων $\{R_n\}$ με πόλους στο $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$, τέτοια ώστε

$$|Q_n(z) - R_n(z)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad z \in K_{n-1} \quad (n \geq 2). \quad (2.6)$$

Η συνάρτηση που ικανοποιεί τις ζητούμενες ιδιότητες είναι τότε η $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ με

$$f(z) = Q_1(z) + \sum_{n=2}^{\infty} [Q_n(z) - R_n(z)].$$

Θα πρέπει να δείξουμε ότι $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ και οι πόλοι της είναι ακριβώς τα σημεία $a \in A$ με αντίστοιχο κύριο μέρος τα P_a :

(i) $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus A)$:

Θα δείξουμε ότι η f συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $\Omega \setminus A$ και το συμπέρασμα θα έπεται από το Θεώρημα ομοιόμορφης Σύγκλισης του Weierstrass: Έστω K ένα συμπαγές υποσύνολο του $\Omega \setminus A$. Αφού K συμπαγές, έπεται ότι υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $K \subset K_N$ (από την ιδιότητα (ii) των συνόλων K_n). Τότε, $\forall n \geq N$, από τη σχέση (2.6) έχουμε ότι

$$|Q_n(z) - R_n(z)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad z \in K.$$

Επομένως,

$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} [Q_n(z) - R_n(z)] \right| \leq \sum_{n=N}^{\infty} |Q_n(z) - R_n(z)| \leq \sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n < \infty.$$

Άρα, από το Κριτήριο Ομοιόμορφης Σύγκλισης του Weierstrass η σειρά $\sum_{n=N}^{\infty} [Q_n(z) - R_n(z)]$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο K , άρα και η $Q_1(z) + \sum_{n=2}^{\infty} [Q_n(z) - R_n(z)]$, δηλ. η f και το συμπέρασμα έπεται.

(ii) Έστω $a \in A$. Τότε, $\forall a_j \in A, (a \neq a_j) f(z) = P_a(z) + h(z)$, όπου $h \in \mathcal{O}(\varpi(a_j))$, άρα η f έχει πόλο στο a_j με αντίστοιχο κύριο μέρος P_a : αφού το A δεν έχει σημεία συσσώρευσης στο Ω , θα υπάρχει $R > 0$ τέτοιος ώστε $|a - a_j| > R$, για $a \neq a_j$, συνεπώς, $f(z) = P_a(z) + h(z)$, για $z \in \Delta(a_j, R)$, όπου $g \in \mathcal{O}(\Delta(a_j, R))$ και το συμπέρασμα έπεται.

2.3.1 Ένα πρόβλημα παρεμβολής

Παρατήρηση Έστω $f \in \mathcal{O}(\varpi(\{a\}))$, όπου $a \in \mathbb{C}$ και έστω ότι η f έχει ρίζα τάξης $m \geq 1$ στο σημείο a . Έστωσαν επίσης μιγαδικοί αριθμοί $c_1, c_2, \dots, c_m$ και η ρητή συνάρτηση $R: \mathbb{C} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ με

$$z \mapsto R(z) := \frac{1}{z-a} + \frac{1}{(z-a)^2} + \dots + \frac{1}{(z-a)^m}.$$

Τότε, η $f \cdot R$ έχει επουσιώδη ανωμαλία στο a και άρα, υπάρχουν μιγαδικοί αριθμοί $a_0, a_1, a_2, \dots$ τέτοιοι ώστε για $z \in \varpi(\{a\})$, να είναι

$$f(z) \cdot R(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots + a_{m-1}(z-a)^{m-1} + \dots \quad (2.7)$$

Επιπλέον, γράφοντας το ανάπτυγμα Taylor της f

$$f(z) = b_0(z-a)^m + b_1(z-a)^{m+1} + \dots + b_{m-1}(z-a)^{2m-1} + \dots, \quad (2.8)$$

τότε θα πρέπει οι συντελεστές $a_0, a_1, a_2, \dots$ της $f \cdot R$ να ικανοποιούν το σύστημα:

$$a_0 = b_0 c_m$$

$$a_1 = b_0 c_{m-1} + b_1 c_m$$

$$\vdots$$

$$a_{m-1} = b_0 c_1 + b_1 c_2 + \dots + b_{m-1} c_m,$$

δηλ. δωθέντων $c_1, c_2, \dots, c_m$, τότε οι αριθμοί $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$ καθορίζονται από το πιο πάνω σύστημα. Αντιστρόφως, αν μας δίνονται f και $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$ όπως πιο πάνω, τότε, αφού $b_0 \neq 0$, τότε, λύνοντας το πιο πάνω σύστημα παίρνουμε τους $c_m, c_{m-1}, \dots, c_1$.

Η παρατήρηση αυτή θα μας βοηθήσει να αποδείξουμε το επόμενο Θεώρημα, το οποίο ουσιαστικά λέει ότι μπορούμε όχι μόνο να κατασκευάσουμε ολόμορφες συναρτήσεις με προκαθορισμένες ρίζες και τάξεις αυτών όπως στο Θεώρημα του Weierstrass αλλά μπορούμε να καθορίσουμε τις τιμές της f και των παραγώγων της μέχρι μιας (πεπερασμένης) τάξης κατά τετριμμένο τρόπο:

Πόρισμα 2.3.1 Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, A ένα (αριθμήσιμο) υποσύνολο του Ω , χωρίς κανένα σημείο συσσώρευσης μέσα στο Ω , έστω $A := \{a_1, a_2, \dots\}$. Για κάθε $a_j \in A$ αντιστοιχούμε ένα θετικό ακέραιο αριθμό m_j και μιγαδικούς αριθμούς $a_{0,j}, a_{1,j}, \dots, a_{m_j,j}$. Τότε, υπάρχει $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ τέτοια ώστε

$$f^{(k)}(a_j) = k!a_{k,j}, \quad 0 \leq k \leq m_j.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Από το Θεώρημα (2.1.2), μπορούμε να βρούμε μια συνάρτηση $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ τέτοια ώστε το σύνολο των ριζών της να είναι ακριβώς το A και για κάθε $j \in \mathbb{N}$, ο βαθμός πολλαπλότητας $m(g, a_j) \equiv m(a_j)$ του a_j να είναι $m_j + 1$. Τότε, όπως στην προηγούμενη παρατήρηση, βρίσκουμε, για κάθε a_j , μιγαδικούς αριθμούς $c_{1,j}, c_{2,j}, \dots, c_{m(a_j),j}$ τέτοιους ώστε

$$g(z) \cdot \sum_{k=1}^{m(a_j)} \frac{c_{k,j}}{(z - a_j)^k} = a_{0,j} + a_{1,j}(z - a_j) + \dots + a_{m_j,j}(z - a_j)^{m_j} + \dots,$$

για z αρκετά κοντά στο a_j . Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Mittag-Leffler, παίρνουμε μια μερόμορφη συνάρτηση h στο Ω τέτοια ώστε για κάθε j , η

$$h(z) - g(z) = h(z) - \sum_{k=1}^{m(a_j)} \frac{c_{k,j}}{(z - a_j)^k}$$

έχει επουσιώδη ανωμαλία στο a_j , $j \in \mathbb{N}$, δηλ. η h έχει κύρια μέρη τα $\sum_{k=1}^{m(a_j)} \frac{c_{k,j}}{(z - a_j)^k}$. Τότε, για την $f := g \cdot h$ έχουμε οτι

$$\begin{aligned} f(z) &= g(z) \cdot h(z) = g(z) \left(h(z) - \sum_{k=1}^{m(a_j)} \frac{c_{k,j}}{(z - a_j)^k} \right) + g(z) \sum_{k=1}^{m(a_j)} \frac{c_{k,j}}{(z - a_j)^k} \\ &= g(z) \left(h(z) - \sum_{k=1}^{m(a_j)} \frac{c_{k,j}}{(z - a_j)^k} \right) + a_{0,j} + a_{1,j}(z - a_j) + \dots + \\ &\quad + a_{m_j,j}(z - a_j)^{m_j} + \dots \\ \Rightarrow f^{(k)}(a_j) &= k!a_{k,j}, \quad 0 \leq k \leq m_j. \end{aligned}$$

2.4 Συναρτήσεις με φυσικό σύνορο

Ορισμός 2.4.1 Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και έστω $f \in \mathcal{O}(U)$. Το σύνορο ∂U του U λέγεται οτι είναι το φυσικό σύνορο της f αν αυτή δε δύναται να επεκταθεί σε ολόμορφη συνάρτηση πέραν από κανένα σημείο του συνόρου της. Δηλ. για κάθε V, W ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{C}$, τέτοια ώστε $\emptyset \neq V \subset W \cap U \neq W$ και W συνεκτικό, δεν υπάρχει $\tilde{f} \in \mathcal{O}(W)$ τέτοια ώστε $\tilde{f}|_D = f$.

Είδαμε στα προηγούμενα οτι δοθέντος ενός $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτού, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια $f \in \mathcal{O}(U)$ τέτοια ώστε η f να είναι ολόμορφη μόνον στο U , δηλ. το ∂U να είναι το φυσικό σύνορο της f . Η κατασκευή αυτή γίνεται θεωρώντας το ανάπτυγμα της f σε δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης (ακριβώς) την $\text{dist}(a, \partial U)$, $a \in U$.

Κεφάλαιο 3

Διαφορικές Μορφές

Η μελέτη των Μιγαδικών Πολυπτυγμάτων (τύπου $\mathbb{C}^n$) απαιτεί γνώση ενός βασικού εργαλείου, αυτού των Διαφορικών Μορφών, αντικείμενο το οποίο μας επιτρέπει να ορίσουμε ολοκλήρωση σε αυτά. Για το σκοπό αυτό, θα αναλύσουμε (στο σημείο που μας χρειάζεται) τη βασική θεωρία των Διαφορικών Μορφών στο $\mathbb{R}^n$, ακολουθώντας θα δούμε αναλυτικά τη συμπεριφορά τους στο $\mathbb{C}$ περνώντας από τα dx, dy στα $dz, d\bar{z}$ καταλήγοντας στο $\mathbb{C}^n$.

3.1 Διαφορικές Μορφές

Σκοπός των Διαφορικών Μορφών είναι ο ορισμός ολοκλήρωσης σε πολυπτώγματα, τα οποία είναι αφηρημένα αντικείμενα. Τα πολυπτώγματα "μοιάζουν" (τοπικά) με Ευκλείδειους χώρους (δηλ. κάθε περιοχή ενός σημείου στο πολύπτυγμα απεικονίζεται ομοιομορφικά σε ανοικτά υποσύνολα ενός Ευκλείδειου χώρου) και έτσι οι διάφορες έννοιες αποκτούν νόημα, όπως είναι η έννοια της παραγώγισης. Όταν ορίσουμε την έννοια της Διαφορικής Μορφής σε Πολύπτυγμα, θα δούμε ότι αυτή έχει τοπική έκφραση σε συντεταγμένες και ακριβώς αυτή η έκφρασή της μας επιτρέπει να κάνουμε υπολογισμούς στο πολύπτυγμα (συγκεκριμένα ολοκλήρωση). Για το σκοπό αυτό θα ορίσουμε τις Διαφορικές Μορφές στο $\mathbb{R}^n$ ως k -γραμμικές αντισυμμετρικές απεικονίσεις παρατηρώντας ότι ουσιαστικά τα αντικείμενα αυτά είναι η ορίζουσα. Αυτό είναι τελείως φυσιολογικό αν αναλογιστεί κανείς ότι η ορίζουσα εκφράζει εμβαδόν/όγκο και προσανατολισμό. Ας κάνουμε λοιπόν τη σύνδεση με τα ήδη γνωστά πράγματα:

Έστω $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ μια C^∞ και 1-1 απεικόνιση ($U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό). Έστω $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Κάνοντας την αντικατάσταση $(v_1, \dots, v_n) = \varphi(u_1, \dots, u_n)$, δηλ.

$$\begin{aligned}v_1 &= \varphi_1(u_1, \dots, u_n) \\v_2 &= \varphi_2(u_1, \dots, u_n) \\&\vdots \\v_n &= \varphi_n(u_1, \dots, u_n)\end{aligned}$$

έχουμε

$$dv_1 \cdots dv_n = |\det(J(\varphi)(u_1, \dots, u_n))| du_1 \cdots du_n,$$

όπου

$$\det(J(\varphi)(u_1, \dots, u_n)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}.$$

Η τελευταία σχέση εκφράζει τη σύνδεση που έχουν τα δύο **στοιχεία εμβαδού** μεταξύ τους. Αυτό είναι ο ακρογωνιαίος λίθος στο Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών στις πολλές μεταβλητές. ανάλογο θα δούμε στα πολυπύγματα που εκεί έχουμε παραγωγή με τη βοήθεια της έννοιας του διαφορίσιμου διανυσματικού πεδίου, αφηρημένο αντικείμενο το οποίο αποκτά νόημα όταν εκφραστεί τοπικά με συντεταγμένες.

Θεώρημα 3.1.1 [Θεώρημα Αλληλαγής Μεταβλητών στο Ολοκλήρωμα στο $\mathbb{R}^n$] Έστω U ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n(U)$ μια C^1 και 1-1 συνάρτηση ($\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$) για την οποία ισχύει $\det(J(\varphi)_p) \neq 0 \ \forall p \in U$. Τότε, για κάθε συνεχή συνάρτηση f με πραγματικές τιμές και τέτοια ώστε $\text{supp}(f) \subset \varphi(U)$, και $\text{supp}(f)$ συμπαγές, ισχύει

$$\int_U f(\varphi(\mathbf{x})) |\det(J(\varphi)(\mathbf{x}))| d\mathbf{x} = \int_{\varphi(U)} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (3.1)$$

Γεωμετρική Ερμηνεία της Ιακωβιανής Ορίζουσας στον τύπο του ανωτέρω Θεωρήματος Έστω φ συνάρτηση όπως στο Θεώρημα και έστω $p \in U$. Τότε, για την ορίζουσα (του μετασχηματισμού φ) $\det(J(\varphi)) := \det \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$ ισχύει

$|\det(J(\varphi)(p))| = \lim_{p \in U, \text{diam}(U) \rightarrow 0} \frac{\text{Vol}(\varphi(U))}{\text{Vol}(U)}$, δηλ. ο αριθμός $|\det(J(\varphi)(p))|$ είναι ο "στοιχειώδης" παράγοντας με τον οποίο πολλαπλασιάζεται ο όγκος ενός χωρίου σε μια περιοχή του σημείου p (στοιχειώδης υπό την έννοια της απειροστής μεταβολής: το ολοκλήρωμα λαμβάνεται ως όριο αθροισμάτων) όταν δράσει ο μετασχηματισμός φ . Με άλλα λόγια, για απειροελάχιστο σύνολο U ($p \in U$) έχουμε $\text{Vol}(\varphi(U)) \approx |\det(J(\varphi)(p))| \times \text{Vol}(U)$. Τώρα, για το πρόσημο του αριθμού $\det(J(\varphi)(p))$, ισχύει $\det(J(\varphi)(p)) > 0$ αν ο μετασχηματισμός φ διατηρεί τον προσανατολισμό ενώ $\det(J(\varphi)(p)) < 0$, ο φ αντιστρέφει τον προσανατολισμό. Παίρνουμε απόλυτο στην τιμή της $\det(J(\varphi)(p)) > 0$ γιατί δεν μας ενδιαφέρει ο προσανατολισμός.

Θέλουμε ένα παρόμοιο Θεώρημα όταν έχουμε μια (διαφορίσιμη) συνάρτηση μεταξύ πολυπυγμάτων. Εκεί όμως μας ενδιαφέρει ο προσανατολισμός και γιαυτό το σκοπό εισάγουμε την έννοια της Διαφορική Μορφής. Το ανώτερο Θεώρημα θα παίξει κυρίαρχο ρόλο όταν ορίσουμε ολοκλήρωση στις Δ.Μ. καθώς η τοπική παράσταση της απεικόνισης είναι απεικόνιση μεταξύ Ευκλειδείων χώρων (το ανώτερο Θεώρημα θα μας εγγυηθεί ουσιαστικά το καλά ορισμένο του ολοκληρώματος).

Προτού δώσουμε τους ορισμούς των αντισυμμετρικών μορφών, αναφέρουμε ένα Θεώρημα της γραμμικής Άλγεβρας, το οποίο φανερώνει τη σχέση της ορίζουσας με τις εναλλάσσουσες (αντισυμμετρικές) μορφές:

Ορισμός 3.1.1 Έστω $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Η φ θα λέγεται k -γραμμική αν αυτή είναι γραμμική ως προς κάθε μεταβλητή χωριστά, δηλ.

$$\begin{aligned} \varphi(u_1, \dots, u_{i-1}, \lambda u_i + v, u_{i+1}, \dots, u_k) &= \lambda \varphi(u_1, \dots, u_i, \dots, u_k) + \\ &+ \varphi(u_1, \dots, u_{i-1}, v, u_{i+1}, \dots, u_k), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Η φ θα λέγεται εναλλιάσσοια αν

$$\varphi(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_k) = -\varphi(u_1, \dots, u_i, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_k), \quad \forall u_i \in \mathbb{R}^n.$$

Θεώρημα 3.1.2 Έστω $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μια k -γραμμική εναλλιάσσοια απεικόνιση. Τότε, η φ έχει τις ίδιες ιδιότητες με την απεικόνιση ορίζουσα, δηλ.

1. Αν $u_i = u_j$ για κάποια i, j , $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, τότε $\varphi(u_1, \dots, u_k) = 0$. Ομοίως, αν $u_i = \lambda u_j$, ($\lambda \in \mathbb{R}$), για κάποια i, j , $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, τότε $\varphi(u_1, \dots, u_k) = 0$.
2. $\varphi(u_1, \dots, u_{i-1}, \lambda u_i + v, u_{i+1}, \dots, u_k) = \lambda \varphi(u_1, \dots, u_i, \dots, u_k) + \varphi(u_1, \dots, u_{i-1}, v, u_{i+1}, \dots, u_k)$.
3. Αν $\sigma : \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ 1-1 και επί (δηλ. σ μια μετάθεση), τότε $\varphi(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(k)}) = \text{sign}(\sigma) \varphi(u_1, \dots, u_k)$.

Ορισμός 3.1.2 Διανυσματικό πεδίο στον $\mathbb{R}^n$ είναι μια απεικόνιση u η οποία αντιστοιχεί σε κάθε σημείο $p \in \mathbb{R}^n$ ένα διάνυσμα $u(p) \in T_p \mathbb{R}^n$, δηλ.

$$u : \mathbb{R}^n \rightarrow T\mathbb{R}^n = \bigsqcup_{p \in \mathbb{R}^n} T_p \mathbb{R}^n = \bigcup_{p \in \mathbb{R}^n} \{p\} \times T_p \mathbb{R}^n.$$

Σε κάθε $p \in \mathbb{R}^n$ έχουμε ένα διάνυσμα $u(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) e_i$, όπου $a_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$. Αν οι συναρτήσεις a_i είναι C^∞ , τότε το u λέγεται διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο.

Παρατήρηση: Αφού $(\forall p \in \mathbb{R}^n)$, $T_p \mathbb{R}^n = \text{span}\{\frac{\partial}{\partial x_i}|_p : 1 \leq i \leq n\}$ έχουμε ότι κάθε διανυσματικό πεδίο u (στο p) γράφεται ως $u(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}|_p$. Λόγω του ότι $T_p \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$ οι δύο εκφράσεις συμπίπτουν.

Ο Δυϊκός του εφαπτόμενου χώρου Έστω $p \in \mathbb{R}^n$. Ο χώρος

$$(T_p \mathbb{R}^n)^* := \{\varphi : T_p \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : \varphi \text{ γραμμική}\}$$

λέγεται ο δυϊκός του $T_p \mathbb{R}^n$. Θα κατασκευάσουμε μια βάση του χώρου αυτού:

Έστω $x_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ με $u = (u_1, \dots, u_n) \mapsto u_i$, $1 \leq i \leq n$, δηλ. x_i η προβολή στην i -συντεταγμένη. Ορίζουμε $(dx_i)_p : T_p \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ με $(dx_i)_p(e_j) := \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{i,j}$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Δηλ. αν u ένα διανυσματικό πεδίο στον $\mathbb{R}^n$, έστω $u(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) e_i$, τότε

$$(dx_i)_p(u(p)) = \sum_{j=1}^n a_j(p) \delta_{i,j}.$$

Συνεπώς, το $(dx_i)_p$ δίνει την i -συνιστώσα του u . Είναι φανερό ότι αν $\varphi \in (T_p \mathbb{R}^n)^*$, τότε $\varphi(e_i) = (dx_i)_p(e_i) = 1$, δηλ. τα $(dx_i)_p$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ αποτελούν βάση για τον $(T_p \mathbb{R}^n)^*$, άρα

$$(T_p \mathbb{R}^n)^* = \text{span}\{(dx_i)_p : 1 \leq i \leq n\}. \quad (3.2)$$

Ορισμός 3.1.3 Μια απεικόνιση $\omega : \mathbb{R}^3 \rightarrow \bigsqcup_{p \in \mathbb{R}^n} (T_p \mathbb{R}^n)^* \equiv (T\mathbb{R}^n)^*$ με $p \mapsto \omega_p \in (T_p \mathbb{R}^n)^*$ λέγεται *Γραμμική Μορφή τάξης 1*. Από την (3.2), έχουμε ότι $\omega_p = \sum_{i=1}^n a_i(p)(dx_i)_p$, όπου $a_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$. Αν οι a_i είναι C^∞ , τότε η ω λέγεται *Διαφορική Μορφή τάξης 1*.

Ακολούθως θα κατασκευάσουμε μια δι-γραμμική εναλλάσσουσα μορφή από δύο γραμμικές εναλλάσσουσες μορφές. Το εργαλείο που θα μας βοηθήσει στην κατασκευή αυτή είναι η ορίζουσα. Έστω λοιπόν $p \in \mathbb{R}^n$ και $\varphi_1, \varphi_2 \in (T_p \mathbb{R}^n)^*$. Τότε παίρνουμε μια εναλλάσσουσα δι-γραμμική μορφή $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ ως εξής:

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)(u_1, u_2) = \det(\varphi_i(u_j))_{i,j=1,2} = \begin{vmatrix} \varphi_1(u_1) & \varphi_1(u_2) \\ \varphi_2(u_1) & \varphi_2(u_2) \end{vmatrix},$$

για $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n$. Το Θεώρημα (3.1.2) δικαιολογεί το ότι το στοιχείο $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ αποτελεί μια εναλλάσσουσα δι-γραμμική μορφή. Στα στοιχεία της βάσης του $(T_p \mathbb{R}^n)^*$, έχουμε

$$\begin{aligned} ((dx_i)_p \wedge (dx_j)_p)(u_1, u_2) &= \det((dx_i)_p(u_j))_{i,j=1,2} = \begin{vmatrix} (dx_1)_p(u_1) & (dx_1)_p(u_2) \\ (dx_2)_p(u_1) & (dx_2)_p(u_2) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} u_1^1 & u_2^1 \\ u_1^2 & u_2^2 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

όπου $u_1 = (u_1^1, \dots, u_1^n)$, $u_2 = (u_2^1, \dots, u_2^n) \in \mathbb{R}^n$. Συμβολίζουμε με

$$\bigwedge^2((T_p \mathbb{R}^n)^*) = \{\varphi : (T_p \mathbb{R}^n)^* \times (T_p \mathbb{R}^n)^* \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \text{ δι-γραμμική, εναλλάσσουσα}\}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$((dx_i)_p \wedge (dx_j)_p) \equiv (dx_i \wedge dx_j)_p = -(dx_j \wedge dx_i)_p, \quad i \neq j$$

και

$$(dx_i \wedge dx_i)_p = 0.$$

Από τα πιο πάνω είναι φανερό ότι

$$\bigwedge^2((T_p \mathbb{R}^n)^*) = \text{span}\{((dx_i)_p \wedge (dx_j)_p) : 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Ορισμός 3.1.4 Δι-γραμμική Εναλλάσσουσα Μορφή (ή μορφή τάξης 2) στο $\mathbb{R}^n$ είναι μια αντιστοιχία ω σε κάθε $p \in \mathbb{R}^n$ ενός $\omega_p \in \bigwedge^2((T_p \mathbb{R}^n)^*)$, δηλ. $p \mapsto \omega_p$ με $\omega_p = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j}(p)(dx_i \wedge dx_j)_p$, όπου $a_{i,j} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Αν οι $a_{i,j}$ είναι C^∞ , τότε η ω λέγεται *Διαφορική Μορφή τάξης 2*.

Συμβολισμός: $\Omega^1(\mathbb{R}^n) =$ ο χώρος των Διαφορικών Μορφών τάξης 1 και $\Omega^2(\mathbb{R}^n) =$ ο χώρος των Διαφορικών Μορφών τάξης 2.

Τέλος, θα κατασκευάσουμε επαγωγικά k -γραμμικές εναλλάσσουσες μορφές. Έστω $p \in \mathbb{R}^n$ και $\varphi_i \in (T_p \mathbb{R}^n)^*$, $1 \leq i \leq k$. Τότε παίρνουμε μια εναλλάσσουσα k -γραμμική μορφή $\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge (\dots \wedge \varphi_k) \dots)$ ως εξής:

$$\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge (\dots \wedge \varphi_k) \dots)(u_1, \dots, u_k) = \det(\varphi_i(u_j))_{i,j=1,\dots,k}$$

$$= \begin{vmatrix} \varphi_1(u_1) & \varphi_1(u_2) & \dots & \varphi_1(u_k) \\ \varphi_2(u_1) & \varphi_2(u_2) & \dots & \varphi_2(u_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_k(u_1) & \varphi_k(u_2) & \dots & \varphi_k(u_k) \end{vmatrix},$$

για $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^n$.

$$\bigwedge^k((T_p \mathbb{R}^n)^*) = \{\varphi : (T_p \mathbb{R}^n)^* \times \dots \times (T_p \mathbb{R}^n)^* \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \text{ } k\text{-γραμμική, εναλλάσσουσα}\}.$$

Ομοίως,

$$\bigwedge^k((T_p \mathbb{R}^n)^*) = \text{span}\{(dx_{i_1})_p \wedge \dots \wedge (dx_{i_k})_p : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n.\}.$$

Συμβολίζουμε με $\Omega^k(\mathbb{R}^n)$ το χώρο των Διαφορικών Μορφών τάξης k .

Πρόταση 3.1.1 $\dim\left(\bigwedge^k((T_p \mathbb{R}^n)^*)\right) = \binom{n}{k}.$

Πρόταση 3.1.2 Για $k > n$ ισχύει $\bigwedge^k((T_p \mathbb{R}^n)^*) = \{0\}.$

Παρατήρηση: Αντί του $\mathbb{R}^n$, μπορούμε να πάρουμε ένα $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό.

Θα δούμε τώρα πως από δύο Διαφορικές Μορφές παίρνουμε μια καινούργια:

Ορισμός 3.1.5 Έστω $\omega_1 \in \Omega^k(U)$ και $\omega_2 \in \Omega^s(U)$. Ορίζουμε $\omega_1 \wedge \omega_2 \in \Omega^{k+s}(U)$ με

$$\begin{aligned} (\omega_1 \wedge \omega_2)(u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_{k+s}) &:= \\ &= \frac{1}{k!s!} \sum_{\sigma \in S_{k+s}} \text{sign}(\sigma) \omega_1(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(k)}) \omega_2(u_{\sigma(k+1)}, \dots, u_{\sigma(k+s)}) \end{aligned}$$

για $u_i \in T_p \mathbb{R}^n$, $i \in \{1, 2, \dots, k, k+1, \dots, s\}.$

Αν $\omega_1, \dots, \omega_s \in \Omega^1(U)$, τότε

$$\begin{aligned} &\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_s)(u_1, \dots, u_k) = \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sign}(\sigma) \omega_1(u_{\sigma(1)}) (\omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_s)(u_{\sigma(2)}, \dots, u_{\sigma(k)}) \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sign}(\sigma) \omega_1(u_{\sigma(1)}) \omega_2(u_{\sigma(2)}) \dots \omega_s(u_{\sigma(k)}) \\ &= \det(\omega_i(u_j))_{i,j=1,\dots,k}. \end{aligned}$$

Από αυτό συμπεραίνουμε ότι ο πιο πάνω ορισμός συμπίπτει με τον αρχικό.

Εφαρμογή Έστω $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$, $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$. Τότε,

$$\begin{aligned}
 & dx_1 \wedge (dx_2 \wedge dx_3)(u, v, w) = \\
 &= \frac{1}{2!} \sum_{\sigma \in S_3} \text{sign}(\sigma) dx_1(u_{\sigma(1)})(dx_2 \wedge dx_3)(v_{\sigma(2)}, w_{\sigma(3)}) \\
 &= \frac{1}{2} [dx_1(u)(dx_2 \wedge dx_3)(v, w) - dx_1(u)(dx_2 \wedge dx_3)(w, v) + \\
 &\quad + dx_1(v)(dx_2 \wedge dx_3)(w, u) - dx_1(v)(dx_2 \wedge dx_3)(u, w) + \\
 &\quad + dx_1(w)(dx_2 \wedge dx_3)(u, v) - dx_1(w)(dx_2 \wedge dx_3)(v, u)] \\
 &= dx_1(u) \frac{(dx_2 \wedge dx_3)(v, w) - (dx_2 \wedge dx_3)(w, v)}{2} + \\
 &\quad + dx_1(v) \frac{(dx_2 \wedge dx_3)(w, u) - (dx_2 \wedge dx_3)(u, w)}{2} + \\
 &\quad + dx_1(w) \frac{(dx_2 \wedge dx_3)(u, v) - (dx_2 \wedge dx_3)(v, w)}{2} \\
 &= dx_1(u) \begin{vmatrix} dx_2(v) & dx_2(w) \\ dx_3(v) & dx_3(w) \end{vmatrix} - dx_1(v) \begin{vmatrix} dx_2(u) & dx_2(w) \\ dx_3(u) & dx_3(w) \end{vmatrix} + \\
 &\quad + dx_1(w) \begin{vmatrix} dx_2(u) & dx_2(v) \\ dx_3(u) & dx_3(v) \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} dx_1(u) & dx_1(v) & dx_1(w) \\ dx_2(u) & dx_2(v) & dx_2(w) \\ dx_3(u) & dx_3(v) & dx_3(w) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Η προεργασία που κάναμε μέχρι στιγμής για τις εναλλάσσουσες k -γραμμικές μορφές κάνει φανερό ότι (ουσιαστικά) $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \det$ (στον $\mathbb{R}^n$) και φυσιολογικά οδηγούμαστε στο

Λήμμα 3.1.1 Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό. Τότε κάθε $\omega \in \Omega^n(U)$ γράφεται ως $\omega = L \det$, όπου $L \in C^\infty(U)$.

3.1.1 Ο τελεστής Διαφορικό

Ορισμός 3.1.6 Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $\omega \in \Omega^k(U)$. Ορίζουμε μια $(k+1)$ -Διαφορική Μορφή $d\omega$ (το εξωτερικό Διαφορικό της ω) ως εξής: αφού $\omega \in \Omega^k(U)$, αυτή θα γράφεται στην κανονική της μορφή ως

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

(όπου οι συντελεστές στο πιο πάνω άθροισμα είναι C^∞ συναρτήσεις). Τότε

$$d\omega := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} da_{i_1 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}. \quad (3.3)$$

Παρατηρούμε ότι ο ορισμός του διαφορικού συμπίπτει με τον (επαγωγικό) ορισμό του εξωτερικού γινομένου $(k+1)$ -Διαφορικών Μορφών (από τις ιδιότητες της ορίζουσας).

Ιδιότητες του Διαφορικού

1. $d(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n}) = d(1 dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n}) = d1 \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n} = 0$.
2. Αν $\omega = df$, για κάποια συνάρτηση f , τότε $d\omega = 0$, δηλ. $d(df) := d^2(f) = 0$.
Πράγματι,

$$\begin{aligned}
 \omega = df &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \Rightarrow d\omega = d(d(f)) = d\left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right] \\
 &= \sum_{i=1}^n d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \wedge dx_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) dx_j \wedge dx_i \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i \\
 dx_j \wedge dx_i &= -dx_i \wedge dx_j \\
 &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) dx_j \wedge dx_i \\
 &\stackrel{\text{Schwarz}}{=} 0.
 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε το

Θεώρημα 3.1.3 (Clairaut/Schwarz) Έστω $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μια C^2 συνάρτηση. Τότε, για κάθε $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a_1, \dots, a_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a_1, \dots, a_n) \quad (\forall 1 \leq i, j \leq n).$$

Δηλ. τα μερικά διαφορικά δευτέρας τάξης της f αντιμετατίθενται.

3. Λόγω της $\mathbb{R}$ -γραμμικότητας του τελεστή διαφορικό μπορούμε εύκολα να δείξουμε χρησιμοποιώντας το προηγούμενο ότι για κάθε $\omega \in \Omega^k(U)$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό ισχύει

$$d(d\omega) = 0. \quad (3.4)$$

Σημείωση: Όπως θα δούμε και αργότερα, η σχέση $d(d\omega) = 0$ μας λέει ουσιαστικά ότι δεν μπορείς να εφαρμόσεις 2 φορές το Θεώρημα του Stokes, δηλ. 2 φορές ολοκλήρωση.

Εφαρμογή: Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι υπάρχουν κλειστές Δ.Μ. που δεν είναι ακριβείς, π.χ. η $d\theta := \xi(x, y) := \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, δηλ. $d\xi = 0$, αλλά δεν η ξ δεν είναι (ολικά) το διαφορικό κάποιας συνάρτησης. Παρόλα αυτά ισχύει ότι $d(d(\xi)) = 0$. Αυτό είναι πολύ σημαντικό και συνδέεται άμεσα με το πρόβλημα της παράγωγους στο επίπεδο όπως θα δούμε παρακάτω (βλέπε Θεώρημα Poincaré).

Εφαρμογή Μια σημαντική Διαφορική Μορφή είναι και η $\eta \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ με

$$\eta(x) := \frac{1}{|x|^n} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} x_j dx_1 \wedge \dots \wedge [dx_j] \wedge \dots \wedge dx_n, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

η οποία αποτελεί γενίκευση της ξ στις n διαστάσεις. Θα δείξουμε ότι $\eta \in Z^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, δηλ. ότι $d\eta = 0$:

Έστω $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Τότε,

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \frac{1}{|x|^n} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} x_j dx_1 \wedge \dots \wedge [dx_j] \wedge \dots \wedge dx_n \\ \Rightarrow d\eta(x) &= d \left[\sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{|x|^n} x_j dx_1 \wedge \dots \wedge [dx_j] \wedge \dots \wedge dx_n \right] \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} d \left(\frac{x_j}{|x|^n} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge [dx_j] \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} d \left[\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{x_j}{|x|^n} \right) dx_k \right] dx_1 \wedge \dots \wedge [dx_j] \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} d \left(\frac{x_j}{|x|^n} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge [dx_j] \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{x_j}{|x|^n} \right) dx_j \right] dx_1 \wedge \dots \wedge [dx_j] \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{x_j}{|x|^n} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

Όμως,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{x_j}{|x|^n} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{x_j}{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{n/2}} \right) \\ &= \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{n/2}} - \frac{n}{2} \cdot \frac{2x_j^2}{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{n}{2}+1}} \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{x_j}{|x|^n} \right) &= \frac{n}{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{n/2}} - \frac{n \sum_{j=1}^n x_j^2}{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{n}{2}+1}} \\ &= \frac{n}{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{n/2}} - \frac{n|x|^2}{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{n}{2}+1}} \\ &= \frac{n}{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{n/2}} - \frac{n}{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{n}{2}}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Επομένως $d\eta = 0$.

4. Έστω $\omega_1 \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ και $\omega_2 \in \Omega^s(\mathbb{R}^n)$. Τότε,

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_2. \quad (3.5)$$

Πράγματι,

$$\omega_1 \in \Omega^k(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \omega_1 = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \equiv \sum_{|I| \approx k} a_I dx_I$$

και

$$\omega_2 \in \Omega^s(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \omega_2 = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_s \leq n} b_{j_1 \dots j_s} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_s} \equiv \sum_{|J| \approx s} b_J dx_J.$$

Τότε,

$$\begin{aligned} \omega_1 \wedge \omega_2 &= \sum_{|I| \approx k, |J| \approx s} a_I b_J dx_I \wedge dx_J \\ \Rightarrow d(\omega_1 \wedge \omega_2) &= d \left(\sum_{|I| \approx k, |J| \approx s} a_I b_J dx_I \wedge dx_J \right) \\ &= \sum_{|I| \approx k, |J| \approx s} d(a_I b_J) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= \sum_{|I| \approx k, |J| \approx s} (b_J da_I + a_I db_J) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= \sum_{|I| \approx k, |J| \approx s} b_J da_I \wedge dx_I \wedge dx_J + \sum_{|I| \approx k, |J| \approx s} a_I db_J \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_2 \\ &= d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_2 \end{aligned}$$

3.1.2 Διαφορικές Μορφές και Θεωρία Συνομολογίας deRham στο επίπεδο

Ορισμός 3.1.7 Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Μια 1-Δ.Μ. ω (στο D) για την οποία υπάρχει $f \in C^1(D)$ τέτοια ώστε $\omega = df$ λέγεται ακριβής Δ.Μ. και το σύνολο των ακριβών Δ.Μ. με C^∞ - συντελεστές συμβολίζεται με $B^1(D)$, δηλ.

$$B^1(D) := \{\omega \in \Omega^1(D) : \exists f \in C^\infty(D) \text{ τ.ω. } df = \omega\}.$$

Επομένως μια 1-Δ.Μ. $\omega = Pdx + Qdy$ είναι ακριβής στο D αν υπάρχει $f \in C^1(D)$ τέτοια ώστε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P \text{ και } \frac{\partial f}{\partial y} = Q, \text{ (στο } D\text{)}. \quad (3.6)$$

■

Αν ισχύουν οι εξισώσεις (3.6), τότε έχουμε ότι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad (\text{στο } D),$$

δηλ. από το θεώρημα (3.1.3) (αν $f \in C^2(D)$),

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad (\text{στο } D). \quad (3.7)$$

Συνεπώς, για να είναι μια C^1 - Δ.Μ. $\omega = Pdx + Qdy$ ακριβής στο D , θα πρέπει να ικανοποιούνται οι Διαφορικές Εξισώσεις (3.7). Μια Δ.Μ. με την ιδιότητα αυτή λέγεται κλειστή και το σύνολο όλων των κλειστών Δ.Μ. με C^∞ - συντελεστές συμβολίζεται με $Z^1(D)$:

$$Z^1(D) := \left\{ \omega = Pdx + Qdy \in \Omega^1(D) : \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \text{ στο } D \right\}.$$

[Το Z είναι από τη Γερμανική λέξη *Zyklys*]. Αφού (3.6) $\Rightarrow$ (3.7), έπεται ότι

$$B^1(D) \subset Z^1(D).$$

Όμως, εν γένει είναι $B^1(D) \neq Z^1(D)$, δηλ. υπάρχουν κλειστές Δ.Μ. που δεν είναι ακριβείς, π.χ. η

$$\xi := \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2},$$

με $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \equiv D$. Θετιότητας

$$P(x, y) := \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad \text{και} \quad Q(x, y) := \frac{x}{x^2 + y^2},$$

εύκολα βλέπουμε ότι

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

και άρα $\xi \in Z^1(D)$. Όμως, αν υπήρχε μια C^∞ - συνάρτηση f τέτοια ώστε $df = \xi$, τότε,

$$\int_{C(0,1)} \xi = \int_{C(0,1)} df = 0.$$

Όμως, $\int_{C(0,1)} \xi = 2\pi i$, άτοπο. Άρα, $\xi \notin B^1(D)$. ■

Το ακόλουθο θεώρημα μας λέει ότι το πρόβλημα της παράγουσας έχει λύση στα κυρτά σύνολα :

Θεώρημα 3.1.4 Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτό και κυρτό σύνολο και έστω $\omega = Pdx + Qdy$ μια κλειστή Δ.Μ. στο D με συντελεστές στο D , δηλ. οι συντελεστές P, Q είναι C^1 στο D και ισχύει η (3.7). Τότε, υποθέτοντας ότι το $(0, 0) \in D$, θεωρούμε τη συνάρτηση $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x, y) = \int_{[(0,0),(x,y)]} \omega = \int_{[(0,0),(x,y)]} P(u, v)du + Q(u, v)dv.$$

Τότε, η $f \in C^2(D)$ και $df = \omega$. ■

Το Θεώρημα ισχύει και για αστρόμορφα ως προς σημείο σύνολα:

Θεώρημα 3.1.5 (Poincaré) Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και αστρόμορφο σύνολο. Τότε

(α') Για κάθε $\omega \in Z^1(U) \subset \Omega_k^1(U)$ ($k \geq 1$) ισχύει $\omega \in B^1(U)$, δηλ. κάθε κλειστή 1-Δ.Μ. στο U είναι ακριβής.

(β') Κάθε $\eta \in \Omega_k^2$ ($k \geq 0$) είναι ακριβής, δηλ. $d\eta = 0$. ■

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

(α') Έστω $\omega \in Z^1(U) \subset \Omega_k^1(U)$ ($k \geq 1$), δηλ. $\omega = Pdx + Qdy$, για κάποιες $P, Q \in C^k(U)$ και $d\omega = 0$. Για να δείξουμε ότι η ω είναι ακριβής, θα δείξουμε ότι υπάρχει $f \in C^1(U)$ τέτοια ώστε $\omega = df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$, ισοδύναμα ότι $\frac{\partial f}{\partial x} = P$ και $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$ στο U . Θα κατασκευάσουμε μια τέτοια f . Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x, y) = x \int_0^1 P(tx, ty)dt + y \int_0^1 Q(tx, ty)dt.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(x \int_0^1 P(tx, ty)dt + y \int_0^1 Q(tx, ty)dt \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(x \int_0^1 P(tx, ty)dt \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(y \int_0^1 Q(tx, ty)dt \right) \\ &= \int_0^1 P(tx, ty)dt + x \frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 P(tx, ty)dt + \\ &\quad + y \frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 Q(tx, ty)dt. \end{aligned}$$

Λόγω της συνέχειας των P, Q , μπορούμε να εναλλάξουμε τη σειρά ολοκλήρωσης και παραγώγισης: $\frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 P(tx, ty)dt = \int_0^1 \frac{\partial P}{\partial x}(tx, ty)dt$ και $\frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 Q(tx, ty)dt = \int_0^1 \frac{\partial Q}{\partial x}(tx, ty)dt$. Επίσης, $d\omega = 0 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \int_0^1 P(tx, ty)dt + \int_0^1 \left(x \frac{\partial P}{\partial x}(tx, ty) + y \frac{\partial P}{\partial y}(tx, ty) \right) dt \\ &= \int_0^1 P(tx, ty)dt + \int_0^1 \frac{d}{dt} (P(tx, ty))dt \\ &= \int_0^1 P(tx, ty)dt + [tP(tx, ty)]_{t=0}^1 - \int_0^1 P(tx, ty)dt \\ &= P(x, y), \quad \forall (x, y) \in U. \end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι και $\frac{\partial f}{\partial y} = Q(x, y)$, $\forall (x, y) \in U$. Έτσι, δείξαμε ότι $df = \omega$.

(β) Έστω $\eta \in \Omega_k^2$ ($k \geq 0$). Τότε, $\eta = Rdx \wedge dy$, για κάποια $R \in C^2(U)$.

Θα δείξουμε ότι $d\eta = 0$. Θέτουμε

$$\theta(x, y) := \left(-y \int_0^1 tR(tx, ty)dt \right) dx + \left(x \int_0^1 tR(tx, ty)dt \right) dy.$$

Έχουμε, όπως και πριν,

$$\begin{aligned} d\theta(x, y) &= \left(2 \int_0^1 tR(tx, ty)dt + x \int_0^1 t^2 \frac{\partial R}{\partial x}(tx, ty)dt \right. \\ &\quad \left. + y \int_0^1 t^2 \frac{\partial R}{\partial x}(tx, ty)dt \right) dx \wedge dy \\ &= \left(2 \int_0^1 tR(tx, ty)dt + \int_0^1 t^2 \frac{d}{dt}(R(tx, ty))dt \right) dx \wedge dy \\ &= \left(2 \int_0^1 tR(tx, ty)dt + [t^2 R(tx, ty)]_{t=0}^1 - 2 \int_0^1 tR(tx, ty)dt \right) dx \wedge dy \\ &= R(x, y)dx \wedge dy, \quad \forall (x, y) \in U. \end{aligned}$$

■

Παρατήρηση Το σημείο κλειδί στην απόδειξη είναι ότι το U είναι αστρόμορφο (ως προς το $(x, y) = (0, 0)$ χωρίς απώλεια της γενικότητας) και συνεπώς, μπορούμε να ολοκληρώσουμε τους συντελεστές των εκάστοτε Δ.Μ. κατά μήκος των ευθειών $[0, z]$, $z \in U$ και ακολούθως, λόγω της συνέχειάς των, να εναλλάξουμε ολοκλήρωση και παραγώγιση, ικανοποιώντας έτσι τα ζητούμενα. ■

Επιστρέφοντας τώρα στην Δ.Μ. ξ , θεωρούμε το σύνολο

$$\mathbb{R}^2 \setminus (-\infty, 0] \equiv \Omega.$$

Το Ω είναι αστρόμορφο ως προς το σημείο $(1, 0)$ και άρα από προηγούμενο Θεώρημα $\xi \in B^1(\Omega)$. Ορίζοντας τη συνάρτηση $\theta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$\theta(x, y) = \int_{[(0,0),(x,y)]} \xi = \int_{[(1,0),(x,y)]} \frac{-vdy + udu}{u^2 + v^2},$$

αποδεικνύεται εύκολα ότι η παράγουσα θ της Δ.Μ. ξ στο ω είναι η γωνία μεταξύ των ημιευθειών $\{t(x, y) : t \geq 0\}$ και $\{t(1, 0) : t \geq 0\}$ στην περίπτωση που $y \geq 0$ και το αντίθετο της γωνίας που σχηματίζουν οι ημιευθείες αυτές στην περίπτωση που $y < 0$. Εδώ θα κάνουμε μια σημαντική παρατήρηση η οποία συνδέει τις Δ.Μ. με τα προηγούμενα: Ας γράψουμε τη Δ.Μ. $\frac{d\zeta}{\zeta}$ όπου $\zeta = x + iy \neq 0$ στη Δ.Μ. $Pdx + Qdy$:

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta}{\zeta} &= \frac{dx + idy}{x + iy} = \frac{(x - iy)(dx + idy)}{x^2 + y^2} = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} + i \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} \\ \Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \frac{d\zeta}{\zeta} &= \frac{1}{2\pi i} \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} + \frac{1}{2\pi} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{1}{2\pi i} d(\log \sqrt{x^2 + y^2}) + \frac{1}{2\pi} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Επομένως, αν γ μια κλειστή καμπύλη που δεν περνά από σημείο $(0,0)$ τότε

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}.$$

Στο σημείο αυτό ας θυμηθούμε ότι η παράσταση $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta}$ είναι ο δείκτης στροφής της γ γύρω από σημείο $(0,0)$. Προτού όμως φανεί η γεωμετρική σημασία της ξ ,

3.1.3 Η πρώτη ομάδα συνολογίας de Rham

Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτό. Με τις προφανείς πράξεις το σύνολο $\mathcal{D}^1(D)$ γίνεται $\mathbb{R}$ -γραμμικός χώρος και τα σύνολα $B^1(D)$, $Z^1(D)$ γραμμικοί υπόχωροί του. Έτσι,

$$B^1(D) \subseteq Z^1(D) \subsetneq \mathcal{D}^1(D).$$

Ιδιαίτερος ορίζεται ο χώρος πηλίκου

$$H^1(D) := Z^1(D)/B^1(D)$$

ο οποίος ονομάζεται *ομάδα συνολογίας de Rham του D* ή *πρώτη ομάδα συνολογίας*. Ένα στοιχείο της ομάδας $H^1(D)$ είναι της μορφής

$$[\omega] = \omega + B^1(D) = \{\omega + \theta : \theta \in B^1(D)\},$$

όπου $\omega \in Z^1(D)$. Η μηδενική κλάση είναι ακριβώς το σύνολο $B^1(D)$. Έτσι, η ισότητα $[\omega] = 0$ σημαίνει ότι $\omega \in B^1(D)$. Έτσι, το σύμπλοκο $H^1(D)$ "μετρά" τρόπον τινά κατά πόσον απέχει το πρόβλημα της παράγωγους από το να έχει λύση. Για παράδειγμα, όπως είδαμε και σε προηγούμενη παράγραφο, ορίζοντας την απεικόνιση $g : H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$[\omega] \mapsto g([\omega]) := \int_{C(0,1)} \omega,$$

έχουμε ότι $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \cong \mathbb{R}$ και άρα $\dim(H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})) = 1$, γεγονός το οποίο ανιχνεύει το ότι το σύνολο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ έχει μια τρύπα. Επίσης, $H^1(\mathbb{R}^2) = 0$ (και κατ'αρκίαν $H^1(U) = 0$ για κάθε ανοικτό και απλά συνεκτικό $U \subseteq \mathbb{R}^2$) το οποίο ανιχνεύει την τοπολογία του $\mathbb{R}^2$. Τέλος, το $H^0(D)$ είναι το

$$H^0(D) = Z^0(D)/B^0(D) = \{f \in C^\infty(D) : df = 0\}.$$

Γενικά για ένα Διαφορίσιμο Πολύπτυγμα M^m έχουμε το εξής Θεώρημα

Θεώρημα 3.1.6 *Για κάθε Διαφορίσιμο Πολύπτυγμα M^m το σύνολο $H^0(M^m)$ είναι ακριβώς το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων στις συνεκτικές συνιστώσες του M^m . Συγκεκριμένα, αν το M^m έχει k συνεκτικές συνιστώσες, τότε $H^0(M^m) \cong \mathbb{R}^k$.*

Εφαρμογή Θεωρούμε το σύνολο $D := \mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, p_2, \dots\}$, όπου $p_j \in \mathbb{R}^2$, $j \in \{1, 2, \dots\}$ με $|p_j| \rightarrow \infty$, δηλ. το D είναι ένα διακριτό σύνολο. Θεωρούμε το σύνολο

$$H^1(D) := Z^1(D)/B^1(D).$$

Θα δείξουμε ότι για κάθε $N \in \mathbb{N}$ το $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_N\})$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Έστω λοιπόν $N \in \mathbb{N}$. Αφού το D δεν έχει σημεία συσσώρευσης, μπορούμε να πάρουμε κύκλους γύρω από τα σημεία $p_1, p_2, \dots, p_N$. Έστω λοιπόν $C(r_i, p_i)$, $r_i > 0$, $1 \leq i \leq N$ οι κύκλοι αυτοί. Θεωρούμε τις 1-Διαφορικές Μορφές

$$\xi_{p_i} := \frac{-(y - y_i)dx + (x - x_i)dy}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}, \quad p_i := (x_i, y_i), \quad 1 \leq i \leq N.$$

Ξέρουμε ότι $\xi_{p_i} \in Z^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{p_i\})$ αλλά $\xi_{p_i} \notin B^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{p_i\})$, δηλ. η ξ_{p_i} είναι κλειστή αλλά όχι ακριβής 1-Διαφορική Μορφή. Θεωρούμε τις αντίστοιχες $[\xi_{p_i}] \in H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_N\})$, δηλ. $[\xi_{p_i}] = \{\xi_{p_i} + df : f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{p_i\})\}$ και έστω $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq N$ τέτοια ώστε $\lambda_1[\xi_{p_1}] + \lambda_2[\xi_{p_2}] + \dots + \lambda_N[\xi_{p_N}] = 0$. Τότε,

$$\begin{aligned} \lambda_1[\xi_{p_1}] + \lambda_2[\xi_{p_2}] + \dots + \lambda_N[\xi_{p_N}] &= 0 \\ \Leftrightarrow [\lambda_1\xi_{p_1}] + [\lambda_2\xi_{p_2}] + \dots + [\lambda_N\xi_{p_N}] &= 0 \\ \Leftrightarrow [\lambda_1\xi_{p_1} + \lambda_2\xi_{p_2} + \dots + \lambda_N\xi_{p_N}] &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda_1\xi_{p_1} + \lambda_2\xi_{p_2} + \dots + \lambda_N\xi_{p_N} &= df, \\ \text{για κάποια } f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_N\}) \end{aligned}$$

Αφού

$$\int_{C(p_j, r_j)} \xi_{p_i} = 2\pi \quad \text{αν } i = j \quad \text{και} \quad = 0 \quad \text{αν } i \neq j,$$

ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση σε κάθε $C(p_j, r_j)$, βρίσκουμε ότι κάθε $\lambda_i = 0$ και άρα οι $[\xi_{p_i}]$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_N\})$, για κάθε $N \in \mathbb{R}^2$. Καθώς $N \rightarrow \infty$, έχουμε το συμπέρασμα. ■

3.1.4 Το pull-back (η ανάσχυση)

Ορισμός 3.1.8 Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ και $V \subseteq \mathbb{R}^m$ ανοικτά. Έστω $\omega \in \Omega^k(U)$ και $f : V \rightarrow U$ C^∞ . Ορίζουμε το pull-back (την ανάσχυση) της ω μέσω της f ως εξής:

$$f^*(\omega) \in \Omega^k(V) \text{ με } (f^*(\omega))_p(u_1, u_2, \dots, u_k) := \omega_{f(p)}(d_p f(u_1), d_p f(u_2), \dots, d_p f(u_k)),$$

($p \in U$), $\forall u_1, u_2, \dots, u_k$ διανυσματικά πεδία.

Παρατηρήσεις

1. Η συνάρτηση f είναι C^∞ , και άρα ορίζεται το διαφορικό $d_p f : T_p \mathbb{R}^n \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}^m$, $\forall p \in U$.

2. Στα βασικά διανυσματικά πεδία $e_1, e_2, \dots, e_k \in \mathbb{R}^n$, έχουμε

$$\begin{aligned}(f^*(\omega))_p(e_1, e_2, \dots, e_k) &= \omega_{f(p)}(d_p f(e_1), \dots, d_p f(e_k)) \\ &= \omega_{f(p)}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\bigg|_p, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_k}\bigg|_p\right),\end{aligned}$$

όπου $f = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$. Υπενθύμιση: οι συναρτήσεις $x_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq n$) είναι C^∞ και $p \mapsto x_i(p)$, δηλ. $f(p) = (f_1(x_1(p), \dots, x_n(p)), \dots, f_m(x_1(p), \dots, x_n(p)))$.

Μια Διαφορική Μορφή τάξης k σε ένα (διαφορίσιμο) πολύπτυγμα είναι μια C^∞ τομή της συνεφαπτόμενης Δέσμης. Έστω M^m , N^n διαφορίσιμα πολύπτυγματα, $f : M^m \rightarrow N^n$ ($f = (f_1, \dots, f_m)$) διαφορίσιμη απεικόνιση (μεταξύ πολύπτυγμάτων) και $\omega \in \Omega^k(N^n)$. Αν $p \in M^m$ και $(x_1, \dots, x_m)$, $(y_1, \dots, y_n)$ οι συντεταγμένες στα M^m και N^n αντίστοιχα, τότε

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k} dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}(f^*(\omega))_p &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (a_{i_1 \dots i_k} \circ f) df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_k} \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq m}} (a_{i_1 \dots i_k} \circ f) \left| \frac{\partial(f_{i_1}, \dots, f_{i_k})}{\partial(x_{j_1}, \dots, x_{j_k})} \right|_p dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k},\end{aligned}$$

όπου

$$\left| \frac{\partial(f_{i_1}, \dots, f_{i_k})}{\partial(x_{j_1}, \dots, x_{j_k})} \right|_p = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_{i_1}}{\partial x_{j_1}} & \frac{\partial f_{i_1}}{\partial x_{j_2}} & \dots & \frac{\partial f_{i_1}}{\partial x_{j_k}} \\ \frac{\partial f_{i_2}}{\partial x_{j_1}} & \frac{\partial f_{i_2}}{\partial x_{j_2}} & \dots & \frac{\partial f_{i_2}}{\partial x_{j_k}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{i_k}}{\partial x_{j_1}} & \frac{\partial f_{i_k}}{\partial x_{j_2}} & \dots & \frac{\partial f_{i_k}}{\partial x_{j_k}} \end{vmatrix}_p,$$

ο Ιακωβιανός πίνακας.

Εφαρμογή Ως εφαρμογή, θα δούμε πως η μορφή όγκου στον $\mathbb{R}^2$ ανασύρεται από τις καρτεσιανές στις πολικές συντεταγμένες.

Έστω $\mathbb{H} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ και (r, θ) οι πολικές συντεταγμένες στο $\mathbb{H}$, δηλ. $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $(r, \theta) \in [0, \infty) \times [0, \pi)$. Έστω $f := id_{\mathbb{H}}$. Έστω $\omega = xdy - ydx$. Τότε,

$$\begin{aligned}f^*(\omega) &= id_{\mathbb{H}}^*(xdy - ydx) = (x \circ id_{\mathbb{H}})d(y \circ id_{\mathbb{H}}) - (y \circ id_{\mathbb{H}})d(x \circ id_{\mathbb{H}}) \\ &= (r \cos \theta)d(r \sin \theta) - (r \sin \theta)d(r \cos \theta) \\ &= (r \cos \theta)(\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) - (r \sin \theta)(\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) = r^2 d\theta.\end{aligned}$$

Ιδιότητες του pull-back

1. Από τον Κανόνα της Αλυσίδας έχουμε ότι

$$(g \circ f)^*(\omega) = f^*(g^*(\omega)). \quad (3.8)$$

2. Έστω $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ μια C^∞ συνάρτηση και έστω t η συντεταγμένη στο $\mathbb{R}$. Τότε, $\forall u \in \mathbb{R}^m$, έχουμε

$$(f^*(dt))(u) = dt(d_x f(u)) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i(u),$$

$$(x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m)$$

δηλ.

$$f^*(dt) = df. \quad (3.9)$$

3. Έστω $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^2$ μια C^∞ συνάρτηση, $f = (f_1, f_2)$ και x_1, x_2 οι συντεταγμένες στο $\mathbb{R}^2$. Τότε, $\forall u, w \in \mathbb{R}^m$, έχουμε

$$\begin{aligned} f^*(dx_1 \wedge dx_2)(u, w) &= dx_1 \wedge dx_2(d_x f(u), d_x f(w)) \\ &= \begin{vmatrix} dx_1(d_x f(u)) & dx_1(d_x f(w)) \\ dx_2(d_x f(u)) & dx_2(d_x f(w)) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$(x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m)$$

δηλ.

$$f^*(dx_1 \wedge dx_2) = f^*(dx_1) \wedge f^*(dx_2) = df_1 \wedge df_2. \quad (3.10)$$

4. Το εξωτερικό διαφορικό και η ανάσχυση συνδέονται με τον ακόλουθο τρόπο: Έστω $U_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ και $U_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ ανοικτά, $f : U_1 \rightarrow U_2$ μια C^∞ απεικόνιση και $\omega \in \Omega^k(U_2)$. Τότε,

$$d(f^*(\omega)) = f^*(d\omega). \quad (3.11)$$

Η σχέση αυτή μας λέει (κατα κάποιον τρόπο) ότι το διαφορικό "διατηρείται" με την ανάσχυση.

Απόδειξη:

Έστω $\omega \in \Omega^0(U_2)$, δηλ $\omega = f \in C^\infty(U_2)$. Τότε, το ζητούμενο είναι ακριβώς η σχέση (3.9). Για να δείξουμε το ζητούμενο για μια $\omega \in \Omega^k(U_2)$, $1 \leq k \leq n$, αρκεί (από την $\mathbb{R}$ -γραμμικότητα του τελεστή ανάσχυσης) να το δείξουμε για $\omega = g dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ ($g \in C^\infty(U_2)$). Έχουμε:

$$\begin{aligned} f^*(d\omega) &= f^*(d(g dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})) = f^*(dg \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) \\ &\stackrel{(3.10)}{=} f^*(dg) \wedge df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_k} \stackrel{(3.9)}{=} d(f^*(g)) \wedge df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_k} \\ &= d(f^*(g) df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_k}) = d(f^*(\omega)). \end{aligned}$$

Παρακάτω, θα δούμε μερικές περιπτώσεις υπολογισμού του pull-back που συναντώνται συχνά κατανοώντας παράλληλα πως δουλεύει το πιο πάνω άθροισμα.

Πρόταση 3.1.3 Έστω $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση, έστω $f = (f_1, \dots, f_n)$. Έστω $\omega = dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$. Τότε,

$$f^*(\omega) = \det(df) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Απόδειξη Καταρχήν, αφού η f είναι διαφορίσιμη, ορίζεται η $f^*(\omega)$ και $f^*(\omega) \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$ με $f^*(\omega) = g dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, για κάποια $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Θα προσδιορίσουμε την g . Αρκεί να την υπολογίσουμε στα στοιχεία $e_i \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq n$ της βάσης του $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} g &= f^*(\omega) \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) = f^*(dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n) \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \\ &= (dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n) \left(df \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right), \dots, df \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right) \right) \\ &= \det(dy_i(df(\partial/\partial x_j)))_{i,j=1}^n = \det(d(f \circ y_i)(\partial/\partial x_j))_{i,j=1}^n \\ &= \det(d(f_i)(\partial/\partial x_j))_{i,j=1}^n = \det(df). \end{aligned}$$

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να το αποδείξουμε και ως εξής:

$$\begin{aligned} f^*(\omega) &= f^*(dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n) = f^*(dy_1) \wedge \dots \wedge f^*(dy_n) \stackrel{(3.10)}{=} df_1 \wedge \dots \wedge df_n \\ &= \det(df) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

I. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ C^∞ και $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ ($f = (f_1, f_2, f_3)$). Τότε, $\omega = g_1 dx + g_2 dy + g_3 dz$, για κάποιες $g_i \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ ($i = 1, 2, 3$). Τότε,

$$\begin{aligned} f^*(\omega) &= f^*(g_1 dx + g_2 dy + g_3 dz) \\ &= (g_1 \circ f)(t) f^*(dx) + (g_2 \circ f)(t) f^*(dy) + (g_3 \circ f)(t) f^*(dz) \\ &= (g_1 \circ f)(t) \frac{df_1}{dt} dt + (g_2 \circ f)(t) \frac{df_2}{dt} dt + (g_3 \circ f)(t) \frac{df_3}{dt} dt \\ &= [(g_1 \circ f)(t) \frac{df_1}{dt} + (g_2 \circ f)(t) \frac{df_2}{dt} + (g_3 \circ f)(t) \frac{df_3}{dt}] dt. \end{aligned}$$

[Εδώ $t = \eta$ συντεταγμένη στον $\mathbb{R}$ και $x, y, z = \eta$ οι συντεταγμένες στον $\mathbb{R}^3$.]

II. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ C^∞ και $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ ($f = (f_1, f_2, f_3)$). Τότε, $\omega = g_1 dx \wedge dy + g_2 dx \wedge dz + g_3 dy \wedge dz$, για κάποιες $g_i \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ ($i = 1, 2, 3$). Τότε,

$$\begin{aligned} f^*(\omega) &= f^*(g_1 dx \wedge dy + g_2 dx \wedge dz + g_3 dy \wedge dz) \\ &= (g_1 \circ f)(u, v) f^*(dx \wedge dy) + (g_2 \circ f)(u, v) f^*(dx \wedge dz) + \\ &\quad + (g_3 \circ f)(u, v) f^*(dy \wedge dz) = \\ &\quad + [(g_1 \circ f)(u, v) \left| \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u, v)} \right| + (g_2 \circ f)(u, v) \left| \frac{\partial(f_1, f_3)}{\partial(u, v)} \right| \\ &\quad + (g_3 \circ f)(u, v) \left| \frac{\partial(f_2, f_3)}{\partial(u, v)} \right|] du \wedge dv. \end{aligned}$$

[Εδώ $u, v = \eta$ οι συντεταγμένες στον $\mathbb{R}^2$ και $x, y, z = \eta$ οι συντεταγμένες στον $\mathbb{R}^3$.]

3.1.5 Ολοκλήρωση σε πολυπύγματα

Έστω t η συνιεταγμένη στον $\mathbb{R}$ και έστω $\omega \in \Omega^1([\alpha, \beta])$, ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$). Τότε, $\omega_t = f dt$, για κάποια $f \in C^\infty([\alpha, \beta])$. Συνεπώς, το να ορίσουμε $\int_{[\alpha, \beta]} \omega_t := \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$ έχει νόημα.

Ορισμός Ολοκληρώματος μιας 1-Διαφορικής Μορφής πάνω σε μια συμπαγή προσανατολίσιμη καμπύλη στον $\mathbb{R}^n$ Έστω γ μια συμπαγής προσανατολίσιμη καμπύλη στον $\mathbb{R}^n$ (δηλ. ένα συμπαγές πολύπτυγμα διάστασης 1) και $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$. Έστω $c : [\alpha, \beta] \rightarrow [\gamma]$ μια αμφιδιαφόριση η οποία διατηρεί τον προσανατολισμό (δηλ. $c' > 0$ ή $c' < 0$). Ορίζουμε

$$\int_{\gamma} \omega := \int_{[\alpha, \beta]} \omega(c'(t)) dt, \quad (3.12)$$

δηλ.

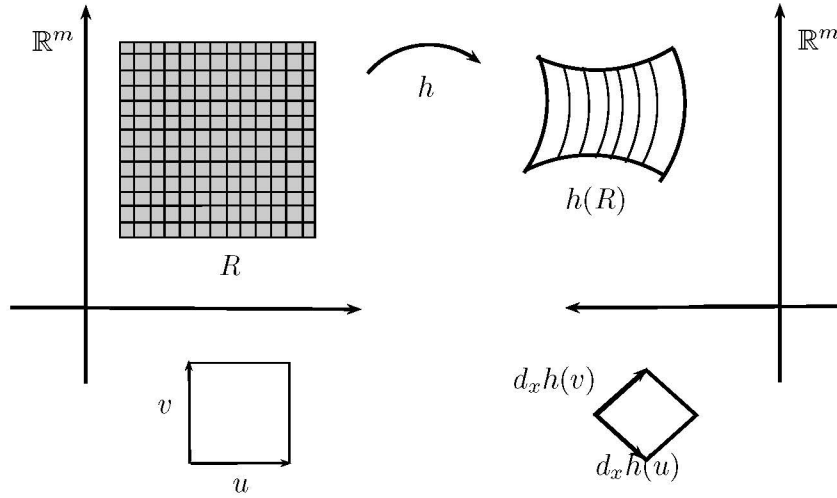
$$\int_{\gamma} \omega := \int_{[\alpha, \beta]} c^*(\omega). \quad (3.13)$$

$\omega \in \Omega^1(U)$, όπου $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό. Τότε, $\omega = \sum_{i=1}^n g_i dx_i$, με $g_i : U \rightarrow \mathbb{R} \in C^\infty$ ($1 \leq i \leq n$). Εδώ προφανώς οι συνιεταγμένες στον $\mathbb{R}^n$ είναι τα x_i , $1 \leq i \leq n$. Έστω $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow U$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ κατά τμήματα C^1 καμπύλη. Θεωρούμε μια διαμέριση $\{\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{k+1} = \beta\}$ του διαστήματος $[\alpha, \beta]$. Τότε, $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$, $1 \leq i \leq k$ είναι C^∞ . Έχουμε τότε ότι

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{[\alpha, \beta]} \left[\sum_{i=1}^n g_i(\gamma(t)) \frac{d\gamma_i}{dt} \right] dt = \int_{[\alpha, \beta]} \sum_{i=1}^n (g_i \circ \gamma)(t) \gamma'_i(t). \quad (3.14)$$

Θεώρημα 3.1.7 [Αλλαγή Μεταβλητών στο Πολλαπλό Ολοκληρώμα] Έστω $R \subseteq \mathbb{R}^m$ χωρίο και $h : R \rightarrow h(R) \subseteq \mathbb{R}^m$ μια αμφιδιαφόριση. Έστω $f : h(R) \rightarrow \mathbb{R}$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε,

$$\int_{h(R)} f = \int_R (f \circ h) |\det(J(h))|.$$



Θεώρημα 3.1.8 [Ο Κανόνας της Αλυσίδας στο $\mathbb{R}^n$] Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ και $V \subseteq \mathbb{R}^m$ ανοικτά σύνολα. Έστω $f : U \rightarrow V$ και $g : V \rightarrow \mathbb{R}^l$ διαφορίσιμες απεικονίσεις στα σημεία x και $f(x)$ αντίστοιχα. Τότε, η $g \circ f$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο x και ισχύει

$$d_x(g \circ f) = d_{f(x)}g \circ d_x f.$$

Ορισμός 3.1.9 Έστω Z ένα διαφορίσιμο πολυπτυγμια και $\Psi : R \rightarrow Z$ μια αμφιδι-αφόριση η οποία διατηρεί τον προσανατολισμό, όπου $R \subseteq \mathbb{R}^n$ χωρίο με C^∞ σύνορο. Έστω $\omega \in \Omega^k(U)$, όπου $J \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό με $U \supseteq J$. Εφαρμόζουμε την ω στα διανύσματα $d_x \Psi(e_1), d_x \Psi(e_2), \dots, d_x \Psi(e_n)$ ($\forall x \in R$): $\omega(d_x \Psi(e_1), d_x \Psi(e_2), \dots, d_x \Psi(e_n))$. (Εδώ $d_x \Psi(e_j) = \frac{\partial \Psi}{\partial x_j}$). Ορίζουμε

$$\int_Z \omega := \int_R \omega(d_x \Psi(e_1), d_x \Psi(e_2), \dots, d_x \Psi(e_n)), \quad (3.15)$$

δηλ.

$$\int_Z \omega := \int_R \Psi^*(\omega).$$

Παρατήρηση: Το $\int_R \omega(d_x \Psi(e_1), d_x \Psi(e_2), \dots, d_x \Psi(e_n))$ είναι ένα (διαδοχικό) n -διάστατο ολοκλήρωμα, δηλ.

$$\int \dots \int \omega(d_x \Psi(e_1), d_x \Psi(e_2), \dots, d_x \Psi(e_n)) dx_1 \dots dx_n.$$

Για να είναι ο ανωτέρω ορισμός του ολοκληρώματος καλός, θα πρέπει να δείξουμε ότι αυτός είναι ανεξάρτητος από την επιλογή (ανα)παραμέτρησης η οποία διατηρεί τον προσανατολισμό:

Λήμμα 3.1.2 Έστω $\Phi : R' \rightarrow Z$ μια (άλλη) αμφιδιφόριση η οποία διατηρεί τον προσανατολισμό. Τότε,

$$\int_R \omega(d_x \Psi(e_1), d_x \Psi(e_2), \dots, d_x \Psi(e_n)) = \int_{R'} \omega(d_y \Psi(e_1), d_y \Psi(e_2), \dots, d_y \Psi(e_n)).$$

Απόδειξη Θέτουμε $h := \Phi^{-1} \circ \Psi$, η οποία είναι αμφιδιαφόριση ως σύνθεση τέτοιων. Τότε,

$$\begin{aligned}\omega(dx\Psi(e_1), \dots, dx\Psi(e_n)) &= \omega(d_x(\Phi \circ h)(e_1), \dots, d_x(\Phi \circ h)(e_n)) = \\ &= \omega(d_{h(x)}\Phi(d_x h(e_1)), \dots, d_{h(x)}\Phi(d_x h(e_n))).\end{aligned}$$

(Από τον κανόνα της Αλυσίδας, έχουμε ότι $d_x(\Phi \circ h)(e_i) = d_{h(x)}\Phi \circ d_x h(e_i)$). Τώρα, γράφουμε το $d_x h(e_i)$, $1 \leq i \leq n$ ως γραμμικό συνδυασμό στοιχείων της βάσης $\{e_i : 1 \leq i \leq n\}$ του $\mathbb{R}^n$:

$$d_x h(e_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_j}{\partial x_i} e_j.$$

Τότε,

$$\begin{aligned}\omega(dx\Psi(e_1), \dots, dx\Psi(e_n)) &= \omega(d_{h(x)}\Phi(d_x h(e_1)), \dots, d_{h(x)}\Phi(d_x h(e_n))) \\ &\stackrel{y=h(x)}{=} \omega(d_y\Phi(d_x h(e_1)), \dots, d_y\Phi(d_x h(e_n))) \\ &= \omega(d_y\Phi(d_x h(\sum_{j=1}^n a_{1j} e_j)), \dots, d_y\Phi(d_x h(\sum_{j=1}^n a_{nj} e_j))) \\ &= \omega(\sum_{j=1}^n a_{1j} d_y\Phi(e_j), \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj} d_y\Phi(e_j)) \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \omega(d_y\Phi(e_1), \dots, d_y\Phi(e_n)) \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \omega(d_y\Phi(e_1), \dots, d_y\Phi(e_n)) \\ &= \det(J(h)) \omega(d_y\Phi(e_1), \dots, d_y\Phi(e_n)).\end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\int_R \omega(dx\Psi(e_1), dx\Psi(e_2), \dots, dx\Psi(e_n)) &= \int_R \det(J(h)) \omega(d_y\Phi(e_1), \dots, d_y\Phi(e_n)) \\ &\stackrel{(3.1.7)}{=} \int_{R'} \omega(d_y\Phi(e_1), \dots, d_y\Phi(e_n)).\end{aligned}$$

Ερχόμενοι στο καλά ορισμένο, δηλ. ότι ο ορισμός του ολοκληρώματος δεν εξαρτάται από την επιλογή του R ή της Ψ , έστω $\Psi : R_1 \rightarrow Z$ και $\Phi : R_2 \rightarrow Z$ αμφιδιαφορίσεις με $\det(J(\Phi)), \det(J(\Psi)) > 0$, τότε η $h := \Phi^{-1} \circ \Psi : R_1 \rightarrow R_2$

είναι αμφιδιαφόριση (μεταξύ Ευκλειδείου χώρων η οποία διατηρεί τον προσανατολισμό) και άρα

$$\int_Z \omega = \int_{R_1} \Psi^*(\omega) = \int_{R_1} (\Phi \circ h)^*(\omega) = \int_{R_1} h^*(\Phi^*(\omega)) = \int_{R_2} \Phi^*(\omega)$$

και το ζητούμενο έπεται.

Ορισμός 3.1.10 Έστω $R \subseteq \mathbb{R}^n$ χωρίο. Τότε.

$$\int_R f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n := \int_R f(x) dx_1 \dots dx_n.$$

Ο υπολογισμός ολοκληρωμάτων Διαφορικών Μορφών στα πολυπύγματα γίνεται τοπικά χρησιμοποιώντας τον αντίστοιχο χάρτη απεικονίζοντας την περιοχή αυτή στον Ευκλείδειο χώρο :

Έστω M^m ένα προσανατολισμένο διαφορίσιμο πολύπτυγμα και έστω $\omega \in \Omega^k(M^m)$ με συμπαγή φορέα. Αν ο φορέας της ω ευρίσκεται εντός του πεδίου ορισμού ενός χάρτη (U, ϕ) του άτλαντα της M^m , τότε

$$\int_{M^m} \omega := \int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^*(\omega).$$

Στη γενική περίπτωση, ο ορισμός του ολοκληρώματος γίνεται με η χρήση ενός βασικού εργαλείου "συγκόλλησης", αυτού της Διαμερίσεως της Μονάδος :

Ορισμός 3.1.11 Έστω Z ένα συμπαγές υποπολύπτυγμα του $\mathbb{R}^n$ και $\omega \in \Omega^k(U)$, όπου $U \subseteq Z \subseteq \mathbb{R}^n$. Έστω $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i) : 1 \leq i \leq n\}$ ένας (πεπερασμένος) άτλαντας του Z (Z συμπαγές $\Rightarrow$ πεπερασμένος) και $\{\rho_i\}_{i=1}^n$ μια διαμέριση της μονάδος η οποία υπόκειται στο κάλυμμα $\{U_i\}$, δηλ. $\rho_i : Z \rightarrow [0, 1]$ με $\text{supp}(\rho_i) \subset U_i$ και $\sum_{i=1}^n \rho_i(x) = 1, \forall x \in Z$. Θέτουμε

$$\int_Z \omega := \sum_{i=1}^n \int_{U_i} \rho_i(\omega).$$

Στην πράξη, για να υπολογίσουμε ένα $\int_{M^m} \omega$, θεωρούμε μια απεικόνιση $\varphi : R \rightarrow M^m$ η οποία είναι αμφιδιαφόριση εκτός από ένα σύνολο με μέτρο (Lebesgue) μηδέν και υπολογίζουμε το $\int_R \phi^*(\omega)$. Διαφορετικά, χρησιμοποιούμε Διαμερίσεις της μονάδος, πράγμα δύσχεστο καθώς είναι δύσκολο πολλές φορές να τις προσδιορίσουμε υπολογιστικά.

Οδηγούμαστε στο επόμενο Θεώρημα, το οποίο μας δείχνει τρόπο εργασίας εύρεσης ολοκληρώματος σε συμπαγή πολυπύγματα :

Θεώρημα 3.1.9 Έστω M^m ένα συμπαγές και προσανατολισμένο διαφορίσιμο πολύπτυγμα με ή χωρίς σύνορο. Έστω $\omega \in \Omega^s(M^m)$. Υποθέτουμε ότι

1. $E_1, \dots, E_k$ είναι συμπαγή υποπολύπυγματα με σύνορο τέτοια ώστε $M^m = \bigcup_{i=1}^k E_i$ και $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}, i \neq j$, τα E_i, E_j τέμνονται μόνο κατά μήκος των συνόρων τους,

2. $D_1, \dots, D_k$ είναι συμπαγή υποπολυπύγματα του $\mathbb{R}^m$ και $F_i : D_i \rightarrow M^m$ αμφιδιαφορίσιμες τέτοιες ώστε $F(D_i) = E_i$, $F(\partial D_i) = \partial E_i$ και $F(D_i^\circ) = E_i^\circ$ με $\det(J(F_i)) > 0$, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Τότε,

$$\int_{M^m} \omega = \sum_{i=1}^k \int_{D_i=F_i^{-1}(E_i)} F_i^*(\omega).$$

Ολοκλήρωμα μιας Διαφορικής Μορφής κατά μήκος καμπύλης σε πολύπτυγμα Έστω M^m ένα m -διάστατο διαφορίσιμο πολύπτυγμα και $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow M^m$ μια C^∞ καμπύλη. Έστω $\omega \in \Omega^k(M^m)$. Τότε

$$\int_\gamma \omega := \int_{[\alpha, \beta]} \gamma^*(\omega) = \int_\alpha^\beta \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt.$$

Γενικότερα, αν $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow M^m$ κατά τμήματα συνεχής, δηλ. υπάρχει μια διαμέριση $\{\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_k = \beta\}$ του $[\alpha, \beta]$ έτσι ώστε η $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ να είναι συνεχής ($1 \leq i \leq k$) τότε

$$\int_\gamma \omega := \sum_{i=1}^k \int_{[t_{i-1}, t_i]} \gamma^*(\omega).$$

Θεώρημα 3.1.10 [Stokes] Έστω M^m ένα m -διάστατο συμπαγές διαφορίσιμο προσανατολισμένο πολύπτυγμα με σύνορο. Εάν $\omega \in \Omega^{m-1}(M^m)$ και $i : \partial M^m \rightarrow M^m$ η απεικόνιση έγκλεισης, τότε

$$\int_{\partial M^m} i^*(\omega) = \int_{M^m} d\omega. \quad (3.16)$$

Πόρισμα 3.1.1 Έστω M^m m -διάστατο συμπαγές διαφορίσιμο προσανατολισμένο πολύπτυγμα χωρίς σύνορο και $\omega = d\sigma \in \Omega^m(M)$. Τότε, $\int_{M^m} \omega = 0$.

Παρατηρήσεις

1. Το Θεώρημα (3.1.10) μας λέει τη σχέση που έχουν οι τελεστές $d : \omega \mapsto d\omega$ και $\partial : M^m \mapsto \partial M^m$ ενώ το Πόρισμα τη σύνδεση $d(d(\omega)) = 0 \Leftrightarrow \partial(\partial M^m) = \emptyset$.
2. Ξέρουμε ότι αν $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$) μια παραγωγίσιμη συνάρτηση, τότε

$$\int_\alpha^\beta f'(x) dx = f(\beta) - f(\alpha).$$

Θα δούμε ότι ουσιαστικά αυτό προκύπτει από το Θεώρημα (3.1.10). Θέτουμε $M^0 := [\alpha, \beta]$ και $\omega := f \in C^\infty((\alpha, \beta))$. Τότε, $\partial M^0 = \{\alpha, \beta\}$. Τότε,

$$\int_{\partial M^0} i^*(\omega) \stackrel{(3.16)}{=} \int_{M^0} d\omega \Leftrightarrow \int_{\{\alpha, \beta\}} i^*(f) = \int_{[\alpha, \beta]} df \Leftrightarrow f(\beta) - f(\alpha) = \int_\alpha^\beta f'(x) dx.$$

3. Το Θεώρημα του Green στο επίπεδο

Θεώρημα 3.1.11 Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^2$, με $D = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$, όπου γ_i λείες καμπύλες ($1 \leq i \leq n$). Τότε,

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} P dx + Q dy,$$

(όπου $P, Q : D \rightarrow \mathbb{R}$ C^∞ συναρτήσεις) προκύπτει από το (3.1.10) για $M^1 = D$ και $\omega = P dx + Q dy$.

4. **Θεώρημα 3.1.12** [Το Θεώρημα Απόκλισης του Gauss] Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^2$ χωρίο το οποίο έχει ως σύνορο μια συμπαγή προσανατολισμένη επιφάνεια E^2 . Έστω $Z = (P, Q, R)$ ένα διανυσματικό πεδίο. Τότε,

$$\int_D \operatorname{div}(Z) dx dy dz = \int_{E^2} \langle Z, \vec{\eta} \rangle dE^2,$$

όπου

$$\operatorname{div}(Z) = \operatorname{trace} \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial z} & \frac{\partial Q}{\partial z} & \frac{\partial R}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Το Θεώρημα αυτό προκύπτει από το (3.1.10) για $M^2 = D$ και $\omega = P dx + Q dy + R dz$. Πράγματι, $\partial D = E^2$ και $\omega = P dx + Q dy + R dz \Rightarrow d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz$. Συνεπώς, η (3.16) μας δίνει

$$\int_{\partial D = E^2} i^*(\omega) = \int_D d\omega \Rightarrow \int_{E^2} i^*(\omega) = \int_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Μένει λοιπόν να δείξουμε ότι $\langle Z, \vec{\eta} \rangle dE^2 = i^*(\omega) : \text{Αφού } \omega \in \Omega(\mathbb{R}^2) \Rightarrow i^*(\omega) \in \Omega(\mathbb{R}^2) \Rightarrow i^*(\omega) = A dE^2$, για κάποια $A \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι $A = \langle Z, \vec{\eta} \rangle$: Το επαληθεύουμε στα στοιχεία της βάσης $\{e_1, e_2\}$, όπου $e_1 \perp e_2$, $e_1, e_2 \in E^2$, $\|e_1\| = \|e_2\| = 1$.

$$\begin{aligned} i^*(\omega)(e_1, e_2) &= \omega(e_1, e_2) = P dy \wedge dz(e_1, e_2) + Q dz \wedge dx(e_1, e_2) + \\ &\quad + R dx \wedge dy(e_1, e_2) = \\ &= P \begin{vmatrix} dy(e_1) & dz(e_1) \\ dy(e_2) & dz(e_2) \end{vmatrix} + Q \begin{vmatrix} dz(e_1) & dx(e_1) \\ dz(e_2) & dx(e_2) \end{vmatrix} \\ &= +R \begin{vmatrix} dx(e_1) & dy(e_1) \\ dx(e_2) & dy(e_2) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} P & Q & R \\ dx(e_1) & dy(e_1) & dz(e_1) \\ dx(e_2) & dy(e_2) & dz(e_2) \end{vmatrix} = \langle Z, \vec{\eta} \rangle. \end{aligned}$$

Το Θεώρημα αυτό στις πολλές διαστάσεις:

Θεώρημα 3.1.13 [Θεώρημα Απόκλισης του Gauss] Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές με κατά τμήματα ομαλό σύνορο ∂D . Αν F ένα διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο σε μια περιοχή του D , τότε

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot \vec{\eta} \, d\sigma(x) = \int_D \operatorname{div} \vec{F} \, dx \quad (D \subseteq \mathbb{R}^n).$$

Εφαρμογή Έστω η Μορφή Όγκου $\eta \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ με

$$\eta(x) := \frac{1}{|x|^n} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} x_j dx_1 \wedge \dots \wedge [dx_j] \wedge \dots \wedge dx_n, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Είδαμε ότι $d\eta = 0$. Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^n$ χωρίο με σύνορο. Θα υπολογίσουμε το $\int_{\partial D} \eta$, όταν $0 \notin \partial D$. Θεωρούμε μια μπάλα με κέντρο το σημείο 0 και ακτίνας $\epsilon < \operatorname{dist}(0, \partial D)$ και θέτουμε $\Omega := D \setminus \mathbb{B}(0, \epsilon)$. Τότε, $\partial\Omega := \partial D \setminus \mathbb{S}(0, \epsilon)$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Stokes στο Ω , έχουμε

$$\int_{\partial\Omega} \eta = \int_{\Omega} d\eta$$

και αφού δείξαμε ότι $d\eta = 0$, έχουμε ότι

$$\int_{\partial D \setminus \mathbb{S}(0, \epsilon)} \eta = \int_{\partial\Omega} \eta = 0 \Rightarrow \int_{\partial D} \eta - \int_{\mathbb{S}(0, \epsilon)} \eta = 0,$$

δηλ.

$$\int_{\partial D} \eta = \int_{\mathbb{S}(0, \epsilon)} \eta.$$

Για τον υπολογισμό του $\int_{\mathbb{S}(0, \epsilon)} \eta$ έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}(0, \epsilon)} \eta &= \int_{\mathbb{S}(0, \epsilon)} \frac{1}{|x|^n} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} x_j dx_1 \wedge \dots \wedge [dx_j] \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \frac{1}{\epsilon^n} \int_{\mathbb{S}(0, \epsilon)} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} x_j dx_1 \wedge \dots \wedge [dx_j] \wedge \dots \wedge dx_n \\ &\stackrel{\text{Stokes}}{=} \frac{1}{\epsilon^n} \int_{\mathbb{B}(0, \epsilon)} d \left(\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} x_j dx_1 \wedge \dots \wedge [dx_j] \wedge \dots \wedge dx_n \right) \\ &= \frac{1}{\epsilon^n} \int_{\mathbb{B}(0, \epsilon)} \sum_{j=1}^n dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \frac{1}{\epsilon^n} \int_{\mathbb{B}(0, \epsilon)} n dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \frac{n}{\epsilon^n} \int_{\mathbb{B}(0, \epsilon)} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \frac{n}{\epsilon^n} \operatorname{Vol}(\mathbb{B}(0, \epsilon)) = \frac{n}{\epsilon^n} \cdot \epsilon^n \operatorname{Vol}(\mathbb{B}(0, 1)) = n \operatorname{Vol}(\mathbb{B}(0, 1)) \\ &= n \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το ολοκλήρωμα αυτό είναι ανεξάρτητο της ακτίνας της μπάλας που παίρνουμε, πράγμα αναμενόμενο.

3.2 Διαφορικές Μορφές στο $\mathbb{C}$

3.2.1 Από τα dx, dy στα $dz, d\bar{z}$

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Αν $z = x + iy = (x, y)$ η μεταβλητή στο Ω , τότε το διαφορικό της f ορίζεται ως

$$df := \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy. \quad (3.17)$$

Θα περάσουμε από τα x, y στα $z, \bar{z}$.

$$z = x + iy \implies dz = dx + i dy \text{ και } \bar{z} = x - iy \implies d\bar{z} = dx - i dy.$$

Επίσης,

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \implies dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}) \text{ και } y = \frac{z - \bar{z}}{2i} \implies dy = \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z})$$

Τότε, το διαφορικό της f γίνεται

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} (dz + d\bar{z}) + \frac{1}{2i} \frac{\partial f}{\partial x} (dz - d\bar{z}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} dz + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} d\bar{z} + \frac{1}{2i} \frac{\partial f}{\partial y} dz - \frac{1}{2i} \frac{\partial f}{\partial y} d\bar{z} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} \right) d\bar{z}. \\ &:= \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε μια διάσπαση του διαφορικού σε δύο κομμάτια: $d = \partial + \bar{\partial}$, όπου $\partial f = \frac{\partial f}{\partial z} dz$ και $\bar{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$.

Σημείωση: Οι τελεστές $\frac{\partial}{\partial z}$ και $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ δρούν πάνω στην f ως ανωτέρω, δηλ. $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ και $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ αντίστοιχα. Δεν πρέπει να θεωρούνται ως "μερικές παράγωγοι" της f ως προς z και $\bar{z}$ αντίστοιχα. Παρόλαυτά, όπως θα δούμε παρακάτω, σύμφωνα με τον Κανόνα της Αλυσίδας, οι τελεστές αυτοί συμπεριφέρονται το ίδιο όπως σαν να παραγωγίζαμε ως προς x και y .

Αν $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, τότε f ολόμορφη αφού η συνθήκη αυτή είναι ισοδύναμη με τις εξισώσεις Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \iff \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} \right) dz = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} \iff \frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y} \quad (*)$$

και αν $f = f_1 + i f_2$, τότε οι εξισώσεις (*) γίνονται:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} + i \frac{\partial f_2}{\partial x} &= -i \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} + i \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) \\ \iff \frac{\partial f_1}{\partial x} &= -i^2 \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{aligned}$$

και

$$i \frac{\partial f_2}{\partial x} = -i \frac{\partial f_1}{\partial y} \iff \frac{\partial f_2}{\partial x} = -\frac{\partial f_1}{\partial y}.$$

Ορισμός 3.2.1 Μια Διαφορική Μορφή βαθμού 1, τύπου (1,0) και τάξης C^k ($k \in \mathbb{N}$) σε ένα (ανοικτό) σύνολο $U \subseteq \mathbb{C}$ είναι μια συνάρτηση $\omega : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ τάξης C^k , δηλ. $\omega = Pdz$, όπου $P \in C^k_{\mathbb{C}}(U)$. Συμβολίζουμε με $\Omega_k^{(1,0)}(U)$ το χώρο των μορφών αυτών. Μια Διαφορική Μορφή βαθμού 1, τύπου (0,1) και τάξης C^k ($k \in \mathbb{N}$) σε ένα (ανοικτό) σύνολο $U \subseteq \mathbb{C}$ είναι μια συνάρτηση $\omega : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ τάξης C^k , δηλ. $\omega = Pdz$, όπου $P \in C^k_{\mathbb{C}}(U)$. Συμβολίζουμε με $\Omega_k^{(0,1)}(U)$ το χώρο των μορφών αυτών.

Έτσι, έχουμε μια διάσπαση του χώρου των 1-Διαφορικών Μορφών (στο Ω) στο ευθύ άθροισμα των $\Omega_k^{(1,0)}(U)$ και $\Omega_k^{(0,1)}(U)$:

$$\Omega_k^1(U) = \Omega_k^{(1,0)}(U) \oplus \Omega_k^{(0,1)}(U).$$

Δηλ. κάθε $\omega \in \Omega_k^1(U)$ γράφεται ως $\omega = Pdz + Qdz$, όπου $P, Q \in C^k_{\mathbb{C}}(U)$.

Εντελώς ανάλογα, μια Διαφορική Μορφή βαθμού 2 και τάξης C^k στο Ω είναι μια απεικόνιση $\omega : U \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ τάξης C^k . Συμβολίζουμε με $\Omega_k^2(U)$ το χώρο των μορφών αυτών. Δηλ. κάθε $\omega \in \Omega_k^2(U)$ γράφεται ως $\omega = Pdz \wedge dz$, όπου $P \in C^k_{\mathbb{C}}(U)$.

Παρατηρούμε ότι

$$dz \wedge dz = 2idx \wedge dy$$

ή διαφορετικά,

$$dz \wedge dz = -2idx \wedge dy.$$

Ο τελεστής διαφορικό στο επίπεδο

3.2.2 Το pull-back Διαφορικών Μορφών στο επίπεδο

Σημαντικό εργαλείο στη μελέτη των διαφορικών μορφών όπως είδαμε στα προηγούμενα είναι το pull-back (η ανάσχυση). Θα μελετήσουμε τις διάφορες περιπτώσεις pull-back Διαφορικών Μορφών στο επίπεδο μέσω μιας C^∞ συνάρτησης. Έστω λοιπόν $f : U_1 \rightarrow U_2 \subset \mathbb{R}^2$.

Περίπτωση 1: $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτά

Αν $g : U_2 \rightarrow \mathbb{C}$ μια συνάρτηση (δηλ. μια 0-μορφή), τότε η ανάσυσή της $f^*(g) : U_1 \rightarrow \mathbb{C}$ μέσω της f ορίζεται ως

$$f^*(g) := g \circ f.$$

Αν ω μια 1-μορφή με συντελεστές στο U_2 , (δηλ. $\omega = gdt$, για κάποια C^∞ συνάρτηση g), τότε η ανάσυσή της μέσω της f ορίζεται ως

$$f^*(\omega) := (g \circ f)df = (g \circ f)f'dt.$$

Ισχύει όπως είδαμε στα προηγούμενα και η ιδιότητα $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$.

Περίπτωση 2: $U_1 \subseteq \mathbb{R}, U_2 \subseteq \mathbb{C}$ **ανοικτά**

Αν $g : U_2 \rightarrow \mathbb{C}$ μια συνάρτηση (δηλ. μια 0-μορφή), τότε η ανάσυσρή της $f^*(g) : U_1 \rightarrow \mathbb{C}$ μέσω της f ορίζεται όπως και πριν ως

$$f^*(g) := g \circ f.$$

Αν ω μια 1-μορφή με συντελεστές στο U_2 , (δηλ. $\omega = Pdx + Qdy$, για κάποιες C^∞ συναρτήσεις P, Q), τότε η ανάσυσρή της μέσω της f ορίζεται ως

$$f^*(\omega) := (P \circ f)d(x \circ f) + (Q \circ f)d(y \circ f).$$

Αν $f = (f_1, f_2) = f_1 + if_2$, τότε ο πιο πάνω τύπος γίνεται

$$f^*(\omega) := [(P \circ f)f_1' + (Q \circ f)f_2']dt.$$

Η 1-Διαφορική Μορφή ω μπορεί να εκφραστεί και ως προς τη βάση $dz, d\bar{z}$, έστω $\omega = Adz + Bd\bar{z}$. Έτσι, μπορούμε με έναν απλό υπολογισμό να πάρουμε τον αντίστοιχο τύπο για την ανάσυσρή της ω μέσω της f ως εξής:

$$\begin{aligned} f^*(\omega) &= (A \circ f)df + (B \circ f)d\bar{f} \\ &= (A \circ f)(f'dt) + (B \circ f)(\bar{f}'dt) \\ &= (A \circ f) \left(\frac{df_1}{dt}dt + i\frac{df_2}{dt}dt \right) + (B \circ f) \left(\frac{df_1}{dt}dt - i\frac{df_2}{dt}dt \right) \\ &= (A \circ f) \left(\frac{df_1}{dt} + i\frac{df_2}{dt} \right) dt + (B \circ f) \left(\frac{df_1}{dt} - i\frac{df_2}{dt} \right) dt. \end{aligned}$$

Ισχύει όπως είδαμε στα προηγούμενα και η ιδιότητα $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$.

Περίπτωση 3: $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{C}$ **ανοικτά**

Αν $g : U_2 \rightarrow \mathbb{C}$ μια συνάρτηση (δηλ. μια 0-μορφή), τότε η ανάσυσρή της $f^*(g) : U_1 \rightarrow \mathbb{C}$ μέσω της f ορίζεται όπως και πριν ως

$$f^*(g) := g \circ f.$$

Αν ω μια 1-μορφή με συντελεστές στο U_2 , (δηλ. $\omega = Pdx + Qdy$, για κάποιες C^∞ συναρτήσεις P, Q), τότε η ανάσυσρή της μέσω της f ορίζεται ως

$$\begin{aligned} f^*(\omega) &:= (P \circ f)d(x \circ f) + (Q \circ f)d(y \circ f) = (P \circ f)df_1 + (Q \circ f)df_2 \\ &= (P \circ f) \left[\frac{\partial f_1}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial f_1}{\partial \eta}d\eta \right] + (Q \circ f) \left[\frac{\partial f_2}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial f_2}{\partial \eta}d\eta \right], \\ &= \left((P \circ f)\frac{\partial f_1}{\partial \xi} + (Q \circ f)\frac{\partial f_2}{\partial \xi} \right) d\xi + \left((P \circ f)\frac{\partial f_1}{\partial \eta} + (Q \circ f)\frac{\partial f_2}{\partial \eta} \right) d\eta, \end{aligned}$$

όπου $f = (f_1, f_2) = f_1 + if_2$, $z = x + iy = (x, y) \in U_2$ και $\zeta = \xi + i\eta = (\xi, \eta) \in U_1$. Η 1-Διαφορική Μορφή ω μπορεί να εκφραστεί και ως προς τη βάση $\{dz, d\bar{z}\}$,

έστω $\omega = Adz + Bd\bar{z}$. Έτσι, μπορούμε με έναν απλό υπολογισμό να πάρουμε τον αντίστοιχο τύπο για την ανάστροψη της ω μέσω της f ως εξής:

$$\begin{aligned} f^*(\omega) &= (A \circ f)df + (B \circ f)d\bar{f} \\ &= (A \circ f) \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

Αν η ω είναι μια διαφορική μορφή τάξης 2, δηλ. $\omega = Pdx \wedge dy$, τότε

$$\begin{aligned} f^*(\omega) &= (P \circ f)f^*(dx) \wedge f^*(dy) = (P \circ f)d(x \circ f) \wedge d(y \circ f) = (P \circ f)df_1 \wedge df_2 \\ &= (P \circ f) \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial f_1}{\partial \eta} d\eta \right) \wedge \left(\frac{\partial f_2}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial f_2}{\partial \eta} d\eta \right) \right] \\ &= (P \circ f) \left[\frac{\partial f_1}{\partial \xi} \frac{\partial f_2}{\partial \eta} - \frac{\partial f_1}{\partial \eta} \frac{\partial f_2}{\partial \xi} \right] d\xi \wedge d\eta \\ &= (P \circ f)|J(f)|d\xi \wedge d\eta, \end{aligned}$$

ο οποίος τύπος συμφωνεί με τον και αφού $\forall (x, y) \in U_2$, $\Omega_{(x,y)}^2 \mathbb{C} = \text{span}\{dx \wedge dy\} = \text{span}\{dz \wedge d\bar{z}\}$, έχουμε ότι $\omega = Adz \wedge d\bar{z}$, για κάποια C^∞ συνάρτηση A . Συνεπώς,

$$\begin{aligned} f^*(\omega) &= (A \circ f)df \wedge d\bar{f} \\ &= (A \circ f) \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta} d\zeta + \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} d\bar{\zeta} \right) \wedge \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \zeta} d\zeta + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\zeta}} d\bar{\zeta} \right) \\ &= (A \circ f) \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial \zeta} + i \frac{\partial f_2}{\partial \zeta} \right) d\zeta + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \bar{\zeta}} + i \frac{\partial f_2}{\partial \bar{\zeta}} \right) d\bar{\zeta} \right] \wedge \\ &\quad \wedge \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial \zeta} - i \frac{\partial f_2}{\partial \zeta} \right) d\zeta + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \bar{\zeta}} - i \frac{\partial f_2}{\partial \bar{\zeta}} \right) d\bar{\zeta} \right] \\ &= (A \circ f) \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial \zeta} \right)^2 - \left(\frac{\partial f_1}{\partial \bar{\zeta}} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \zeta} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial \zeta} \right)^2 \right] d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \\ &= (A \circ f) \left(\left| \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right|^2 - \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} \right|^2 \right) d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \end{aligned}$$

Ισχύει όπως είδαμε στα προηγούμενα και η ιδιότητα $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$.

3.2.3 Διαφορικές Μορφές στο $\mathbb{C}^n$

Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ανοικτό και $u \in C^1(\Omega)$. Αν κάθε $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ έχει $z_i = x_{2i-1} + ix_{2i}$, $1 \leq i \leq n$, τότε, ανάλογα με την περίπτωση της μιας μιγαδικής μεταβλητής, ορίζουμε

$$\frac{\partial}{\partial z_j} := \left(\frac{\partial}{\partial x_{2j-1}} + \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_{2j}} \right) \equiv \partial_j, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} := \left(\frac{\partial}{\partial x_{2j-1}} - \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_{2j}} \right) \equiv \bar{\partial}_j.$$

Τότε,

$$\begin{aligned} du &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial z_j} \cdot dz_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j} \cdot d\bar{z}_j \\ &= \sum_{j=1}^n \partial_j u dz_j + \sum_{j=1}^n \bar{\partial}_j u d\bar{z}_j \\ &:= \partial u + \bar{\partial} u \end{aligned}$$

στο Ω . Δηλ.

$$du = \partial u + \bar{\partial} u.$$

Τώρα, θα εισαγάγουμε ένα συμβολισμό για τις Διαφορικές Μορφές, ο οποίος θα μας διευκολύνει:

Ορισμός 3.2.2 Διαφορικές Μορφές που είναι γραμμικοί συνδυασμοί των dz_j λέγονται $(1, 0)$ - διαφορικές μορφές, ενώ Δ.Μ. που είναι γραμμικοί συνδυασμοί των $d\bar{z}_j$ λέγονται $(0, 1)$ - διαφορικές μορφές. [Συνεπώς, με το συμβολισμό αυτό, το ∂u είναι το τμήμα του du τύπου $(1, 0)$ ενώ το $\bar{\partial} u$ είναι το τμήμα του du τύπου $(0, 1)$]. Μια Δ.μ. ω λέγεται τάξης (p, q) αν γράφεται στη μορφή

$$\omega = \sum_{|I|=p} \sum_{|J|=q} \omega_{I,J} dz_I \wedge d\bar{z}_J,$$

όπου $I = (i_1, i_2, \dots, i_p)$, $J = (j_1, j_2, \dots, j_q)$ πολυδείκτες, δηλ. ακολουθίες από δείκτες μεταξύ 1 και n ($0 \leq p, q \leq n$) και

$$dz_I = dz_{i_1} \wedge dz_{i_2} \wedge \dots \wedge dz_{i_p},$$

$$d\bar{z}_J = d\bar{z}_{j_1} \wedge d\bar{z}_{j_2} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}.$$

■

Κάθε Δ.Μ. μπορεί να γραφτεί κατά μοναδικό τρόπο σε αθροίσματα τύπου (p, q) . Τώρα, αν

$$\omega = \sum_{|I|=p} \sum_{|J|=q} \omega_{I,J} dz_I \wedge d\bar{z}_J,$$

τότε το διαφορικό της ω είναι

$$d\omega = \sum_{|I|=p} \sum_{|J|=q} d\omega_{I,J} \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

το οποίο γράφεται στη μορφή

$$d\omega = \partial\omega + \bar{\partial}\omega,$$

όπου

$$\partial\omega = \sum_{I,J} \partial\omega_{I,J} \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J \quad (\text{τύπου } (p+1, q)),$$

$$\bar{\partial}\omega = \sum_{I,J} \bar{\partial}\omega_{I,J} \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J \quad (\text{τύπου } (p, q+1)).$$

Αφού $0 = d^2\omega = \partial^2\omega + (\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial)\omega + \bar{\partial}^2\omega$, και κάθε ένας από τους όρους $\partial^2\omega$, $\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial)\omega$, $\bar{\partial}^2\omega$ είναι διαφορετικού τύπου (∂^2 τύπου $(p+2, q)$, $\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial$ τύπου $(p+1, q)$ και $\bar{\partial}^2$ τύπου $(p, q+2)$) έπεται ότι $\partial^2\omega = 0$, $\partial\bar{\partial}\omega + \bar{\partial}\partial\omega = 0$, $\bar{\partial}^2\omega = 0$, δηλ. αναγκαία συνθήκη για να έχει η εξίσωση $\bar{\partial}u = \omega$ (ω τύπου $(p, q+1)$) λύση είναι η

$$\bar{\partial}\omega = 0.$$

Κεφάλαιο 4

Η $\bar{\partial}$ -εξίσωση στο επίπεδο

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα της $\bar{\partial}$ -εξίσωσης στην περίπτωση της μιας μιγαδικής μεταβλητής. Η διάσπαση του διαφορικού μη ολομόρφης συνάρτησης μας επιτρέπει την εξαγωγή ενός μη-ομογενούς τύπου Cauchy ο οποίος μας δίνει και την ολοκληρωτική αναπαράσταση της συνάρτησης αυτής.

Ορισμοί (i) Έστω $\Omega, U \subset \mathbb{C}$ όπου Ω ανοικτό συνεκτικό. Γράφουμε $U \subset\subset \Omega$ και διαβάζουμε "το Ω περιέχεται στο U " αν $\bar{U}$ συμπαγές και $\bar{U} \subseteq \Omega$.

Παρατήρηση Αν $U \subset\subset \Omega$, τότε υπάρχει μια θετική απόσταση ανάμεσα στο U και το $\partial\Omega$.

(ii) Έστω $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Ονομάζουμε φορέα της u το σύνολο

$$\text{supp}(u) := \overline{\{z \in \Omega : u(z) \neq 0\}}.$$

Λέμε ότι η u έχει συμπαγή φορέα στο Ω αν $\text{supp}(u) \subset\subset \Omega$.

(δηλ. αν υπάρχει μια περιοχή του $\partial\Omega$ στην οποία η u μηδενίζεται).

4.1 Από τα dx, dy στα $dz, d\bar{z}$ και το Θεώρημα του Stokes

Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}$ ανοικτό και $u \in C^1(\Omega)$. Αν $z = x + iy \in \Omega$, τότε

$$z = x + iy \Rightarrow dz = dx + i dy,$$

$$\bar{z} = x - iy \Rightarrow d\bar{z} = dx - i dy,$$

$$x = \frac{z+\bar{z}}{2} \Rightarrow dx = \frac{dz+d\bar{z}}{2} \text{ και } y = \frac{z-\bar{z}}{2i} \Rightarrow dy = \frac{dz-d\bar{z}}{2i}$$

Διαφορίζοντας λοιπόν τη u έχουμε:

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dz+d\bar{z}}{2} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dz-d\bar{z}}{2i} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) d\bar{z}, \end{aligned}$$

δηλ.

$$du = \frac{\partial u}{\partial z} dz + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} d\bar{z}, \quad (4.1)$$

όπου

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Παρατηρήσεις

1. Ο λόγος που κάναμε αυτή την αλλαγή είναι διότι έχουμε σπάσει έτσι το διαφορικό της u σε δύο κομμάτια, ένα "ολόμορφο" και ένα μη "ολόμορφο", η ονομασία των οποίων θα φανεί μετά, δηλ. $du = \partial u + \bar{\partial} u$.
2. Έστω $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ μια C^1 συνάρτηση, όπου Ω ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Τότε, ισχύει ότι

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = 0 \Leftrightarrow u \in \mathcal{O}(\Omega),$$

δηλ. η συνθήκη $\partial u / \partial \bar{z} = 0$ είναι ισοδύναμη με τις εξισώσεις Cauchy-Riemann. Πράγματι, αν $u = f + ig$, τότε

$$\begin{aligned} \partial u / \partial \bar{z} = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = -i \frac{\partial u}{\partial y} \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial g}{\partial x} = -i \left(\frac{\partial f}{\partial y} + i \frac{\partial g}{\partial y} \right) \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial g}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y} \end{aligned}$$

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την επίλυση του προβλήματος $\partial u / \partial \bar{z} = f$, όπου f μια C^∞ συνάρτηση με συμπαγή φορέα. Θα δούμε ότι η συνάρτηση που λύνει αυτό το πρόβλημα είναι η

$$u(z) = \iint \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}.$$

Λογικό είναι λοιπόν να αναζητήσουμε μια ολοκληρωτική αναπαράσταση για την f , όπως στην περίπτωση αναζήτησης λύσεως στο πρόβλημα $\partial u / \partial \bar{z} = 0$: με τη βοήθεια του Θεωρήματος του Stokes βρίσκουμε τον μη-ομογενή Ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy ο οποίος θα χρησιμοποιηθεί στην απόδειξη του τύπου της λύσης που αναφέραμε πιο πάνω. Στις αποδείξεις των Θεωρημάτων αυτών, ουσιαστικό σημείο είναι το ότι η f έχει συμπαγή φορέα. Το γεγονός αυτό Εδώ μπορεί να φανεί κάπως και η σημασία της γεωμετρίας του συνόρου στο οποίο θέλουμε να λύσουμε τη μη-ομογενή εξίσωση.

Επίσης, σημαντικό ρόλο παίζει το ότι στα ολοκληρώματα που προκύπτουν εμφανίζεται η συνάρτηση $z \mapsto 1/z$, η οποία είναι στον L^1_{loc} , δηλ. $\iint_K \frac{1}{|z|} dz \wedge d\bar{z} < \infty$, όταν K συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Τέτοιες συναρτήσεις λέγονται *κατανομές* (distributions). Το γεγονός αυτό μας επιτρέπει να εναλλάξουμε τη σειρά ολοκλήρωσης και διαφορίσης όσες φορές θέλουμε (από βασικά εργαλεία της Θεωρίας

Μέτρου) και έτσι να πάρουμε τα Θεωρήματα (4.2.1) και (4.2.3).

Επίσης, ας σταθούμε λίγο στη σημασία του ότι η f είναι μια C^∞ συνάρτηση με συμπαγή φορέα. Καμιά λύση της $\bar{\partial}$ -εξίσωσης $\bar{\partial}u = \partial u / \partial \bar{z} = f$, όπου f μια C^∞ συνάρτηση με συμπαγή φορέα δεν μπορεί να έχει (και αυτή) συμπαγή φορέα αν $\iint f(\zeta) d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \neq 0$, αφού αν είχε, έστω π.χ. $u = 0$, για $|z| \geq R$, τότε

$$0 = \int_{C(0,R)} u(\zeta) d\zeta \stackrel{(Stokes)}{=} \iint_{\Delta(0,R)} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}(\zeta) d\bar{\zeta} \wedge d\zeta = \iint_{\Delta(0,R)} f(\zeta) d\bar{\zeta} \wedge d\zeta \neq 0,$$

άτοπο. Αυτό όμως, στο $\mathbb{C}^n$, $n > 1$ είναι πάντα δυνατόν. Έτσι C^∞ συναρτήσεις με συμπαγή φορέα μπορούν να επεκταθούν σε $\bar{\partial}$ - κλειστές $(0,1)$ -μορφές ($\bar{\partial}u = \partial u / \partial \bar{z} = f \Rightarrow (\bar{\partial} \circ \bar{\partial})u = \bar{\partial}f = 0$, αφού $\bar{\partial}^2 = 0$).

Θεώρημα 4.1.1 (Stokes) Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}$ ανοικτό τέτοιο ώστε το σύνορό του, $\partial\Omega$, να αποτελείται από πεπερασμένες C^1 - Jordan καμπύλες. Τότε, αν $u \in C^1(\bar{\Omega})$, έχουμε ότι

$$\int_{\partial\Omega} u dz = \iint_{\Omega} du \wedge dz. \quad (4.2)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$du \wedge dz = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz = 2i \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} dx \wedge dy,$$

η (4.2) γίνεται

$$\int_{\partial\Omega} u dz = 2i \iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} dx \wedge dy = \iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz. \quad (4.3)$$

Αν τώρα, η $u \in C^1(\bar{\Omega})$ (και όχι αναγκαία $u \in \mathcal{O}(\Omega)$), έχουμε το **μη-ομογενή Ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy**:

Θεώρημα 4.1.2 Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}$ ανοικτό με κατά τμήματα ομαλό σύνορο και $u \in C^1(\bar{\Omega})$. Τότε,

$$u(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{\partial\Omega} \frac{u(z)}{\zeta - z} dz + \iint_{\Omega} \frac{\partial u / \partial \bar{z}}{\zeta - z} dz \wedge d\bar{z} \right\}, \forall \zeta \in \Omega. \quad (4.4)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\zeta \in \Omega$ σταθεροποιημένο. Θέτουμε

$$\Omega_\epsilon := \{z \in \Omega : |z - \zeta| > \epsilon\}, \text{ όπου } 0 < \epsilon < \text{dist}(\zeta, \partial\Omega).$$

Τότε, η συνάρτηση $z \mapsto \frac{1}{z-\zeta}$, $z \in \Omega_\epsilon$ είναι ολόμορφη (στο Ω_ϵ). Επομένως,

$$d \left(\frac{u(z)}{\zeta - z} dz \right) = \frac{\partial u / \partial \bar{z}}{\zeta - z} dz \wedge d\bar{z}$$

και εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Stokes στη συνάρτηση $u(z)/(\zeta - z)$, $z \in \Omega_\epsilon$, παίρνουμε

$$\int_{\partial\Omega_\epsilon} \frac{u(z)}{\zeta - z} dz = \iint_{\Omega_\epsilon} \frac{\partial u / \partial \bar{z}}{\zeta - z} dz \wedge d\bar{z}. \quad (4.5)$$

Αφού $\partial\Omega_\epsilon = \partial\Omega \setminus C(\zeta, \epsilon)$, η (4.5) γίνεται

$$\int_{\partial\Omega} \frac{u(z)}{\zeta - z} dz - \int_{C(\zeta, \epsilon)} \frac{u(z)}{\zeta - z} dz = \iint_{\Omega_\epsilon} \frac{\partial u / \partial \bar{z}}{\zeta - z} dz \wedge d\bar{z}. \quad (4.6)$$

[Εδώ το $\partial\Omega$ είναι προσανατολισμένο έτσι ώστε το Ω να βρίσκεται αριστερά του $\partial\Omega$]. Θεωρώντας την παραμέτρηση $\zeta - z = \epsilon e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$ του $C(\zeta, \epsilon)$, έχουμε

$$\int_{C(\zeta, \epsilon)} \frac{u(z)}{\zeta - z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{u(\zeta + \epsilon e^{i\theta})}{\epsilon e^{i\theta}} i\epsilon e^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} u(\zeta + \epsilon e^{i\theta}) d\theta.$$

Όμως, (ουσιαστικά) λόγω της συνέχειας της συνάρτησης u έπεται ότι

$$\int_0^{2\pi} u(\zeta + \epsilon e^{i\theta}) d\theta \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} 2\pi u(\zeta).$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{2\pi} u(\zeta + \epsilon e^{i\theta}) d\theta - 2\pi u(\zeta) \right| &= \left| \int_0^{2\pi} u(\zeta + \epsilon e^{i\theta}) d\theta - \int_0^{2\pi} u(\zeta) d\theta \right| \\ &= \left| \int_0^{2\pi} [u(\zeta + \epsilon e^{i\theta}) - u(\zeta)] d\theta \right| \\ &\leq \int_0^{2\pi} |u(\zeta + \epsilon e^{i\theta}) - u(\zeta)| d\theta \\ &\leq L([0, 2\pi]) \cdot \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |u(\zeta + \epsilon e^{i\theta}) - u(\zeta)| \\ &= 2\pi \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |u(\zeta + \epsilon e^{i\theta}) - u(\zeta)| \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} 0, \end{aligned}$$

από τη συνέχεια της συνάρτησης u . Συνεπώς, βρήκαμε ότι

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C(\zeta, \epsilon)} \frac{u(z)}{\zeta - z} dz \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} u(\zeta). \quad (4.7)$$

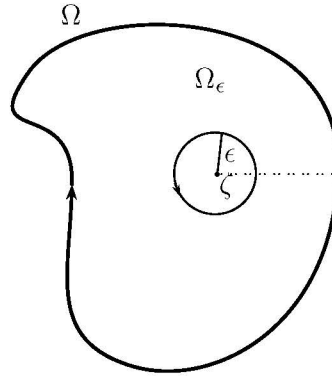
Μένει λοιπόν να δείξουμε ότι

$$\iint_{\Omega_\epsilon} \frac{\partial u / \partial \bar{z}}{\zeta - z} dz \wedge d\bar{z} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} \iint_{\Omega} \frac{\partial u / \partial \bar{z}}{\zeta - z} dz \wedge d\bar{z}.$$

Αυτό όμως είναι συνέπεια του Θεωρήματος Κυριαρχημένης Σύγκλισης, αφού η συνάρτηση $z \mapsto \frac{1}{z - \zeta}$ ανήκει στον $L^1(\Omega)$. Άρα,

$$\frac{1}{2\pi i} \iint_{\Omega_\epsilon} \frac{\partial u / \partial \bar{z}}{\zeta - z} dz \wedge d\bar{z} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi i} \iint_{\Omega} \frac{\partial u / \partial \bar{z}}{\zeta - z} dz \wedge d\bar{z}. \quad (4.8)$$

Το αποτέλεσμα έπεται από τις (4.7), (4.8). ■



4.2 Η $\bar{\partial}$ - εξίσωση με συμπαγή φορέα

Από το προηγούμενο Θεώρημα, παρατηρούμε ότι αν $u \in \mathcal{O}(\Omega)$, τότε, $\partial u / \partial \bar{z} = 0$ και άρα,

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial u / \partial \bar{z}}{\zeta - z} dz \wedge d\bar{z} = 0.$$

Δηλ. έχουμε τον Ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy για ολόμορφες συναρτήσεις (σε ανοικτά σύνολα). Συνεπώς, λαμβάνοντας υπόψιν το συμβολισμό $du = \partial u + \bar{\partial} u$, έχουμε ότι η παράσταση $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{u(z)}{\zeta - z} dz$ αντιστοιχεί στο “ολόμορφο κομμάτι” της u και η παράσταση $\iint_{\Omega} \frac{\partial u / \partial \bar{z}}{\zeta - z} dz \wedge d\bar{z}$ στο “μη ολόμορφο” κομμάτι της u υπό την έννοια :

Θεώρημα 4.2.1 Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}$ ανοικτό φραγμένο και $f \in C^1(\Omega)$ φραγμένη. Τότε, η συνάρτηση $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ που ορίζεται ως

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \iint_{\Omega} \frac{f(\zeta) d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta - z}$$

είναι C^1 και θύνει την εξίσωση $\partial u / \partial \bar{z} = f$ στο Ω .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Καταρχήν, αφού η f είναι φραγμένη, το ολοκλήρωμα που ορίζει τη u συγκλίνει απόλυτα, επομένως η u είναι καλά ορισμένη. Έστω τώρα $a \in \Omega$. Θα δείξουμε ότι η u ικανοποιεί την εξίσωση $\partial u / \partial \bar{z} = f$ σε περιοχή του a : Γράφουμε λοιπόν $u(z) = u_1(z) + u_2(z)$, όπου

$$u_1(z) := \frac{1}{2\pi i} \iint_{\Omega} \frac{f(\zeta)(1 - \chi(\zeta))}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}$$

και

$$u_2(z) := \frac{1}{2\pi i} \iint_{\Omega} \frac{f(\zeta)\chi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta},$$

όπου $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$ με $\chi = 1$ σε περιοχή V_a του a . Όμως, για $z \in V_a$, έχουμε ότι $1 - \chi = 0$, άρα $u_1 \in \mathcal{O}(V_a)$, επομένως $\partial u_1 / \partial \bar{z} = 0$ στο V_a . Επομένως, αρκεί να

δείξουμε ότι $\partial u_2 / \partial \bar{z} = f$ στο V_a . επεκτείνουμε τη συνάρτηση χ σε όλο το $\mathbb{C}$ (κατά τετριμμένο τρόπο) ως εξής:

$$g(\zeta) = \begin{cases} f(\zeta)\chi(\zeta), & \zeta \in \Omega \\ 0, & \zeta \notin \Omega \end{cases}$$

Αφού $\text{supp}(\chi)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Ω , έπεται ότι $g \in C^1(\mathbb{C})$. Επίσης,

$$u_2(z) := \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{g(\zeta + z)}{\zeta} d\zeta \wedge d\bar{\zeta},$$

άρα, $u_2 \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$.

Για $z \in V_a$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial \bar{z}}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[\iint_{\mathbb{C}} \frac{g(\zeta + z)}{\zeta} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \right] = \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial g(\zeta + z)}{\partial \bar{z}} \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial g(\zeta + z)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial g(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta - z} \quad (*) \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα (4.1.2) στη συνάρτηση g σε ένα δίσκο $\Delta(0, R)$, όπου $R > 0$ αρκετά μεγάλο έτσι ώστε $\Delta(0, R) \subset \text{supp}(\chi)$, τότε (για $z \in V_a$) έχουμε

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \iint_{\Delta(0, R)} \frac{\partial g(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0, R)} \frac{\partial g(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Όμως, $g(\zeta) = 0$ για $\zeta \in C(0, R)$, άρα

$$g(z) = f(z)\chi(z) = \frac{1}{2\pi i} \iint_{\Delta(0, R)} \frac{\partial g(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta - z} \stackrel{(*)}{=} \frac{\partial u_2}{\partial \bar{z}}(z)$$

και το συμπέρασμα έπεται, αφού $\chi = 1$.

Παρατήρηση Από την πιο πάνω απόδειξη φαίνεται βέβαια ότι αν $f \in C^k(\Omega)$, τότε και $u \in C^k(\Omega)$.

Το ίδιο αποτέλεσμα διατυπώνεται και ως εξής:

Θεώρημα 4.2.2 Έστω μ ένα μέτρο με συμπαγή φορέα στο $\mathbb{C}$. Τότε, η συνάρτηση $u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ με

$$\zeta \mapsto u(\zeta) := \iint \frac{1}{z - \zeta} d\mu(z)$$

ορίζει μια C^∞ συνάρτηση στο $\mathbb{C} \setminus \text{supp}(\mu)$. Επιπλέον, σε κάθε ανοικτό σύνολο Ω στο οποίο ισχύει $d\mu = \frac{1}{2\pi i} \varphi dz \wedge d\bar{z}$ για κάποια $\varphi \in C^k(\Omega)$, $k \geq 1$, ισχύει ότι $u \in C^k(\Omega)$, $k \geq 1$ και $\partial u / \partial \bar{z} = \varphi$, $k \geq 1$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$u \in C^\infty(\mathbb{C} \setminus \text{supp}(\mu))$: η συνάρτηση $g : \text{supp}(\mu) \times \mathbb{C} \setminus \text{supp}(\mu) \rightarrow \mathbb{C}$ με

$$(z, \zeta) \mapsto g((z, \zeta)) := \frac{1}{z - \zeta}$$

είναι καλά ορισμένη αφού $z \neq \zeta$ και C^∞ .

$u \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \text{supp}(\mu))$: Για $z \neq \zeta$ ισχύει $\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left(\frac{1}{z-\zeta} \right) = 0$. Επομένως,

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) = \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left[\frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{1}{z-\zeta} d\mu(z) \right] = \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left(\frac{1}{z-\zeta} \right) d\mu(z) = 0.$$

Τώρα, θα δείξουμε το τελευταίο ζητούμενο πρώτα όταν $\Omega = \mathbb{C}$:

$$u(\zeta) = \iint_{\mathbb{C}} \frac{1}{z-\zeta} d\mu(z) = \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\varphi(z)}{z-\zeta} dz \wedge d\bar{z} = \iint_{\mathbb{C}} \frac{\varphi(\zeta-z)}{z} d\bar{z} \wedge dz.$$

Αφού η $z \mapsto 1/z$ είναι ολοκληρώσιμη στα συμπαγή σύνολα, μπορούμε (από Θεώρημα Σύγκλισης) να εναλλάξουμε ολοκλήρωση με παραγωγήση :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) &= \frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}} \left[\frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\varphi(\zeta-z)}{z} d\bar{z} \wedge dz \right] = \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial \varphi(\zeta-z)/\partial \bar{\zeta}}{z} d\bar{z} \wedge dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial \varphi(z)/\partial \bar{z}}{z-\zeta} dz \wedge d\bar{z}. \end{aligned}$$

Αφού το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι συνεχής απεικόνιση, έπεται ότι $u \in C^k(\mathbb{C})$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα (4.1.2) στη φ και σε ένα δίσκο $\Delta(0, R)$ αρκετά μεγάλο ώστε να περιέχει το φορέα του μ , έχουμε

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,R)} \frac{\varphi(z)}{z-\zeta} dz + \frac{1}{2\pi i} \iint_{\Delta(0,R)} \frac{\partial \varphi(z)/\partial \bar{z}}{z-\zeta} dz \wedge d\bar{z} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \iint_{\Delta(0,R)} \frac{\partial \varphi(z)/\partial \bar{z}}{z-\zeta} dz \wedge d\bar{z} = \frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta). \end{aligned}$$

Στη γενική τώρα περίπτωση όπου Ω τυχαίο ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, για $a \in \Omega$ επιλέγουμε μια συνάρτηση $\psi \in C_c^k(\Omega)$ τέτοια ώστε $\psi = 1$ σε μια περιοχή V_a του a και γράφουμε $u(\zeta) = u_1(\zeta) + u_2(\zeta)$, όπου

$$u_1(\zeta) = \iint \frac{1}{z-\zeta} d\mu_1(z) = \iint \frac{\psi(z)}{z-\zeta} d\mu(z) = \frac{1}{2\pi i} \iint \frac{\psi(z)\varphi(z)}{z-\zeta} dz \wedge d\bar{z},$$

$$u_2(\zeta) = \iint \frac{1}{z-\zeta} d\mu_2(z) = \iint \frac{1-\psi(z)}{z-\zeta} d\mu(z) = \frac{1}{2\pi i} \iint \frac{(1-\psi(z))\varphi(z)}{z-\zeta} dz \wedge d\bar{z}.$$

Αφού $\mu_2 = (1-\psi)\mu = 0$ στο V_a , έπεται ότι $u_2 = 0$ και αφού $\psi\varphi \in C_c^k(\mathbb{C})$, έπεται ότι $u_1 \in C^k(\Omega)$ και $\partial u_1/\partial \bar{\zeta} = \psi\varphi$.

Θεώρημα 4.2.3 Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}$ ανοικτό. Τότε για κάθε $f \in C^\infty(\Omega)$ υπάρχει $u \in C^\infty(\Omega)$ τέτοια ώστε $\partial u/\partial \bar{z} = f$ στο Ω .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε την ακολουθία $\{K_n\}$ των συμπαγών συνόλων όπως στην απόδειξη της 2ης μορφής του Θεωρήματος του Runge. Θεωρούμε επίσης συναρτήσεις $\chi_j \in C^\infty(\Omega)$ τέτοιες ώστε $\chi_j = 1$ σε περιοχή $\varpi(K_j)$ του K_j και θέτουμε $\phi_1 = \chi_1$, $\phi_j = \chi_j - \chi_{j-1}$, $j \geq 2$. Τότε, $\phi_j = 0$ σε περιοχή $\varpi(K_{j-1})$ του K_{j-1} και $\sum_{j=1}^\infty \phi_j = 1$ στο Ω . Πολλαπλασιάζοντας λοιπόν τη f με ϕ_j , έχουμε ότι $\phi_j \cdot f = 0$ στο $\varpi(K_{j-1})$,

οπότε, από το Θεώρημα (4.2.2), μπορούμε να βρούμε συναρτήσεις $u_j \in C^\infty(\mathbb{C})$ τέτοιες ώστε

$$\frac{\partial u_j}{\partial \bar{z}} = \phi_j \cdot f.$$

Η $u_j \in \mathcal{O}(\varpi(K_{j-1}))$, άρα, από το Θεώρημα Προσεγγίσεως του Runge, υπάρχει συνάρτηση $v_j \in \mathcal{O}(\Omega)$ τέτοια ώστε

$$|u_j(z) - v_j(z)| < \frac{1}{2^j}, \quad z \in K_{j-1}. \quad (4.9)$$

Τότε, η συνάρτηση που ορίζεται από τη σειρά $\sum_{j=1}^{\infty} (u_j - v_j)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του Ω , αφού κάθε $K \subset \Omega$ συμπαγές, περιέχεται σε κάποιο K_N . Όμως,

$$\sum_{j=1}^{\infty} (u_j - v_j) = \sum_{j=1}^m (u_j - v_j) + \sum_{j=m+1}^{\infty} (u_j - v_j). \quad (4.10)$$

Η σειρά $\sum_{j=m+1}^{\infty} (u_j - v_j)$ αποτελείται από ολόμορφες συναρτήσεις σε περιοχές του K_m , άρα είναι ολόμορφη στο εσωτερικό του K_m . Επομένως, $u \in C^\infty(\text{int}(K_m))$ και, τελικά, $u \in C^\infty(\Omega)$. Τέλος,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[\sum_{j=1}^{\infty} (u_j - v_j) \right] = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[\sum_{j=1}^m (u_j - v_j) + \sum_{j=m+1}^{\infty} (u_j - v_j) \right] \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} (u_j - v_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} u_j - \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} v_j \right] \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} u_j = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j \cdot f = f, \end{aligned}$$

στο Ω .

4.3 Το Γενικό Θεώρημα του Mittag-Leffler

Το επόμενο Θεώρημα μας λέει πως να κατασκευάσουμε ολόμορφες συναρτήσεις με δοσμένους πόλους και κύρια μέρη αυτών και γενικότερα με δοσμένες ανωμαλίες και κύρια μέρη αυτών, "διορθώνοντας" C^∞ συναρτήσεις σε ολόμορφες, γνωστό σαν το *πρόβλημα του Mittag-Leffler*. Ας σημειώσουμε ότι το Θεώρημα του Mittag-Leffler, την κλασική μορφή του οποίου είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, χρησιμοποιείται στην απόδειξη του ότι σε κάθε ανοικτό σύνολο Ω υπάρχει $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ τέτοια ώστε αυτή να μην επεκτείνεται σε ολόμορφη σε μεγαλύτερο ανοικτό σύνολο. Στο $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, το αντίστοιχο πρόβλημα αναφέρεται ως το πρόβλημα του ποιά σύνολα δεν έχουν την ιδιότητα αυτή, δηλ. ποια σύνολα είναι domains of holomorphy. Περισσότερες λεπτομέρειες όμως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Θεώρημα 4.3.1 (Mittag-Leffler) Έστω $K \subset \mathbb{C}$ ανοικτό και $\{U_j\}_j$ μια ακολουθία ανοικτών συνόλων τέτοια ώστε $K = \bigcup U_j$. Έστω ακόμη ότι $\forall j, k \in \mathbb{N}$ μας δίνεται

μια συνάρτηση $f_{j,k} \in \mathcal{O}(U_j \cap U_k)$ τέτοια ώστε $f_{j,k} + f_{k,\ell} + f_{\ell,j} = 0$, στο $U_j \cap U_\ell \cap U_k$, $\forall k, \ell, j \in \mathbb{N}$. Τότε, υπάρχουν συναρτήσεις $f_j \in \mathcal{O}(U_j)$, $j \in \mathbb{N}$ τέτοιες ώστε $f_{j,k} = f_j - f_k$ στο $U_j \cap U_k$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε μια διαμέριση $\{\chi_j\}$ της μονάδος σχετικά με το κάλυμμα $\{U_j\}$, δηλ.

- (i) $\chi_j \in C^\infty(\Omega)$,
- (ii) $0 \leq \chi_j \leq 1$,
- (iii) $\text{supp}(\chi_j) \subset U_j$ και η οικογένεια $\{\text{supp}(\chi_j)\}$ να είναι τοπικά πεπερασμένη,
- (iv) $\sum_{j \in \mathbb{N}} \chi_j = 1$ στο Ω .

Για $j \in \mathbb{N}$ ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$g_j := \sum_k \chi_k f_{j,k}.$$

Η $\chi_k f_{j,k}$ ορίζεται να είναι ίση με μηδέν στο σύνολο $U_j \setminus U_k$ γράφοντας το $U_j = (U_j \cap U_k) \cup (U_j \setminus \text{supp}(\chi_k))$ και παρατηρώντας ότι $\chi_k f_{j,k} = 0$ στο σύνολο $(U_j \setminus \text{supp}(\chi_k))$, παίρνουμε ότι $\chi_k f_{j,k} \in C^\infty(U_j)$ και αφού η οικογένεια $\{\text{supp}(\chi_j)\}$ είναι τοπικά πεπερασμένη, έπεται ότι

$$g_j := \sum_k \chi_k f_{j,k} \in C^\infty(U_j).$$

Τώρα,

$$g_j - g_k = \sum_\ell \chi_\ell f_{j,\ell} - \sum_\ell \chi_\ell f_{k,\ell} = \sum_\ell \chi_\ell [f_{j,\ell} - f_{k,\ell}] = \sum_\ell \chi_\ell f_{j,k} = f_{j,k},$$

στο $U_j \cap U_k$, αφού $\sum_\ell \chi_\ell = 1$ και $f_{j,k} + f_{k,\ell} + f_{\ell,j} = 0$, στο $U_j \cap U_\ell \cap U_k$, $\forall k, \ell, j \in \mathbb{N}$. Αφού $f_{j,k} \in \mathcal{O}(U_j \cap U_k)$, έπεται ότι $\partial f_{j,k} / \partial \bar{z} = 0$, δηλ.

$$\frac{\partial g_j}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial g_j}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial g}{\partial \bar{z}},$$

στο $U_j \cap U_k$. Ορίζοντας λοιπόν τη συνάρτηση $h : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ με $z \mapsto h(z) := \frac{\partial g_j}{\partial \bar{z}}$, στο U_j , έπεται ότι αυτή είναι καλά ορισμένη και C^∞ στο Ω . Επομένως, από το Θεώρημα (4.2.3), έπεται ότι υπάρχει $g \in C^\infty(\Omega)$ τέτοια ώστε $h = \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}$, στο Ω . Τότε, $\frac{\partial g_j}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}$, στο U_j , επομένως, $\frac{\partial g_j}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = 0$, δηλ. $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(g_j - g) = 0$, δηλ. η $f_j := g_j - g \in \mathcal{O}(U_j)$. Τέλος,

$$f_j - f_k = g_j - g - g_k + g = g_j - g_k = f_{j,k}.$$

Παρατήρηση Από το προηγούμενο Θεώρημα έπεται και η κλασική μορφή του θεωρήματος Mittag-Leffler (Θεώρημα (2.3.1)) :

Έστω Ω ένα τυχαίο ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και $A := \{a_1, a_2, \dots\}$ ένα αριθμήσιμο σύνολο σημείων του Ω χωρίς κανένα σημείο συσσώρευσης στο Ω . Έστω ακόμη ότι μας δίνονται συναρτήσεις $g_j \in \mathcal{O}(V_j \setminus \{a_j\})$, όπου V_j μια περιοχή του σημείου a_j . Τότε, υπάρχει συνάρτηση $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus A)$ τέτοια ώστε $f - g_j \in \mathcal{O}(a_j)$, δηλ. η f έχει

ανωμαλία σε κάθε a_j με κύριο μέρος της ανωμαλίας το ίδιο με το κύριο μέρος της δοθείσας συνάρτησης g_j .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αφού το A είναι διακριτό, μπορούμε να μικρύνουμε τα σύνολα V_j ούτως ώστε $V_j \cap V_k = \emptyset$ για κάθε $j \neq k$. Επίσης, το σύνολο $V_0 := \Omega \setminus A$ είναι ανοικτό και συνεπώς το σύνολο $\{V_j\}_{j=0}^\infty$ αποτελεί μια ανοικτή κάλυψη του Ω . Ακολουθώντας, ορίζουμε συναρτήσεις $f_{j,k} \in \mathcal{O}(V_j \cap V_k)$, για $j, k \geq 0$ ως εξής:

$$f_{j,k} = 0 \text{ αν } j, k \geq 1, \quad f_{0,j} = -f_{j,0} = g_j \text{ αν } j > 1 \text{ και } f_{00} = 0.$$

Οι $f_{j,k}$ είναι καλά ορισμένες και ικανοποιούν τις σχέσεις $f_{j,k} + f_{k,\ell} + f_{\ell,j} = 0$, στο $V_j \cap V_\ell \cap V_k$, $\forall k, \ell, j \geq 0$. Επομένως, απ'το προηγούμενο Θεώρημα, υπάρχουν συναρτήσεις $f_j \in \mathcal{O}(V_j)$, $j \geq 0$ τέτοιες ώστε $f_{j,k} = f_j - f_k$ στο $V_j \cap V_k$, $j \geq 0$. Ιδιαίτερος, η $f = f_0 \in \mathcal{O}(\Omega \setminus A)$ και

$$f_0 - f_j = f_{0,j} = g_j \Rightarrow f - g_j = f_j \in \mathcal{O}(a_j).$$

■

Κεφάλαιο 5

Η $\bar{\partial}$ -εξίσωση στο $\mathbb{C}^n$

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε την επίλυση της $\bar{\partial}$ -εξίσωσης για $(0,1)$ -μορφές με C_c^∞ -συντελεστές σε αντιστοιχία με τις διαφορές που υπάρχουν με τη μια μεταβλητή. Στην επίλυση της $\bar{\partial}$ -εξίσωσης στις πολλές μεταβλητές, όπως θα δούμε παρακάτω, κυρίαρχο ρόλο παίζουν οι εξισώσεις Cauchy-Riemann σε αντίθεση με την περίπτωση της μιας (μιγαδικής) μεταβλητής. Προς την κατεύθυνση αυτή ορίζονται οι Δ.Μ. στο $\mathbb{C}^n$ και αφού γίνει η διάσπαση του διαφορικού μιας C^1 συνάρτησης σε ολόμορφο και μη-ολόμορφο κομμάτι, διατυπώνεται το θεώρημα του Stokes, το οποίο με τη σειρά του θα μας δώσει τον αντίστοιχο μη ομογενή τύπο του Cauchy στο $\mathbb{C}^n$, τον τύπο των Bochner-Martinelli. Τέλος, θα δούμε το θεώρημα επέκτασης του Hartogs, ένα "γνήσιο" αποτέλεσμα στο $\mathbb{C}^n$, όταν $n > 1$.

5.1 Βασικά στοιχεία πολλών μιγαδικών μεταβλητών

Ορισμός 5.1.1 (Ανοικτή) μπάλα κέντρου $a \in \mathbb{C}^n$ και ακτίνας $r > 0$ ονομάζουμε το σύνολο

$$\mathbb{B}(a, r) := \{z \in \mathbb{C}^n : |z - a| < r\}$$

και (ανοικτό) πολυδίσκο (πολυ)ακτίνας $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ κέντρου $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ το καρτεσιανό γινόμενο n δίσκων κέντρου a_j και ακτίνας r_j , $1 \leq j \leq n$:

$$\mathbb{P}(a, r) := \prod_{i=1}^n \Delta(a, r_i) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j - a_j| < r_j, 1 \leq j \leq n\}.$$

Ένα $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ είναι ανοικτό αν $\forall a \in \Omega$ υπάρχει $\mathbb{B}(a, r)$, $r > 0$ τέτοια ώστε $\mathbb{B}(a, r) \subset \Omega$. Ένα $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ανοικτό είναι συνεκτικό $\Leftrightarrow$ το Ω είναι κατά τμήματα συνεκτικό. Ένα $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ανοικτό λέγεται και χωρίο (domain). Ας σημειώσουμε ότι ένα χωρίο δεν είναι κατανάγκη και συνεκτικό.

Με $\partial\Omega$ συμβολίζουμε το τοπολογικό σύνορο του Ω .

Αν Ω χωρίο και $z \in \Omega$, τότε με $\delta_\Omega(z)$ συμβολίζουμε την απόσταση του z από το $\partial\Omega$, δηλ.

$$\delta_\Omega(z) := \sup\{r : \mathbb{B}(z, r) \subset \Omega\}.$$

Η απόσταση δύο συνόλων $A, B \subset \mathbb{C}^n$ δίδεται από την

$$\text{dist}(A, B) := \inf\{|a - b| : a \in A, b \in B\}.$$

Αν $\Omega \subset\subset D$, τότε, $\text{dist}(\Omega, \partial D) > 0$.

Γεωμετρική Αναπαράσταση συνόλων στο $\mathbb{C}^n$ Για να αναπαραστήσουμε γεωμετρικά σύνολα στο $\mathbb{C}^n$, θεωρούμε το χάρτη

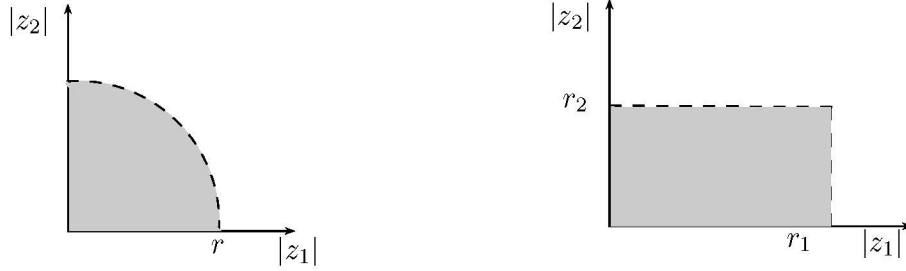
$$\tau : \mathbb{C}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n, \text{ με } a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \mapsto \tau(a) := (|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|).$$

Για παράδειγμα, στο $\mathbb{C}^2$, ο ανοικτός πολυδίσκος ακτίνας $r = (r_1, r_2)$ και κέντρου $(0, 0)$ είναι το σύνολο

$$\mathbb{P}(0, r) = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < r_1, |z_2| < r_2\}$$

και η ανοικτή μπάλα ακτίνας $r > 0$ και κέντρου $(0, 0)$ το σύνολο

$$\mathbb{B}(0, r) = \{z \in \mathbb{C}^2 : |z| < r\}.$$



5.1.1 Διαφορικές Μορφές στο $\mathbb{C}^n$

Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ανοικτό και $u \in C^1(\Omega)$. Αν κάθε $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ έχει $z_i = x_{2i-1} + ix_{2i}$, $1 \leq i \leq n$, τότε, ανάλογα με την περίπτωση της μιας μιγαδικής μεταβλητής, ορίζουμε

$$\frac{\partial}{\partial z_j} := \left(\frac{\partial}{\partial x_{2j-1}} + \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_{2j}} \right) \equiv \partial_j, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} := \left(\frac{\partial}{\partial x_{2j-1}} - \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_{2j}} \right) \equiv \bar{\partial}_j.$$

Τότε,

$$\begin{aligned} du &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial z_j} \cdot dz_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j} \cdot d\bar{z}_j \\ &= \sum_{j=1}^n \partial_j u dz_j + \sum_{j=1}^n \bar{\partial}_j u d\bar{z}_j \\ &:= \partial u + \bar{\partial} u \end{aligned}$$

στο Ω . Δηλ.

$$du = \partial u + \bar{\partial} u.$$

Τώρα, θα εισαγάγουμε ένα συμβολισμό για τις Διαφορικές Μορφές, ο οποίος θα μας διευκολύνει :

Ορισμός 5.1.2 Διαφορικές Μορφές που είναι γραμμικοί συνδυασμοί των dz_j λέγονται $(1, 0)$ - διαφορικές μορφές, ενώ Δ.Μ. που είναι γραμμικοί συνδυασμοί των $d\bar{z}_j$ λέγονται $(0, 1)$ - διαφορικές μορφές. [Συνεπώς, με το συμβολισμό αυτό, το ∂u είναι το τμήμα του du τύπου $(1, 0)$ ενώ το $\bar{\partial} u$ είναι το τμήμα του du τύπου $(0, 1)$].

Μια Δ.μ. ω λέγεται τάξης (p, q) αν γράφεται στη μορφή

$$\omega = \sum_{|I|=p} \sum_{|J|=q} \omega_{I,J} dz_I \wedge d\bar{z}_J,$$

όπου $I = (i_1, i_2, \dots, i_p)$, $J = (j_1, j_2, \dots, j_q)$ πολυδείκτες, δηλ. ακολουθίες από δείκτες μεταξύ 1 και n ($0 \leq p, q \leq n$) και

$$dz_I = dz_{i_1} \wedge dz_{i_2} \wedge \dots \wedge dz_{i_p},$$

$$d\bar{z}_J = d\bar{z}_{j_1} \wedge d\bar{z}_{j_2} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}.$$

■

Κάθε Δ.Μ. μπορεί να γραφτεί κατά μοναδικό τρόπο σε αθροίσματα τύπου (p, q) . Τώρα, αν

$$\omega = \sum_{|I|=p} \sum_{|J|=q} \omega_{I,J} dz_I \wedge d\bar{z}_J,$$

τότε το διαφορικό της ω είναι

$$d\omega = \sum_{|I|=p} \sum_{|J|=q} d\omega_{I,J} \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

το οποίο γράφεται στη μορφή

$$d\omega = \partial\omega + \bar{\partial}\omega,$$

όπου

$$\partial\omega = \sum_{I,J} \partial\omega_{I,J} \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J \quad (\text{τύπου } (p+1, q)),$$

$$\bar{\partial}\omega = \sum_{I,J} \bar{\partial}\omega_{I,J} \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J \quad (\text{τύπου } (p, q+1)).$$

Αφού $0 = d^2\omega = \partial^2\omega + (\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial)\omega + \bar{\partial}^2\omega$, και κάθε ένας από τους όρους $\partial^2\omega$, $\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial\omega$, $\bar{\partial}^2\omega$ είναι διαφορετικού τύπου (∂^2 τύπου $(p+2, q)$, $\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial$ τύπου $(p+1, q)$ και $\bar{\partial}^2$ τύπου $(p, q+2)$) έπεται ότι $\partial^2\omega = 0$, $\partial\bar{\partial}\omega + \bar{\partial}\partial\omega = 0$, $\bar{\partial}^2\omega = 0$, δηλ. αναγκαία συνθήκη για να έχει η εξίσωση $\bar{\partial}u = \omega$ (ω τύπου $(p, q+1)$) λύση είναι η

$$\bar{\partial}\omega = 0.$$

Παρακάτω θα μελετήσουμε το $\bar{\partial}$ -πρόβλημα για $(0, 1)$ -μορφές μόνο. Τώρα διατυπώνουμε (ξανά) το Θεώρημα του Stokes σύμφωνα με τη διάσπαση των Δ.Μ. που κάναμε:

Θεώρημα 5.1.1 (Stokes) Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ένα ανοικτό σύνολο με C^1 σύνορο. Έστω ω μια διαφορική μορφή με συνεπείς στο $C^1(\bar{\Omega})$. Τότε,

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega = \int_{\Omega} (\partial\omega + \bar{\partial}\omega).$$

Η μορφή όγκου Όπως γνωρίζουμε, στο $\mathbb{R}^n$, ο όγκος $Vol(\mathbb{B}_n(a, r))$ της μπάλας με κέντρο ένα σημείο a και ακτίνας $r > 0$ βρίσκεται ολοκληρώνοντας τη Διαφορική Μορφή στοιχείου όγκου, $dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$ (στην μπάλα) και το οποίο δίδεται με τη βοήθεια της συνάρτησης Γ από τον τύπο

$$Vol(\mathbb{B}_n(a, r)) = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)}.$$

Αντιστοίχως, στο $\mathbb{C}^n$, η μορφή όγκου είναι η

$$\begin{aligned} dVol(z) &:= \left(\frac{1}{2i}\right)^n (dz_1 \wedge d\bar{z}_1) \wedge \dots \wedge (dz_n \wedge d\bar{z}_n) \\ &= \left(\frac{1}{2i}\right)^n (2idx_2 \wedge dx_1) \wedge \dots \wedge (2idx_{2n} \wedge dx_{2n-1}) \\ &= (dx_2 \wedge dx_1) \wedge \dots \wedge (dx_{2n} \wedge dx_{2n-1}) \\ &= (dx_1 \wedge dx_2) \wedge \dots \wedge (dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}) \end{aligned}$$

Ορισμός 5.1.3 Στο $\mathbb{C}^n$, θέτουμε

$$\eta(z) := \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} z_j dz_1 \wedge \dots \wedge (j) \wedge \dots \wedge dz_n,$$

όπου με (j) εννοούμε ότι απουσιάζει ο όρος z_j . Η Διαφορική Μορφή η λέγεται Διαφορική Μορφή Leray και η σημασία της θα φανεί μέσω των επόμενων παρατηρήσεων:

$$\begin{aligned} \eta(z) &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} z_j dz_1 \wedge \dots \wedge (j) \wedge \dots \wedge dz_n \\ \Rightarrow d\eta(z) &= d \left(\sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} z_j dz_1 \wedge \dots \wedge (j) \wedge \dots \wedge dz_n \right) \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} dz_j \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge (j) \wedge \dots \wedge dz_n \\ &= \sum_{j=1}^n dz_1 \wedge \dots \wedge dz_j \wedge \dots \wedge dz_n \\ &= ndz_1 \wedge dz_2 \wedge \dots \wedge dz_n \end{aligned}$$

και θέτοντας $w(z) := dz_1 \wedge dz_2 \wedge \dots \wedge dz_n$, η τελευταία σχέση γράφεται

$$\eta(z) = nw(z).$$

Εντελώς ανάλογα, βλέπουμε ότι

$$\eta(\bar{z}) = nw(\bar{z}),$$

δηλ. $d\eta(\bar{z}) = \bar{\partial}\eta(\bar{z}) = nw(\bar{z})$. Τώρα, για κάθε $z_0 \in \mathbb{C}^n$ και για κάθε $r > 0$, από το Θεώρημα του Stokes έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathbb{B}(z_0, r)} \eta(\bar{z}) \wedge w(z) &= \int_{\mathbb{B}(z_0, r)} d[\eta(\bar{z}) \wedge w(z)] \\ &= \int_{\mathbb{B}(z_0, r)} [\bar{\partial}\eta(\bar{z})] \wedge w(z) \\ &= n \int_{\mathbb{B}(z_0, r)} w(\bar{z}) \wedge w(z). \end{aligned}$$

Όμως,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}(z_0, r)} w(\bar{z}) \wedge w(z) &= r^{2n} \int_{\mathbb{B}(0, 1)} w(\bar{z}) \wedge w(z) \\ &= r^{2n} \int_{\mathbb{B}(0, 1)} (-1)^{\binom{n}{2}} (dz_1 \wedge d\bar{z}_1) \wedge \dots \wedge (dz_n \wedge d\bar{z}_n) \\ &= (-1)^{\binom{n}{2}} r^{2n} (2i)^n \int_{\mathbb{B}(0, 1)} dVol(z) \\ &= (-1)^{\frac{n^2-n}{2}} \cdot r^{2n} \cdot (2i)^n \cdot Vol(\mathbb{B}(0, 1)). \end{aligned}$$

5.2 Η $\bar{\partial}$ -εξίσωση στο $\mathbb{C}^n$, $n > 1$

Το ανάλογο πρόβλημα της $\bar{\partial}$ -εξίσωσης στην περίπτωση των πολλών μιγαδικών μεταβλητών είναι το εξής: Έστω $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ δοθείσες C^∞ συναρτήσεις με συμπαγή φορέα στο $\mathbb{C}^n$. Αναζητούμε μια C^1 συνάρτηση u τέτοια ώστε

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j} = \psi_j, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Έχουμε δηλ. ένα σύστημα μη ομογενών εξισώσεων C-R.

Αφού

$$\frac{\partial u^2}{\partial \bar{z}_i \partial \bar{z}_j} = \frac{\partial u^2}{\partial \bar{z}_j \partial \bar{z}_i},$$

απαραίτητη συνθήκη για να έχει λύση το πρόβλημα είναι η

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial \bar{z}_j} = \frac{\partial \psi_j}{\partial \bar{z}_i}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Λεδομένης της πιο πάνω συνθήκης, θα δούμε ότι μια λύση δίνεται από τον τύπο

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\psi_j(z_1, \dots, z_{j-1}, \zeta, z_{j+1}, \dots, z_n)}{\zeta - z_j} dVol(\zeta).$$

5.2.1 Ο τύπος των Bochner-Martinelli

Θεώρημα 5.2.1 Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ένα ανοικτό σύνολο με C^1 σύνορο. Έστω επίσης $f \in C^1(\bar{\Omega})$. Τότε, για κάθε $z \in \Omega$ ισχύει

$$f(z) = \frac{1}{nW(n)} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta) \eta(\bar{\zeta} - \bar{z}) \wedge \omega(\zeta)}{|\zeta - z|^{2n}} - \frac{1}{nW(n)} \int_{\Omega} \frac{\bar{\partial}f(\zeta)}{|\zeta - z|^{2n}} \wedge \eta(\bar{\zeta} - \bar{z}) \wedge \omega(\zeta)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $z \in \Omega$ σταθεροποιημένο και $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε $0 < \epsilon < \text{dist}(z, \partial\Omega)$. Έστω

$$\Omega_\epsilon := \{\zeta \in \Omega : |\zeta - z| > \epsilon\} = \Omega \setminus \overline{\mathbb{B}(z, \epsilon)}.$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Stokes στο Ω_ϵ , στη μορφή

$$u(\zeta) := \frac{f(\zeta)\eta(\bar{\zeta} - \bar{z}) \wedge \omega(\zeta)}{|\zeta - z|^{2n}},$$

παίρνουμε

$$\int_{\partial\Omega} u(\zeta) - \int_{\partial\mathbb{B}(z, \epsilon)} u(\zeta) = \int_{\Omega_\epsilon} d(u(\zeta)). \quad (5.1)$$

Όμως,

$$\begin{aligned} d(u(\zeta)) &= \partial u(\zeta) + \bar{\partial} u(\zeta) = \bar{\partial} u(\zeta) \\ &= \frac{\bar{\partial} f(\zeta) \wedge \eta(\bar{\zeta} - \bar{z}) \wedge \omega(\zeta)}{|\zeta - z|^{2n}} + f(\zeta) \cdot \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_j} \left(\frac{\bar{\zeta}_j - \bar{z}_j}{|\zeta - z|^{2n}} \right) \right] \omega(\bar{\zeta}) \wedge \omega(\zeta). \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$(5.3)$$

Όμως,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_j} \left(\frac{\bar{\zeta}_j - \bar{z}_j}{|\zeta - z|^{2n}} \right) = \frac{1}{|\zeta - z|^{2n}} - n \frac{|\bar{\zeta}_j - \bar{z}_j|^2}{|\zeta - z|^{2n+2}},$$

[αφού] άρα,

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_j} \left(\frac{\bar{\zeta}_j - \bar{z}_j}{|\zeta - z|^{2n}} \right) = n \frac{1}{|\zeta - z|^{2n}} - n \sum_{j=1}^n \frac{|\bar{\zeta}_j - \bar{z}_j|^2}{|\zeta - z|^{2n+2}} = 0.$$

Συνεπώς η (5.2) γίνεται

$$d(u(\zeta)) = \frac{\bar{\partial} f(\zeta) \wedge \eta(\bar{\zeta} - \bar{z}) \wedge \omega(\zeta)}{|\zeta - z|^{2n}}.$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν στην (5.1), έχουμε

$$\int_{\partial\Omega} u(\zeta) - \int_{\partial\mathbb{B}(z, \epsilon)} u(\zeta) = \int_{\Omega_\epsilon} \frac{\bar{\partial} f(\zeta) \wedge \eta(\bar{\zeta} - \bar{z}) \wedge \omega(\zeta)}{|\zeta - z|^{2n}}.$$

Ακολουθώντας

$$\int_{\partial\mathbb{B}(z, \epsilon)} u(\zeta) = f(z) \int_{\partial\mathbb{B}(z, \epsilon)} \frac{\eta(\bar{\zeta} - \bar{z}) \wedge \omega(\zeta)}{|\zeta - z|^{2n}} + \int_{\partial\mathbb{B}(z, \epsilon)} \frac{(f(\zeta) - f(z))\eta(\bar{\zeta} - \bar{z}) \wedge \omega(\zeta)}{|\zeta - z|^{2n}}.$$

Αφού $|f(\zeta) - f(z)| < C|\zeta - z|$, και κάθε όρος της $\eta(\bar{\zeta} - \bar{z})$ έχει έναν παράγοντα από κάποιο $(\bar{\zeta}_j - \bar{z}_j)$, έπεται ότι στο δεύτερο ολοκλήρωμα η ολοκληρωτέα συνάρτηση

είναι της τάξεως του $|\zeta - z|^{-2n+2} \approx \epsilon^{-2n+2}$ και αφού το χωρίο πάνω στο οποίο γίνεται η ολοκλήρωση έχει εμβαδόν $\approx \epsilon^{-2n+2}$, έπεται ότι

$$\int_{\partial \mathbb{B}(z, \epsilon)} \frac{(f(\zeta) - f(z))\eta(\bar{\zeta} - \bar{z}) \wedge \omega(\zeta)}{|\zeta - z|^{2n}} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} 0.$$

Επίσης, από το Λήμμα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_{\partial \mathbb{B}(z, \epsilon)} \frac{\eta(\bar{\zeta} - \bar{z}) \wedge \omega(\zeta)}{|\zeta - z|^{2n}} &= \epsilon^{-2n} f(z) \int_{\partial \mathbb{B}(z, \epsilon)} \eta(\bar{\zeta} - \bar{z}) \wedge \omega(\zeta) \\ &= n \epsilon^{-2n} f(z) \int_{\partial \mathbb{B}(z, \epsilon)} \omega(\bar{\zeta}) \wedge \omega(\zeta) \\ &= n W(n) f(z). \end{aligned}$$

Τέλος, αφού η $\bar{\partial}f$ είναι φραγμένη και η παράσταση $\left| \frac{\eta(\bar{\zeta} - \bar{z})}{|\zeta - z|^{2n}} \right|$ είναι της τάξεως του $|\zeta - z|^{-2n+1}$, έπεται ότι το $\int_{\Omega_\epsilon} \frac{\bar{\partial}f(\zeta) \wedge \eta(\bar{\zeta} - \bar{z}) \wedge \omega(\zeta)}{|\zeta - z|^{2n}}$ συγκλίνει απόλυτα καθώς το $\epsilon \rightarrow 0^+$.

Έπεται λοιπόν ότι

$$f(z) = \frac{1}{nW(n)} \int_{\partial \Omega} \frac{f(\zeta)\eta(\bar{\zeta} - \bar{z}) \wedge \omega(\zeta)}{|\zeta - z|^{2n}} - \frac{1}{nW(n)} \int_{\Omega} \frac{\bar{\partial}f(\zeta)}{|\zeta - z|^{2n}} \wedge \eta(\bar{\zeta} - \bar{z}) \wedge \omega(\zeta).$$

Πόρισμα 5.2.1 Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ φραγμένο με C^1 σύνορο και $f \in C^1(\bar{\Omega})$ με $\bar{\partial}f = 0$ στο Ω . Τότε,

$$f(z) = \frac{1}{nW(n)} \int_{\partial \Omega} \frac{f(\zeta)\eta(\bar{\zeta} - \bar{z}) \wedge \omega(\zeta)}{|\zeta - z|^{2n}}. \quad (5.4)$$

Παρατηρήσεις

1. Ως πόρισμα του προηγούμενου Θεωρήματος λαμβάνουμε το Θεώρημα (4.1.2).
2. Για $n = 1$, η (5.4) γίνεται

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z},$$

ο οποίος είναι ο Ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy στη μια μεταβλητή. Αυτό είναι εντελώς αναμενόμενο, γιατί η υπόθεση $\bar{\partial}f = 0$ είναι οι εξισώσεις C-R.

3. Ο πυρήνας Cauchy (:η $z \mapsto 1/(\zeta - z)$) είναι ολόμορφη συνάρτηση ως προς z . Το γεγονός αυτό μας επιτρέπει να κατασκευάζουμε ολόμορφες συναρτήσεις ολοκληρώνοντας τον πυρήνα αυτό ως προς κάποιο μέτρο. Τα πράγματα αλλάζουν όμως στις πολλές μεταβλητές: ο αντίστοιχος πυρήνας

$$\frac{1}{|\zeta - z|^{2n}}$$

δεν είναι ολόμορφος, παρόλο που στο προηγούμενο πόρισμα βλέπουμε ότι δημιουργεί ολόμορφες (δηλ. $\bar{\partial}$ -κλειστές) συναρτήσεις. Η Δ.Μ.

$$\frac{\eta(\bar{\zeta} - \bar{z}) \wedge \omega(\zeta)}{|\zeta - z|^{2n}}$$

είναι $\bar{\partial}$ -κλειστή ως προς z ($z \neq \zeta$), αλλά όπως είπαμε δεν είναι ολόμορφη (ως προς z). Δηλ. αυτή είναι μια $\bar{\partial}$ -κλειστή Δ.Μ. μακριά από το σημείο που υπάρχει η ανωμαλία, οι συντελεστές της όμως δεν είναι ολόμορφες συναρτήσεις.

4. Από το τελευταίο πόρισμα συμπεραίνουμε ότι μια $\bar{\partial}$ -κλειστή συνάρτηση είναι C^∞ αφού μπορούμε να παραγωγίσουμε κάτω από το ολοκλήρωμα όσες φορές θέλουμε.

5.2.2 Η $\bar{\partial}$ -εξίσωση για (0,1)-μορφές με C_c^∞ -συντελεστές

Θεώρημα 5.2.2 Έστω ψ μια $\bar{\partial}$ -κλειστή (0,1)-μορφή στο $\mathbb{C}^n$ με C^∞ συντελεστές με συμπαγή φορέα. Έστω λοιπόν ότι η ψ γράφεται στη μορφή

$$\psi(z) = \sum_{j=1}^n \psi_j(z) d\bar{z}_j,$$

με $\psi_j \in C_c^\infty(\mathbb{C}^n)$. Τότε, για κάθε επιλογή του j , $1 \leq j \leq n$, η συνάρτηση

$$u_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{\psi_j(z_1, \dots, z_{j-1}, \zeta, z_{j+1}, \dots, z_n)}{\zeta - z_j} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}$$

είναι λύση της εξίσωσης $\bar{\partial}u_j = \psi$. Επιπλέον, οι συναρτήσεις u_j έχουν συμπαγή φορέα και συγκεκριμένα, $u_j \equiv 0$ στη συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C}^n \setminus \text{supp}(\psi)$ η οποία περιέχει το ∞ .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} u_j(z) &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \int_{\mathbb{C}} \frac{\psi_j(z_1, \dots, z_{j-1}, \zeta, z_{j+1}, \dots, z_n)}{\zeta - z_j} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \int_{\mathbb{C}} \frac{\psi_j(z_1, \dots, z_{j-1}, \zeta + z_j, z_{j+1}, \dots, z_n)}{\zeta} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} [\psi_j(z_1, \dots, z_{j-1}, \zeta + z_j, z_{j+1}, \dots, z_n)] \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta} \\ &\stackrel{\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \psi_k = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \psi_j}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} [\psi_k(z_1, \dots, z_{j-1}, \zeta + z_j, z_{j+1}, \dots, z_n)] \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} [\psi_k(z_1, \dots, z_{j-1}, \zeta, z_{j+1}, \dots, z_n)] \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta - z_j} \end{aligned}$$

Ακολουθώντας, παίρνοντας ένα δίσκο $\Delta(0, R)$ αρκετά μεγάλο έτσι ώστε να περιέχει το φορέα της $\zeta \mapsto \psi(z_1, \dots, z_{j-1}, \zeta, z_{j+1}, \dots, z_n)$, και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα (4.1.2), παίρνουμε τελικά ότι $\bar{\partial}u_j = \psi$.

Επιπλέον, η λύση αυτή έχει συμπαγή φορέα: Σταθεροποιούμε ένα $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Τότε, $\partial u / \partial \bar{z}_\ell = \psi_\ell(z) = 0$, για κάθε ℓ όταν το z είναι αρκετά μεγάλο. Επομένως η u είναι ολόμορφη για $|z| > R$, όταν το z είναι αρκετά μεγάλο. Όμως, $u(z) = 0$, όταν το $|z_{j+1}|$ είναι αρκετά μεγάλο. Από την Αρχή της Αναλυτικής Συνέχισης, η u είναι μηδέν στη μη φραγμένη συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C} \setminus \cup \text{supp}(\psi_j)$.

Παρατηρήσεις 1. Κάθε $C_c^\infty(\mathbb{C}^n)$ συνάρτηση μπορεί να διορθωθεί σε μια $\bar{\partial}$ -κλειστή $(0,1)$ μορφή:

Έστω ότι $n > 1$ και έστω $g \in C_c^\infty(\mathbb{C}^n)$. Μπορούμε να κατασκευάσουμε συναρτήσεις ψ_j , $1 \leq j \leq n$ τέτοιες ώστε να είναι συνελεστές μιας $\bar{\partial}$ -κλειστής $(0,1)$ -μορφής: θέτουμε

$$u(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{g(\zeta, z_2, \dots, z_n)}{\zeta - z_1} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}.$$

Ορίζουμε

$$\begin{aligned} \psi_1(z) &= g \\ \psi_2(z) &= \partial u / \partial \bar{z}_2 \\ &\vdots \\ \psi_n(z) &= \partial u / \partial \bar{z}_n. \end{aligned}$$

Τότε, η

$$\psi(z) := \sum_{j=1}^n \psi_j(z) d\bar{z}_j$$

είναι αυτή που ικανοποιεί τις ζητούμενες ιδιότητες.

2. Ο τύπος των Bochner-Martinelli δεν λύνει την $\bar{\partial}$ -εξίσωση όταν $n > 1$:

Έστω ότι $n = 2$. Από τον τύπο των Bochner-Martinelli και τον τύπο που λύνει την $\bar{\partial}$ -εξίσωση στο επίπεδο, θα έπρεπε η συνάρτηση

$$\zeta \mapsto u_0(\zeta) := -\frac{1}{2W(2)} \int \frac{\psi(\zeta)}{|\zeta - z|^4} \wedge \eta(\bar{\zeta} - \bar{z}) \wedge \omega(\zeta)$$

να ήταν λύση της $\bar{\partial}u_0 = \psi$ για $\bar{\partial}$ -κλειστές $(0,1)$ -μορφές στο $\mathbb{C}^n$ με $C_c^\infty(\mathbb{C}^n)$ συνελεστές. Αν ίσχυε αυτό, τότε από το 1. η u_0 θα έπρεπε να ήταν $\bar{\partial}$ -λύση για $(0,1)$ -μορφές του τύπου

$$\psi_0(\zeta) = g(\zeta) d\bar{\zeta}_1 + \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{(\partial g / \partial \bar{\zeta}_2)(s, \zeta_2)}{s - \zeta_1} ds \wedge d\bar{s} \right\} d\bar{\zeta}_2,$$

όπου $g \in C_c^\infty(\mathbb{C}^2)$ τυχούσα. Επομένως,

$$\begin{aligned} u_0(z) &= \frac{1}{2W(2)} \int \frac{g(\zeta)(\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1)}{|\zeta - z|^4} \omega(\zeta) \wedge \omega(\bar{\zeta}) \\ &+ \frac{1}{4\pi i W(2)} \int \frac{(\partial g / \partial \bar{\zeta}_2)(s, \zeta_2)}{s - \zeta_1} \frac{(\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2)}{|\zeta - z|^4} \omega(\zeta) \wedge \omega(\bar{\zeta}) \wedge ds \wedge d\bar{s}. \end{aligned}$$

Παίρνοντας $z \notin \text{supp}(g)$, έτσι ώστε να μην εμφανίζεται ανωμαλία όταν κάνουμε ολοκλήρωση κατά μέρη, έχουμε

$$\begin{aligned} u_0(z) &= \frac{1}{2W(2)} \int \frac{g(\zeta)(\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1)}{|\zeta - z|^4} \omega(\zeta) \wedge \omega(\bar{\zeta}) \\ &- \frac{1}{4\pi i W(2)} \int \frac{g(s, \zeta_2)}{s - \zeta_1} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_2} \left(\frac{\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2}{|\zeta - z|^4} \right) \omega(\zeta) \wedge \omega(\bar{\zeta}) \wedge ds \wedge d\bar{s}. \end{aligned}$$

Ακολουθώντας, κάνοντας κάποιες αλλαγές μεταβλητών παίρνουμε

$$u_0(z) =$$

$$= \frac{1}{2W(2)} \int g(\zeta) \left[\frac{\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1}{|\zeta - z|^4} + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_2} \left(\frac{\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2}{|(\zeta_1 - s, \zeta_2) - z|^4} \right) ds \wedge d\bar{s} \right] \wedge \omega(\zeta) \wedge \omega(\bar{\zeta}).$$

υποθέτουμε τώρα ότι $\bar{\partial}u_0(z) = \psi_0$. Τότε, από το προηγούμενο Θεώρημα, υπάρχει μια $u \in C_c^\infty(\mathbb{C}^n)$ τέτοια ώστε $\bar{\partial}u = \psi_0$. Επομένως, η $u - u_0 \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ και για z αρκετά μεγάλο, έχουμε ότι $u - u_0 = -u_0$, επομένως, η u_0 είναι ολόμορφη για z αρκετά μεγάλο. Αφού η g είναι τυχούσα, έπεται ότι η

$$z \mapsto \frac{\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1}{|\zeta - z|^4} + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_2} \left(\frac{\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2}{|(\zeta_1 - s, \zeta_2) - z|^4} \right) ds \wedge d\bar{s}$$

είναι ολόμορφη ως προς z όταν αυτό είναι αρκετά μεγάλο και το ζ αρκετά μικρό. Αυτό όμως δεν είναι πάντα σωστό (π.χ. $z_1 = 0 = \zeta$).

3. Βρήκαμε λύση u στο πρόβλημα $\bar{\partial}u = \psi$, όπου η ψ είναι μια $\bar{\partial}$ -κλειστή $(0, 1)$ -μορφή ορισμένη σε ένα χωρίο Ω στο οποίο ο φορέας της περιέχεται συμπαγώς. Η εύρεση λύσης για το πρόβλημα αυτό όταν ο φορέας της ψ δεν περιέχεται συμπαγώς στο Ω είναι πολύ πιο περίπλοκο και απαιτεί ισχυρές συνθήκες που αφορούν τη διαφορική γεωμετρία του $\partial\Omega$. Το πρόβλημα αυτό ουσιαστικά ανάγεται στο χαρακτηρισμό των domains of holomorphy (περιοχών ολομορφίας), όπως θα δούμε παρακάτω στο Θεώρημα Επέκτασης του Hartogs.

5.2.3 Το Θεώρημα του Cauchy για πολυδίσκους

Θεώρημα 5.2.3 Έστω $\mathbb{P}(a, r)$ ένας πολυδίσκος στο $\mathbb{C}^n$ ακτίνας $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ και κέντρου a . Έστω $f \in C(\mathbb{P}(a, r))$ τέτοια ώστε αυτή να είναι ολόμορφη σε κάθε μεταβλητή ξεχωριστά. Τότε,

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial\mathbb{P}(a, r)} \frac{f(\zeta) d\zeta_1 \dots d\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1) \dots (\zeta_n - z_n)}, \quad z \in \mathbb{P}(a, r).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Με επαγωγή στο n :

Για $n = 1$, έχουμε τον τύπο του Cauchy στη μια μεταβλητή. Έστω λοιπόν $n > 1$ και ότι το ζητούμενο ισχύει για $k = n - 1$. Θα δείξουμε ότι ισχύει και για n : Έστω $z \in \mathbb{P}(a, r)$ σταθεροποιημένο. Από την υπόθεση επαγωγής (στο $(z_2, \dots, z_n)$) έχουμε ότι

$$f(z_1, z_2, \dots, z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^{n-1}} \int_{\partial\mathbb{P}'(a', r')} \frac{f(z_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) d\zeta_2 \dots d\zeta_n}{(\zeta_2 - z_2) \dots (\zeta_n - z_n)}, \quad (5.5)$$

όπου $a' = (a_2, \dots, a_n)$, και $r' = (r_2, \dots, r_n)$. Για $\zeta_2, \dots, \zeta_n$ σταθεροποιημένα, η περίπτωση $n = 1$ μας δίνει

$$f(z_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_1 - a_1| = r_1} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n) d\zeta_1}{\zeta_1 - z_1}. \quad (5.6)$$

αντικαθιστώντας την (5.6) στην (5.5), παίρνουμε

$$f(z_1, z_2, \dots, z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial \mathbb{P}'(a', r') \times \{|\zeta_1 - a_1| = r_1\}} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) d\zeta_1 \dots d\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1) \dots (\zeta_n - z_n)}$$

και θεωρώντας την παραμέτρηση

$$\zeta_j = a_j + r_j e^{i\theta_j}, \quad \theta_j \in [0, 2\pi], \quad 1 \leq j \leq n$$

του $\partial \mathbb{P}'(a', r') \times \{|\zeta_1 - a_1| = r_1\}$, το τελευταίο ολοκλήρωμα γίνεται

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[0, 2\pi]^n} f(\zeta_1(\theta_1), \zeta_2(\theta_2), \dots, \zeta_n(\theta_n)) d\theta_1 \dots d\theta_n.$$

Από το θεώρημα Fubini αφού η $f \in C(\overline{\mathbb{P}(a, r)})$ και το $[0, 2\pi]^n$ είναι ορθογώνιο, το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι ίσο με

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial \mathbb{P}(a, r)} \frac{f(\zeta) d\zeta_1 \dots d\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1) \dots (\zeta_n - z_n)}$$

απόπου έπεται το συμπέρασμα.

Παρατήρηση Θα μπορούσαμε να δώσουμε τον εξής ορισμό της ολόμορφης συνάρτησης:

Ορισμός 5.2.1 Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ανοικτό. Μια $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ λέγεται ολόμορφη (στο Ω) αν $f \in C^1(\Omega)$ και ικανοποιεί το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = 0, \quad 1 \leq j \leq n, \quad z \in \Omega. \quad (5.7)$$

Κάθε συνάρτηση f η οποία ικανοποιεί το σύστημα διαφορικών εξισώσεων (5.7) ικανοποιεί τις εξισώσεις C-R σε κάθε συνεισγεγμένη z_j ξεχωριστά και άρα είναι ολόμορφη σε κάθε συνεισγεγμένη χωριστά. Όμως, ισχύει και το αντίστροφο όπως έδειξε το F. Hartogs το 1906:

κάθε συνάρτηση $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ η οποία είναι ολόμορφη σε κάθε μεταβλητή ξεχωριστά είναι ολόμορφη με την έννοια που ορίσαμε παραπάνω. Συνεπώς, η υπόθεση στον ορισμό της ολομορφίας ότι $f \in C^1(\Omega)$ είναι περιττή. Το συμπέρασμα στο Θεώρημα αυτό είναι ότι η f είναι συνεχής, άρα φραγμένη στα συμπαγή σύνολα. Επομένως, εφαρμόζοντας τον τύπο του Cauchy σε έναν πολυδίσκο $\mathbb{P}(a, r) \subset \subset \Omega$, μπορούμε να παραγωγίσουμε κάτω από το ολοκλήρωμα όσες φορές θέλουμε (χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubini) και άρα η $f \in C^\infty(\Omega)$.

Για να εκτιμήσουμε τη σημασία του Θεωρήματος του Hartogs, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^4 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

είναι C^∞ σε κάθε μεταβλητή ξεχωριστά αλλά όχι φραγμένη στο 0.

5.3 Το Θεώρημα Επέκτασης του Hartogs

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε μια βασική ιδιότητα ολομόρφων συναρτήσεων σε περισσότερες από μια διάσταση η οποία μας δίνει και μια πρώτη ουσιαστική εικόνα των διαφορών που υπάρχουν με τη Θεωρία στη μια μεταβλητή. Το 1906 ο Hartogs ανακάλυψε ένα παράδειγμα το οποίο δείχνει μια βασική ιδιότητα επέκτασης ολομόρφων συναρτήσεων στο $\mathbb{C}^n$, $n > 1$. Ας πάρουμε όμως τα πράγματα με τη σειρά ξεκινώντας από την περίπτωση της μιας μιγαδικής μεταβλητής. Στο επίπεδο, κάθε ανοικτό σύνολο Ω έχει την ιδιότητα ότι δεν μπορεί να επεκταθεί αναλυτικά σε μεγαλύτερο ανοικτό σύνολο. Για παράδειγμα αν $\Omega = \Delta(0, 1)$, τότε, η συνάρτηση f με

$$z \mapsto f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} z^{2^n}$$

ανήκει στον $C(\overline{\Delta(0, 1)}) \cap \mathcal{O}(\Delta(0, 1))$. Όμως,

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} z^{i2^n\theta},$$

η οποία είναι η πουθενά διαφορίσιμη συνάρτηση του Weierstrass. Συνεπώς, η f δεν μπορεί να επεκταθεί διαφορίσιμα σε μεγαλύτερο ανοικτό σύνολο, πόσο μάλλον αναλυτικά. Από το Θεώρημα Σύμμορφης Απεικόνισης του Riemann, κάθε ολόμορφη συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο στο επίπεδο με ομαλό σύνορο το οποίο είναι απλά συνεκτικό, δεν μπορεί να επεκταθεί σε ολόμορφη σε μεγαλύτερο ανοικτό σύνολο.

Στη γενική περίπτωση που $\Omega \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, το επιχείρημα αποδεικνύεται με τη βοήθεια του Θεωρήματος Αναπαραστάσεως Ολομόρφων Συναρτήσεων του Weierstrass:

Έστω $\{z_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία σημείων στο Ω χωρίς σημεία συσσώρευσης (στο Ω) η οποία συσσωρεύεται σε κάθε συνοριακό σημείο του Ω . Το Θεώρημα του Weierstrass μας λέει τότε ότι υπάρχει μια μη σταθερή ολόμορφη συνάρτηση f στο Ω η οποία μηδενίζεται στα σημεία z_j . Αν η f είχε ολόμορφη επέκταση έξω από το $\partial\Omega$, τότε, το $Z(f)$ θα είχε ένα εσωτερικό σημείο συσσώρευσης, άτοπο.

Τα πράγματα όμως διαφέρουν στις πολλές μεταβλητές: μερικά ανοικτά σύνολα έχουν την ιδιότητα να είναι domains of holomorphy (περιοχές ολομορφίας), για παράδειγμα αν $\Omega = \mathbb{P}(0, 1) \subset \mathbb{C}^2$, και f η πουθενά διαφορίσιμη συνάρτηση του Weierstrass, τότε, η u με $u(z_1, z_2) := f(z_1) \cdot f(z_2)$ έχει την ιδιότητα να είναι ολόμορφη στο Ω αλλά να μην επεκτείνεται αναλυτικά σε μεγαλύτερο ανοικτό σύνολο. Παράυτά, δεν είναι όλα τα σύνολα περιοχές ολομορφίας: ο Hartogs παρατήρησε ότι το χωρίο

$$\Omega = \{(z_1, z_2) : |z_1| < 2, |z_2| < 2\} \setminus \{(z_1, z_2) : |z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1\}$$

έχει την ιδιότητα ότι κάθε ολόμορφη συνάρτηση σε αυτό μπορεί να επεκταθεί αναλυτικά στο σύνολο

$$\Omega = \{(z_1, z_2) : |z_1| < 2, |z_2| < 2\}.$$

Αυτό είναι και το "φαινόμενο του Hartogs". Το πρόβλημα που προκύπτει λοιπόν είναι ο χαρακτηρισμός των περιοχών ολομορφίας, το οποίο είναι γνωστό ως το πρόβλημα του Levi. Αναφέρουμε απλώς ότι το πρόβλημα λύθηκε για $n = 2$ από τον Oka και για $n \geq 3$ από τους Oka, Bremermann και Norguet.

Το "φαινόμενο του Hartogs" στη γενική του μορφή διατυπώνεται ως εξής:

Θεώρημα 5.3.1 Έστω $n \geq 2$ και έστω $0 < r_j < 1$, $1 \leq j \leq n$. Τότε κάθε ολόμορφη συνάρτηση f στο χωρίο

$$H(r) := \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j| < 1, \text{ για } j < n, r_n < |z_n| < 1\} \cup \\ \cup \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j| < r_j, \text{ για } j < n, |z_n| < 1\}$$

έχει μια μοναδική αναλυτική επέκταση F στον πολυδίσκο $\mathbb{P}(0, 1)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

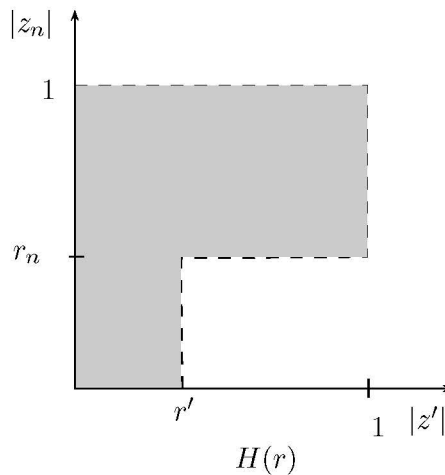
Έστω $\delta \in (r_n, 1)$. Τότε, η συνάρτηση $\hat{f} : \mathbb{P}(0, (r', \delta)) \rightarrow \mathbb{C}$ με

$$z \mapsto \hat{f}(z_1, z_2, \dots, z_n) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\delta} \frac{f(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, \zeta)}{\zeta - z_n} d\zeta \quad (5.8)$$

είναι ολόμορφη σε κάθε μεταβλητή χωριστά και συνεχής στο $\mathbb{P}(0, (r', \delta))$. Ως συνέπεια του Θεωρήματος του Cauchy για πολυδίσκους, η $\hat{f}$ είναι ολόμορφη στον $\mathbb{P}(0, (r', \delta))$. Αφού για $z' \in \mathbb{P}(0, r')$, η συνάρτηση $f(z', \cdot)$ είναι ολόμορφη για $|z_n| < 1$, η (5.8) μας δίνει ότι

$$\hat{f}(z', z_n) = f(z', z_n),$$

για $(z', z_n) \in \mathbb{P}(0, (r', \delta))$. Συνεπώς, απ' την Αρχή της Αναλυτικής Συνέχισης, $\hat{f} = f$ στο $H(r) \cap \mathbb{P}(0, (r', \delta))$, επομένως, η $\hat{f}$ επεκτείνει την f στον $\mathbb{P}(0, 1)$. Η μοναδικότητα έπεται από την Αρχή της Αναλυτικής Συνέχισης.



Θεώρημα 5.3.2 (Επέκτασης του Hartogs) Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ χωρίο. Έστω $n > 1$. Έστω επίσης K ένα συμπαγές υποσύνολο του Ω τέτοιο ώστε το $\Omega \setminus K$ να είναι συνεκτικό. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus K)$. Τότε, υπάρχει μια ολόμορφη συνάρτηση F στο Ω τέτοια ώστε $F|_{\Omega \setminus K} = f$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{C}^n)$ με $\text{supp}(\chi) \subset \Omega$ και $\chi = 1$ σε μια περιοχή του K . Για $1 \leq j \leq n$ θέτουμε

$$f_j(z) = \begin{cases} -\frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}_j}(z)f(z), & z \in \Omega \setminus K \\ 0, & z \in \mathbb{C}^n \setminus (\Omega \setminus K) \end{cases},$$

δηλ.

$$f_j = \frac{\partial[(1-\chi)f]}{\partial \bar{z}_j}.$$

Αφού $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus K)$, έπεται ότι $f_j \in C_c^\infty(\mathbb{C}^n)$ και μάλιστα

$$\frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_k} = \frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_j}.$$

Επομένως, από το Θεώρημα (5.2.2), έχουμε ότι η συνάρτηση

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{f_1(\zeta, z_2, \dots, z_n)}{\zeta - z_1} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}$$

είναι λύση της εξίσωσης $\bar{\partial}u/\partial \bar{z}_1 = f_1$ και $u = 0$ στη μη φραγμένη συνεκτική συνιστώσα C του $\mathbb{C}^n \setminus (\cup \text{supp}(f_1))$ και επομένως $u = 0$ στη μη φραγμένη συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C}^n \setminus \text{supp}(\chi) \subset \mathbb{C}^n \setminus (\cup \text{supp}(f_1))$. Επεκτείνουμε την f σε μια $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ως εξής:

$$F := (1-\chi)f - u.$$

Προφανώς $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ και επειδή $u_j = 0$ στο $Z \cap (\Omega \setminus K)$, έπεται ότι $F|_{Z \cap (\Omega \setminus K)} = f$. Όμως, το $\Omega \setminus K$ είναι συνεκτικό και αφού το $Z \cap (\Omega \setminus K)$ είναι μη κενό, η Αρχή της Αναλυτικής Συνέχισης μας δίνει ότι

$$F|_{\Omega \setminus K} = f.$$

Παρατηρήσεις 1. Ας δούμε την ιδέα πίσω από την απόδειξη αυτή. Η συνάρτηση $(1-\chi)f$ είναι μια C^∞ επέκταση της f σε όλο το Ω . Η συνάρτηση αυτή δεν είναι κατανάγκη ολόμορφη διότι είναι ίση με μηδέν στο K . Επομένως, αφαιρώντας μια συνάρτηση u από αυτήν την διορθώνουμε σε ολόμορφη: δηλ. η u πρέπει να είναι τέτοια ώστε $\bar{\partial}((1-\chi)f - u) = 0$. Βέβαια, η εξίσωση αυτή έχει πολλές λύσεις αφού ο τελεστής $\bar{\partial}$ είναι γραμμικός, γιαυτό επιλέγουμε τη u έτσι ώστε να έχει συμπαγή φορέα στο Ω γιατί τότε η $(1-\chi)f$ έχει φορέα κοντά στο $\partial\Omega$ και άρα η $(1-\chi)f - u$ δε μηδενίζεται και είναι ίση με τη f κοντά στο $\partial\Omega$.

2. Το Θεώρημα αυτό δεν ισχύει στην περίπτωση της μιας μεταβλητής. Το γεγονός αυτό αντανακλά το ότι στη μια μεταβλητή έχουμε ολόμορφες συναρτήσεις με μεμονωμένες ανωμαλίες, όπως π.χ. η $z \mapsto 1/z$ η οποία είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}$ και δεν μπορεί να επεκταθεί σε ολόμορφη σε όλο το $\mathbb{C}$, ενώ στις πολλές μεταβλητές δεν υπάρχουν. Ιδιαίτερος δεν υπάρχουν ολόμορφες συναρτήσεις με μεμονωμένες ρίζες για $n > 1$, γιατί αν μια συνάρτηση f έχει μεμονωμένη ρίζα σε ένα σημείο, τότε η $1/f$ θα έχει μεμονωμένη ανωμαλία στο σημείο αυτό, πράγμα που δε γίνεται από το Θεώρημα του Hartogs (βλέπε και παρατηρήσεις πριν το Θεώρημα).

Βιβλιογραφία

- [1] John B. Conway - *Functions of One Complex Variable I*, Second Edition, 1978 Springer-Verlag New York
- [2] Gennadi Henkin, Jürgen Leiterer - *Theory of Functions on Complex Manifolds*, 1984 Birkhäuser Verlag
- [3] L. Hörmander - *An Introduction to COMPLEX ANALYSIS in Several Variables* 1973, North Holland, Amsterdam
- [4] Steven G. Krantz - *Function Theory of Several Complex Variables*, 2001 Corrected Printing, AMS CHELSEA PUBLISHING
- [5] R. Michael Range - *Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables*, Springer Verlag, Berlin, 1998 Corrected Printing
- [6] Walter Rudin - *Real and Complex Analysis*, Third Edition, 1987 McGRAW HILL INTERNATIONAL EDITIONS
- [7] Μερκουράκης Σοφοκλής, Τηλέμαχος Χατζηαφράτης - *Μια εισαγωγή στη Μιγαδική Ανάλυση*, Εκδόσεις Συμμετρία, 2005
- [8] Τσαρπαλιάς Αθανάσιος, Τηλέμαχος Χατζηαφράτης - *Αναλυτικές Συναρτήσεις και Εφαρμογές*, Εκδόσεις Συμμετρία, 2000
- [9] Τηλέμαχος Χατζηαφράτης - *Προσεγγίσεις και Αναπαραστάσεις Συναρτήσεων*, 2001